



U N I V E R S I T É   D E   L I È G E

Faculté des Sciences Appliquées

# Investigation et modélisation des tensions circonférentielles en simulation méridienne

Travail présenté en vue de l'obtention  
du Diplôme d'Etudes Approfondies en Sciences Appliquées

par

Jean-Philippe THOMAS  
Ingénieur civil électricien-mécanicien

Septembre 2008





U N I V E R S I T É   D E   L I È G E

Faculté des Sciences Appliquées

# Investigation et modélisation des tensions circonférentielles en simulation méridienne

Travail présenté en vue de l'obtention  
du Diplôme d'Etudes Approfondies en Sciences Appliquées

par

Jean-Philippe THOMAS  
Ingénieur civil électricien-mécanicien

Septembre 2008

*Avant toute chose, je tiens à remercier le Professeur Olivier Léonard, promoteur de ce mémoire, pour m'avoir procuré l'occasion d'entreprendre une thèse de doctorat sur un sujet riche et passionnant, et qui m'a suivi avec attention et intérêt.*

*J'exprime aussi ma gratitude envers Jean-François Simon pour ses conseils et le partage de l'expérience qu'il s'est forgée dans le domaine de la modélisation méridienne.*

*Je remercie les membres du jury pour l'intérêt qu'ils porteront à ce travail.*

*Pour terminer, je remercie toutes les personnes qui m'ont aidé, que ce soit de près ou de loin, à accomplir ce travail.*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Origine et effet des non-uniformités circumférentielles</b>	<b>4</b>
1.1 La cascade d'Adamczyk . . . . .	5
1.1.1 La moyenne circumférentielle . . . . .	7
1.2 Physique liée aux tensions circumférentielles . . . . .	9
1.2.1 Mécanismes de création des tensions circumférentielles . . . . .	10
1.2.2 Fermetures empiriques . . . . .	11
1.3 Le throughflow d'ordre supérieur . . . . .	12
1.3.1 Présentation du cas test . . . . .	13
1.3.2 Résultats de la simulation dans le plan aube-à-aube . . . . .	14
1.3.3 L'écoulement moyenné . . . . .	15
1.3.4 La simulation méridienne . . . . .	18
<b>2 Nature harmonique des tensions circumférentielles</b>	<b>22</b>
2.1 L'analyse spectrale locale . . . . .	23
2.2 La reconstruction harmonique . . . . .	27
2.3 La fermeture harmonique du throughflow . . . . .	30
<b>3 Vers une résolution harmonique non-linéaire</b>	<b>34</b>
3.1 La méthode de l'équilibre harmonique non-linéaire . . . . .	35
3.2 Applicabilité au cas du modèle méridien d'ordre supérieur . . . . .	39
3.2.1 Le système homogène . . . . .	39
3.2.2 La périodicité spatiale . . . . .	41
3.2.3 La non-uniformité spatiale du domaine de calcul . . . . .	42
3.2.4 Les hypothèses implicites de la collocation . . . . .	44
<b>4 Vers une résolution harmonique par couplage non-linéaire</b>	<b>46</b>
4.1 La méthode harmonique non-linéaire . . . . .	47
4.2 Applicabilité au modèle méridien . . . . .	50
4.2.1 Les conditions limites déterministes . . . . .	51
4.2.2 Les conditions limites circumférentielles . . . . .	52
<b>5 Dérivation et analyse du système aux perturbations</b>	<b>54</b>
5.1 Le système d'équations d'Euler tridimensionnelles stationnaires . . . . .	54
5.2 Le système moyen . . . . .	56
5.3 Deux possibilités de dériver le système auxiliaire . . . . .	58

5.4	Les deux formes de système aux perturbations circonférentielles . . . . .	59
5.5	Discussion du système aux perturbations . . . . .	62
5.5.1	Développement en série . . . . .	62
5.5.2	Termes non-linéaires . . . . .	63
5.5.3	La force des aubes . . . . .	64
5.5.4	Proposition de solution . . . . .	64
<b>6</b>	<b>La méthode de frontière immergée</b>	<b>66</b>
6.1	Principe de la méthode . . . . .	66
6.2	Approche discrète . . . . .	68
6.3	Approche continue . . . . .	68
6.3.1	Frontières élastiques . . . . .	69
6.3.2	Frontières rigides . . . . .	71
6.3.3	Méthode de Goldstein . . . . .	71
6.3.4	Méthode de Khadra . . . . .	71
6.3.5	Méthode de Mohd-Yusof . . . . .	72
6.4	Synthèse de la méthode de frontière immergée . . . . .	73
6.5	Application à l'écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre . . . . .	74
6.5.1	Discrétisation du corps . . . . .	74
6.5.2	Discrétisation du domaine . . . . .	75
6.5.3	Répartition de la force . . . . .	75
6.5.4	Calcul du terme source . . . . .	79
6.5.5	Outil de calcul . . . . .	80
6.5.6	Résultats de calcul . . . . .	81
6.5.7	Conclusion . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Le méridien harmonique</b>	<b>87</b>
7.1	Système d'équations harmoniques . . . . .	87
7.1.1	Le système moyen . . . . .	88
7.1.2	Le système aux perturbations . . . . .	88
7.1.3	Système harmonique . . . . .	89
7.1.4	Conditions limites . . . . .	90
7.2	Implémentation de la méthode . . . . .	91
7.2.1	Calcul du terme source de force . . . . .	92
7.2.2	Sources d'erreur . . . . .	93
7.3	Résultats et commentaires . . . . .	95
7.3.1	Influence du nombre de modes de Fourier . . . . .	95
7.3.2	Influence de la discrétisation méridienne . . . . .	100
7.3.3	Les champs bidimensionnels . . . . .	102
7.4	Synthèse de la méthode harmonique . . . . .	106
	<b>Conclusions</b>	<b>107</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>109</b>
	<b>A Formulation des termes additionnels</b>	<b>113</b>
	<b>B Le système d'équations de Navier-Stokes 3D instationnaires</b>	<b>115</b>

# Introduction

La conception aérodynamique de composants de turbomachines est aujourd'hui principalement basée sur l'usage de la CFD (*Computational Fluid Dynamics*). Grâce à l'augmentation constante de la puissance de calcul ainsi qu'à l'amélioration des techniques de résolution numérique (robustesse, rapidité, précision), une procédure de design basée sur la simulation numérique est devenue nettement moins coûteuse que des campagnes expérimentales. Il est aujourd'hui possible de résoudre des écoulements instationnaires tridimensionnels en turbomachines multi-étages. Toutefois, l'innovation technologique des conceptions aérodynamiques (traitement des écoulements secondaires, quantification de la marge au pompage, optimisation des conceptions, interactions fluide-structure) et la complexité des problèmes numériques associés (précision recherchée, taille des problèmes, simulation multi-étages, recours à la simulation instationnaire) nécessite encore aujourd'hui des temps de restitution trop importants pour un usage intensif de codes tridimensionnels instationnaires, ou même stationnaires, en phase de conception. L'usage de codes de calcul simplifiés et donc plus rapides, résolvant un écoulement moyen, est dès lors nécessaire pour les premières étapes de la conception d'un composant. Ceux-ci requièrent néanmoins des informations d'ordre empirique, lesquelles peuvent être fournies par une campagne d'essais qui permet de valider les codes de calcul. Parmi ceux-ci, le code méridien (ou *throughflow*) occupe une place importante.

## Le throughflow classique

La simulation throughflow consiste en la résolution dans un plan (le plan méridien), d'un écoulement moyenné selon la circonférence de la machine. Son utilisation première se situe dans une chaîne de conception, où il permet un accès rapide aux caractéristiques principales de l'écoulement, aidant ainsi le concepteur à faire des choix rapides quant à la géométrie de la machine, sur base de performances souhaitées. D'autres applications peuvent aussi lui être attribuées : exploitation de résultats expérimentaux, création d'un environnement multi-étage pour une simulation tridimensionnelle d'une roue particulière, estimation des conditions de pompage.

Néanmoins, le prix à payer pour bénéficier d'un temps de calcul réduit par rapport à une simulation tridimensionnelle est de recourir à un certain nombre d'informations empiriques, au travers de corrélations de pertes, obtenues sur base de résultats de campagnes d'essais sur différentes géométries. Le problème majeur de cette formulation est son manque de généralité. En effet, si ces corrélations sont acceptables pour des géométries bien connues et des conditions de fonctionnement déterminées, le besoin d'une modélisation plus générale apparaît en cas de géométrie innovante ou de fonctionnement particulier (hors fonctionnement nominal par exemple). C'est dans cette optique que J.J. Adamczyk [1]-[2] a développé une cascade de moyennes qui mènent au modèle le plus général en turbomachines.

## La cascade d'Adamczyk

Dans un esprit de formalisation des différents niveaux de modélisation en CFD et de caractérisation de l'empirisme associé à chacun, Adamczyk a dérivé de manière rigoureuse un système d'équations obtenu par une cascade de trois moyennes : la moyenne d'ensemble appliquée aux équations de Navier-Stokes tridimensionnelles turbulentes instationnaires, la moyenne temporelle appliquée aux équations RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) et la moyenne aperiodique appliquée aux équations stationnaires pour finalement obtenir le système d'équations du canal moyenné (SECM). Ce dernier lie l'écoulement instationnaire et turbulent d'un ensemble de roues aubées à un écoulement stationnaire dans un canal inter-aubes. Ce modèle représente une unification et une généralisation de tous les modèles existant précédemment, chacun d'entre eux étant un cas particulier du SECM, par la suite d'hypothèses diverses. Du fait de la non-linéarité des équations, le processus de moyenne fait apparaître, à chaque étape de la cascade, des termes supplémentaires qu'il faut modéliser, ce qui consiste à résoudre le problème de la fermeture du système. La première moyenne amène les tensions de Reynolds, la deuxième les tensions déterministes et la dernière les tensions aperiodiques. Ces termes supplémentaires témoignent respectivement de l'effet moyen de la turbulence, de l'instationnarité (interactions entre roues mobiles l'une par rapport à l'autre) et de l'apériodicité entre canaux inter-aubes (interactions entre roues immobiles l'une par rapport à l'autre mais possédant un nombre d'aubes différent) sur le SECM.

A ces trois moyennes, on peut ajouter une quatrième : la moyenne circonferentielle. Cette dernière mène au système d'équations méridien. De manière identique, des termes supplémentaires apparaissent : les tensions circonferentielles. Celles-ci représentent l'effet moyen sur le modèle méridien des non-uniformités azimutales. A ces tensions, étant donné la moyenne circonferentielle, s'ajoutent des termes reprenant les effets moyens des aubes. Tous ces termes additionnels requièrent une modélisation externe.

## Le concept de simulation d'ordre supérieur

Par cet ensemble de moyennes, et par la hiérarchisation correspondante des niveaux de modélisation, Adamczyk dresse un état des besoins en apports externes d'information de chaque niveau de la cascade pour capturer un effet moyen des phénomènes qui ne sont réellement simulables que par le niveau supérieur. Par exemple, pour qu'un modèle méridien soit capable de reproduire l'effet moyen des non-uniformités circonferentielles qui apparaissent naturellement dans un modèle tridimensionnel stationnaire, plusieurs auteurs (dont Sehra [46], Jennions [28], Simon [48]) ont montré qu'il est nécessaire de lui adjoindre les tensions circonferentielles, lesquelles traduisent notamment des effets physiques tels que le mélange radial ou les tourbillons de bout d'aube. Ces apports externes d'information peuvent être d'ordre empirique ou, dans un objectif de généralité, provenir d'une modélisation nouvelle capable de fournir une information d'un ordre supérieur correspondant à la machine et aux conditions de fonctionnement étudiées. C'est dans cette optique que le travail présenté ici s'inscrit.

Ce problème de fermeture (i.e. de modélisation des termes d'ordre supérieur), se pose également en simulation tridimensionnelle stationnaire pour obtenir une image moyenne des instationnarités, autrement dit des interactions rotor-stator. Ceci a fait l'objet de nombreuses recherches ces dernières années. Parmi tous les modèles, la fermeture dite "harmonique" de He et Ning [20] s'est révélée supérieure. Cette méthode consiste en la résolution, dans le domaine fréquentiel, d'un système d'équations linéarisées aux perturbations. Sa capacité à reconstruire les tensions déterministes, et même une partie de l'écoulement instationnaire, a été illustrée



par plusieurs auteurs (Chen [12], Stridh [50], Vilmin [55]). Dans la même lignée, Hall [19] a développé une technique qu'il nomme "l'équilibre harmonique" (ou *harmonic balance technique*), qui consiste à résoudre les équations RANS non-linéaires dans le domaine fréquentiel.

## Notre travail

Nous proposons dans ce travail d'analyser la possibilité de s'affranchir d'une part d'empirisme en simulation throughflow et d'analyser des pistes de modélisation nouvelle. Pour ce faire, nous investiguons la possibilité d'étendre les méthodes de résolution harmoniques, qui ont prouvé leur efficacité dans le cas tridimensionnel stationnaire, au cas méridien. A cette fin, le travail sera organisé de la manière suivante.

Dans un premier chapitre, nous détaillerons la cascade d'Adamczyk et la physique liée aux termes supplémentaires apparaissant en son sein. Nous exprimerons le point de vue de plusieurs auteurs quant à l'intérêt de ces termes supplémentaires et illustrerons ces dires par un exemple.

Avec en ligne de mire l'utilisation d'une méthode spectrale pour reconstruire les tensions circumférentielles, le deuxième chapitre aura pour but de prouver qu'une reconstruction harmonique est adaptée à la modélisation des non-uniformités considérées. Un exemple illustrera cette étude.

Les chapitre 3 et 4 seront consacrés à la description des deux méthodes harmoniques ayant fait leur preuve citées précédemment, les méthodes de He [20] et de Hall [19]. Nous y envisagerons la possibilité d'appliquer celles-ci au cas du modèle méridien.

Le chapitre 5 exposera le développement du système aux perturbations circumférentielles, lesquelles constituent l'information d'ordre supérieur au modèle méridien. Nous discuterons la nature de ces équations et envisagerons la possibilité de les résoudre, de manière approchée, à l'aide d'un code de calcul d'un ordre inférieur, soit un code méridien. Nous y exprimerons les obstacles à surmonter pour y parvenir.

Le chapitre 6 proposera une méthode de modélisation des aubes qui remplit les conditions préalables à l'utilisation d'une méthode harmonique efficace : la méthode de frontière immergée ("Immersed Boundary Method"). Ses caractéristiques seront illustrées par un exemple.

Le dernier chapitre sera consacré au développement d'une méthode harmonique adaptée à la simulation méridienne d'ordre supérieur. Des résultats de simulations y seront présentés et discutés.

Enfin, nous concluons le travail en synthétisant les points marquants et proposerons des perspectives de développement afin d'améliorer la méthode présentée.

# Chapitre 1

## Origine et effet des non-uniformités circonférentielles

Une procédure de conception aérodynamique d'un composant de turbomachine est aujourd'hui principalement basée sur l'outil numérique. En effet, grâce à l'augmentation constante de la puissance de calcul ainsi qu'au développement des techniques de résolution numérique, le recours à la CFD (*Computational Fluid Dynamics*) est devenu d'une part, moins coûteux en temps que les tests en soufflerie et, d'autre part, d'une qualité de description de l'écoulement suffisante pour permettre l'innovation technologique. Ainsi, une chaîne d'outils numériques met à disposition du concepteur des codes de calculs allant du plus simple et rapide au plus complet. Une simulation unidimensionnelle permet par exemple, en des temps de calcul très faibles (quelques secondes), de déterminer une évolution moyenne de la veine (i.e. du chemin d'écoulement du fluide) et de fixer le nombre d'étages nécessaire au composant pour se conformer aux performances requises, c'est-à-dire de faire des choix rapides dans une phase précoce du projet. Les outils de simulations bidimensionnelles arrivent ensuite. Ils donnent accès aux évolutions transversales de l'écoulement et permettent une analyse plus fine, avec un temps de restitution raisonnable pour une utilisation intensive (quelques secondes à quelques minutes). Ces outils permettent au concepteur d'aller plus avant dans la compréhension et le design du composant, en modifiant la géométrie des pales par exemple. Les étapes suivantes consistent à recourir aux simulations tridimensionnelles stationnaires, voire instationnaires. Ces outils étant caractérisés par des temps de restitution plus importants (quelques heures à quelques jours), ils sont utilisés en fin de chaîne, pour analyser des phénomènes locaux comme les écoulements en bout d'aube, vérifier la conception ou quantifier les marges de stabilité notamment.

Chacun de ces outils de simulation est donc caractérisé par un temps de restitution et un niveau de description de l'écoulement. L'empirisme est présent dans chacun d'eux, dans des mesures différentes. Des modèles résultant de l'expérience et de l'observation sont ajoutés dans ces codes de calcul pour améliorer le niveau de physique, en minimisant l'impact sur le temps de calcul. Il est cependant très important, pour l'utilisateur ou le développeur, de savoir quelles hypothèses peuvent être faites pour aboutir à l'outil. C'est dans cette optique de caractérisation du niveau d'empirisme et de liaison entre les modèles et la physique que John Adamczyk [1] a développé le Système d'Equations du Canal Moyenné (ou SECM), résultant d'une suite de moyennes. Ces différentes moyennes, dont résultent notamment les tensions circonférentielles, composent la cascade dite d'Adamczyk que nous allons présenter dans la section suivante.

Nous concentrerons la suite du chapitre sur les tensions circonférentielles. Dans un premier temps, nous présenterons la physique associée à celles-ci par des conclusions et résultats tirés de la littérature. Dans un deuxième temps, nous introduirons un cas test simple mais général, permettant d'illustrer certaines des affirmations précédentes, qui sera aussi repris dans le chapitre suivant pour investiguer la nature harmonique des tensions circonférentielles.

## 1.1 La cascade d'Adamczyk

La cascade d'Adamczyk est représentée à la figure 1.1.

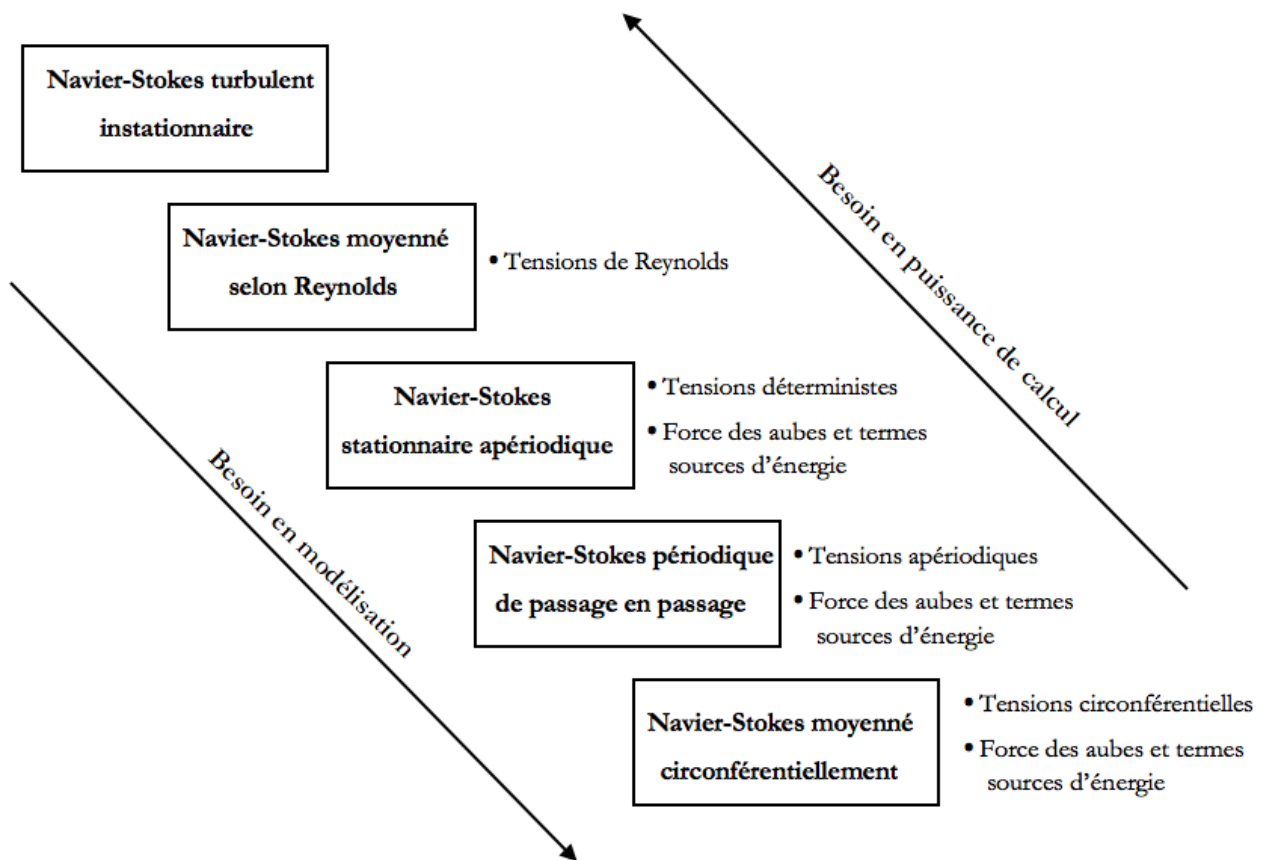


FIG. 1.1 – Cascade d'Adamczyk [2]

Au sommet de cette cascade se trouve le système d'équations tridimensionnelles instationnaires et turbulentes de Navier-Stokes. Il s'agit de la description la plus précise du comportement d'un fluide, au sein d'une turbomachine notamment et aussi la plus complexe. Ce système est impossible à résoudre en écoulements internes tant les gammes d'échelles de longueurs et de temps sont larges. Pour les résoudre entièrement, il faudrait une densité de maillage par unité de volume proportionnelle au nombre de Reynolds élevé à la puissance  $9/4$  [31]. Or un nombre de Reynolds caractéristique d'un écoulement en turbomachine est de l'ordre d'un million. Ceci justifie l'utilisation de modèles simplifiés résultant de moyennes. De ce fait, le besoin en puissance de calcul diminue tandis que le besoin en modélisation augmente, comme nous allons le voir.

Ainsi, le modèle suivant est le système d'équations de Navier-Stokes auquel une moyenne de Reynolds a été appliquée<sup>1</sup>. Une moyenne dite de Reynolds consiste en une moyenne statistique, sur un nombre important d'échantillons, c'est-à-dire sur un nombre important de révolutions pour une machine tournante. Son implication est le filtrage des phénomènes non déterministes, comme la turbulence. On obtient ainsi un système d'équations tridimensionnelles instationnaires (les phénomènes déterministes sont toujours présents) augmenté de certains termes supplémentaires, les tensions de Reynolds, dont la signification physique est l'influence moyenne de la turbulence. Ces tensions résultent de la moyenne opérée sur des termes non-linéaires.

En effet, si l'on définit, de manière générale, la moyenne<sup>2</sup> d'une variable  $\phi$  sur un intervalle  $\Omega$  par l'expression (1.1)

$$\bar{\phi} = \frac{\int_{\Omega} \phi \, d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} \quad (1.1)$$

et si l'on définit la moyenne de Favre d'une variable  $\phi$  comme une moyenne pondérée par la densité  $\rho$  par l'expression (1.2)

$$\tilde{\phi} = \frac{\int_{\Omega} \rho \phi \, d\Omega}{\int_{\Omega} \rho \, d\Omega} \quad (1.2)$$

et les perturbations correspondantes

$$\phi' = \phi - \bar{\phi} \quad \phi'' = \phi - \tilde{\phi} \quad (1.3)$$

alors la moyenne d'un triple produit incluant la densité, comme en comprennent les équations de Navier-Stokes, fait apparaître, outre les termes moyens, des termes supplémentaires.

$$\overline{\rho\phi\psi} = \underbrace{\bar{\rho}\tilde{\phi}\tilde{\psi}}_{\text{termes moyens}} + \underbrace{\overline{\rho\phi''\psi''}}_{\text{termes additionnels}} \quad (1.4)$$

Si les termes moyens peuvent être calculés explicitement par la résolution du système moyen, les termes additionnels, constituant une information d'un ordre supérieur, sont inaccessibles et doivent être modélisés. C'est à ce niveau qu'intervient l'empirisme. Ainsi, dans le cas d'une moyenne de Reynolds, ces termes portent le nom de tensions de Reynolds et traduisent l'influence moyenne de la turbulence. Ils sont introduits dans une simulation instationnaire déterministe par la résolution d'un modèle de turbulence.

Le niveau suivant repris à la figure 1.1 est un système d'équations tridimensionnelles stationnaires, résultant d'une moyenne temporelle. Cette moyenne temporelle est équivalente à un filtrage des roues aubées mobiles par rapport à la roue d'intérêt, à l'origine des instationnarités. Par le même mécanisme, certains termes additionnels apparaissent. Parmi ceux-ci figurent les tensions déterministes qui traduisent l'influence moyenne de l'instationnarité sur un écoulement stationnaire. D'autres termes, qui traduisent l'effet moyen des roues filtrées, découlent de la moyenne. Il s'agit de la force des aubes composant la roue mobile et des termes

<sup>1</sup>Nous ne reproduisons pas ici les développements mathématiques, ils peuvent être trouvés dans le document original d'Adamczyk [2].

<sup>2</sup>Les expressions (1.1) et (1.2) utilisent l'intégration dans un souci de généralité. Dans le cas de la moyenne de Reynolds toutefois, l'opération est discrète et utilise donc une sommation.

d'énergie. Ils proviennent, physiquement, de l'action de la pression, des tensions de cisaillement et des flux de chaleur sur les aubes des roues mobiles.

Le modèle obtenu décrit un écoulement tridimensionnel apériodique de canaux inter-aubes en canaux inter-aubes. Pour obtenir un écoulement périodique, une troisième moyenne est opérée. Elle consiste à filtrer les roues immobiles autres que la roue considérée. Comme précédemment, des termes supplémentaires apparaissent : les tensions apériodiques, la force des aubes et des termes sources d'énergie résultant de l'influence moyenne des roues immobiles.

Le modèle ainsi obtenu relie l'écoulement instationnaire et turbulent dans une machine multi-étages à l'écoulement stationnaire au sein d'un canal inter-aubes, il s'agit du SECM (Système d'Equations du Canal Moyenné). Il existe autant de systèmes que de roues. Pour chacune d'elles, un seul canal doit être explicitement calculé, l'influence des autres roues apparaissant au travers des termes additionnels apparus au cours des différentes moyennes.

Enfin, on peut ajouter une quatrième opération de moyenne : la moyenne circonférentielle. Celle-ci mène au système d'équation méridien, qui décrit un écoulement stationnaire axisymétrique et qui constitue notre domaine d'intérêt. Pour cette raison, nous allons décrire de manière plus complète ce dernier opérateur de moyenne.

### 1.1.1 La moyenne circonférentielle

La dernière moyenne consiste en un filtrage des non-uniformités azimutales en moyennant la roue considérée elle-même, génératrice de ces non-uniformités. La moyenne circonférentielle consiste en une intégration de l'écoulement de l'intrados d'une aube à l'extrados de l'aube suivante, comme représenté à la figure 1.2 où  $x$  est la direction axiale de la machine et  $\theta$  la direction azimutale.

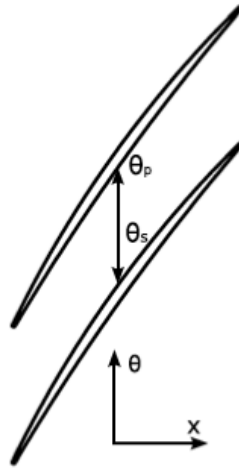


FIG. 1.2 – Domaine circonférentiel [48]

La moyenne d'une variable  $\phi$  est définie par l'expression 1.5, où  $\Delta\theta$  représente la portion de la circonférence d'un passage inter-aubes.

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\Delta\theta} \int_p^s \phi \, d\theta \quad (1.5)$$

Définissant ensuite le facteur de blocage  $b$  comme le rapport de la portion de circonférence occupée par le fluide à la circonférence totale, la relation (1.6) est obtenue.

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\frac{2\pi}{N}b} \int_p^s \phi d\theta \quad (1.6)$$

Selon cette définition et utilisant la règle de Leibnitz, la relation (1.7), exprimant la moyenne de la dérivée d'une certaine variable  $\phi$  de l'écoulement par rapport à une variable spatiale  $s$ , est obtenue.

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial s} = \frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\phi}}{\partial s} - \frac{1}{\frac{2\pi}{N}b} \left[ \phi \frac{\partial \theta}{\partial s} \right]_p^s \quad (1.7)$$

Comme précédemment, la moyenne de Favre est introduite

$$\tilde{\phi} = \frac{\int_p^s \rho \phi d\theta}{\int_p^s \rho d\theta} = \frac{\overline{\rho \phi}}{\bar{\rho}} \quad (1.8)$$

Utilisant ces relations, le système d'équations méridien est finalement obtenu et décrit par les équations de conservation de la masse (1.9), de conservation de la quantité de mouvement (1.10) et de conservation de l'énergie (1.11), où les indices  $i$  et  $j$  reprennent les composantes et directions axiale, azimutale et radiale. Ces équations mettent également en jeu les composantes de vitesse  $V_i$ , la pression statique  $p$ , les tensions visqueuses  $\tau_{ij}$ , l'enthalpie totale  $H$  et les flux de chaleur  $q_i$ .

$$\frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\rho} \tilde{V}_j}{\partial s_j} = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\rho} \tilde{V}_i \tilde{V}_j}{\partial s_j} + \frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{p}}{\partial s_j} \delta_{ij} = \frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\tau}_{ij}}{\partial s_j} - \underbrace{\frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\rho} \overline{V_i'' V_j''}}{\partial s_j}}_{\text{perturbations}} + \underbrace{\frac{f_{bi}}{\text{non-visqueux}} + \frac{f_{vi}}{\text{visqueux}}}_{\text{force des aubes}} \quad (1.10)$$

$$\frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\rho} \tilde{V}_j \tilde{H}}{\partial s_j} = \frac{1}{b} \frac{\partial b (\bar{\tau}_{ij} \tilde{V}_i - \bar{q}_j)}{\partial s_j} + \underbrace{\frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\tau}'_{ij} \overline{V_i''}}{\partial s_j}}_{\text{perturbations}} - \underbrace{\frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\rho} \overline{V_j'' H''}}{\partial s_j}}_{\text{perturbations}} + \underbrace{\frac{e_b}{\text{non-visqueux}} + \frac{e_v}{\text{visqueux}}}_{\text{termes sources d'énergie}} \quad (1.11)$$

Les termes additionnels sont, cette fois, les tensions circonférentielles qui traduisent l'effet moyen des non-uniformités azimutales sur l'écoulement moyen et la force des aubes (parties visqueuse et non-visqueuse) et termes sources d'énergie (parties visqueuse et non-visqueuse) associés à la roue considérée elle-même. Ainsi, dans le système méridien, toutes les roues aubées de la machine multi-étages apparaissent sous forme d'un effet moyen, elles sont assimilées à des roues dites fantômes et sont donc toutes équivalentes d'un point de vue mathématique. De ce fait, il n'existe qu'un système d'équations méridiennes, le même pour toutes les roues, contrairement au SECM.

Les termes de perturbations présents dans les équations (1.10) et (1.11) peuvent être vus comme très génériques. Même s'ils ont été obtenus ici par l'application d'une moyenne

circonférentielle et témoignent donc des effets non-uniformes azimutalement, ils ont cependant la même forme que les termes de perturbations apparus au cours des moyennes précédentes de la cascade d'Adamczyk. Ainsi, on peut assimiler ces termes à l'influence moyenne de la turbulence, des roues mobiles, des roues statiques et de la roue considérée sur un écoulement stationnaire axisymétrique. Il en est de même pour la force des aubes et les termes source d'énergie.

S'il est vu de cette manière, ce système est d'une généralité et d'une rigueur totales. En effet, aucune hypothèse n'a été faite. Ce système ne contient cependant pas suffisamment d'information pour être résolu de manière autonome, il s'agit d'un système ouvert. Le problème de la fermeture consiste à apporter de l'information supplémentaire, de quelle que manière que ce soit, afin d'obtenir une solution. Pour ce faire, il est d'usage de poser des hypothèses simplificatrices. C'est par ces hypothèses, qui peuvent être de natures très différentes, que des modèles différents vont apparaître. Néanmoins, dans tous les cas, ils découlent de la cascade d'Adamczyk, qui constitue le modèle le plus général dans le domaine des turbomachines.

Dans la suite, nous concentrerons notre exposé sur le modèle méridien et l'influence des non-uniformités circonférentielles uniquement. Ainsi, nous omettrons tout effet turbulent<sup>3</sup>, instationnaire ou apériodique. Cela revient à dire que nous ne considérons que les deux derniers étages de la figure 1.1.

## 1.2 Physique liée aux tensions circonférentielles

Les tensions circonférentielles résultent, comme nous l'avons décrit, du processus de moyenne d'un système non-linéaire caractérisé par un écoulement non-uniforme azimutalement. La figure 1.3 présente la décomposition de l'écoulement en une partie moyenne et une partie fluctuante dans le plan  $(x, \theta)$ , soit le plan aube-à-aube. La section suivante est consacrée à la description des mécanismes physiques créateurs de non-uniformité spatiale.

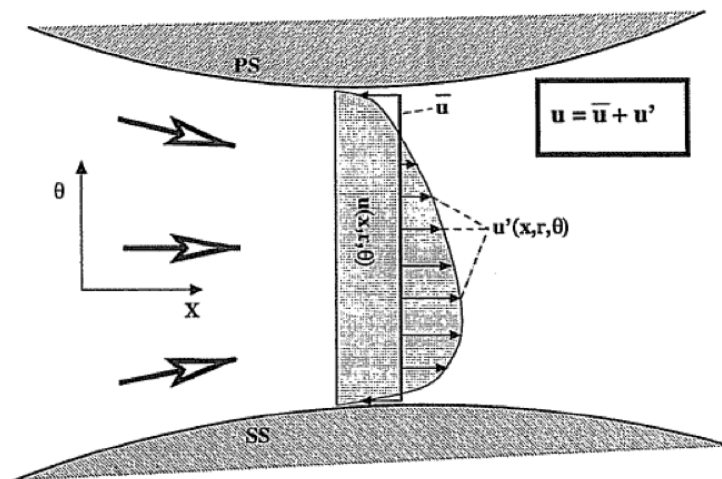


FIG. 1.3 – Fluctuations spatiales [4]

<sup>3</sup>En réalité, nous introduirons une part de cet effet puisque nous utiliserons un modèle de turbulence. Cependant, il ne s'agit bien que d'une partie de cet effet puisque la turbulence sera déterminée sur base d'un écoulement stationnaire axisymétrique.

### 1.2.1 Mécanismes de création des tensions circumférentielles

Comme la cascade d'Adamczyk l'a montré, tout phénomène ne répondant pas à l'hypothèse d'axisymétrie perturbe l'écoulement moyen au travers des termes additionnels que sont les tensions circumférentielles. Il est possible de scinder les mécanismes de création en deux catégories : bidimensionnels et tridimensionnels.

Dans la première catégorie, Baralon [4] cite certains des points suivants :

- L'épaisseur de l'aube : une aube, même alignée avec l'écoulement et sans cambrure, génère un champ de pression non-uniforme.
- L'angle de calage : l'angle de calage, c'est à dire l'angle que fait l'aube avec la direction axiale, est, s'il est différent de l'angle de l'écoulement, lui aussi à l'origine de perturbations.
- La cambrure de l'aube : une aube courbée va inévitablement modifier l'écoulement et ce, de manière non-uniforme.
- Les chocs : les chocs apparaissant dans les passages inter-aubes sont généralement normaux à la direction de l'écoulement. Ainsi, pour une configuration d'aube non-alignée avec l'écoulement, un choc apparaîtra comme non-uniforme azimutalement.
- Le sillage : lors de son parcours le long des parois de l'aube, le fluide développe une couche limite visqueuse, à l'origine de perturbations. Celles-ci se propagent ensuite hors de la zone aubée pour former un sillage, une zone de basse énergie.

Ces phénomènes bidimensionnels peuvent être observés dans la partie dite saine d'un écoulement autour d'une aube, c'est-à-dire dans la partie d'aube située à mi-distance des parois de la veine (i.e du carter et du moyeu), dans une zone où l'écoulement est principalement situé dans le plan aube-à-aube.

La deuxième catégorie par contre, apparaît par la présence des parois de la veine, qui génèrent des écoulements plus complexes, que l'on appelle généralement écoulements secondaires. Ces phénomènes locaux sont nommés ainsi parce qu'ils n'agissent pas dans la direction axiale, la direction de l'écoulement principal. Ils ne sont pas souhaités mais apparaissent notamment par la présence de parois. Une autre vision de ces écoulements est possible. En effet, selon l'approche d'Adamczyk, tout ce qui n'est pas identifiable par une simulation moyenne, ou un écoulement moyen axisymétrique, c'est-à-dire tout ce qui n'appartient pas à l'écoulement principal, est une information d'ordre supérieur. Autrement dit, Adamczyk nous indique que ces écoulements secondaires sont la traduction physique des tensions circumférentielles apparues mathématiquement. Certains de ces phénomènes secondaires sont présentés ci-dessous, faisant clairement apparaître une non-uniformité circumférentielle.

La figure 1.4 décrit les phénomènes secondaires apparaissant classiquement en turbomachines. Parmi ceux-ci on peut citer les tourbillons de coin au moyeu et au carter, l'écoulement existant dans le jeu entre le bout de pale et le carter, le tourbillon en fer à cheval qui remonte la pale côté extradados. Selon Adkins et Smith [3], l'amplitude de ces écoulements secondaires est proportionnelle au taux de chargement de la machine et le taux de pénétration dans l'écoulement principal de ces phénomènes secondaires est proportionnel à l'écart inter-aubes. Or la tendance actuelle est à l'augmentation de ces deux-ci (Hiernaux et al [25]). Il en découle que les composants aérodynamiques futurs présenteront un haut degré de non-uniformité. Il est donc important de s'atteler à leur prise en compte.



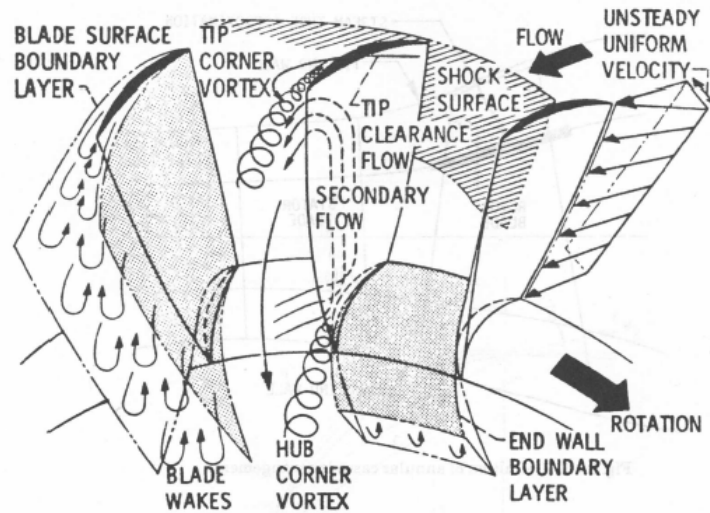


FIG. 1.4 – Ecoulements secondaires [48]

Ces écoulements secondaires génèrent des perturbations de vitesse dont la structure est complexe. Leur modélisation en simulation throughflow en est donc rendue difficile, ce qui en fait un sujet de recherche riche et partagé mondialement.

### 1.2.2 Fermetures empiriques

Comme nous l'avons vu au travers des équations (1.9) à (1.11), le modèle méridien comporte des termes d'un ordre qui lui est supérieur, autrement dit des termes inconnus. Sous l'hypothèse que ces termes peuvent être connus avec exactitude, le système d'équations présenté décrit le modèle méridien le plus complet, prenant en compte tous les effets secondaires. La détermination de ces inconnues constitue la fermeture du système. Celle-ci est généralement résolue partiellement et de manière empirique.

Ainsi, pour obtenir une solution représentative, il est nécessaire de déterminer la force des aubes (parties visqueuse et non-visqueuse), les termes sources d'énergie (parties visqueuse et non-visqueuse) et les produits de fluctuations. Dans un throughflow classique, les tensions circonférentielles telles qu'apparaissant dans les équations (1.10) et (1.11) sont négligées. Elles sont en réalité réintroduites indirectement au moyen de modèles censés reproduire les phénomènes physiques à l'origine de celles-ci.

En throughflow classique, la force des aubes est déduite de corrélations. Celles-ci ont été élaborées sur base de résultats d'essais. De tels résultats sont notamment détaillés par Çetin et al [9]. Ces corrélations sont censées reproduire les pertes et les déviations<sup>4</sup> correspondant aux pales étudiées. Ainsi, ils corrélient ces pertes<sup>5</sup> aux caractéristiques géométriques des aubes et aux conditions d'écoulement en amont de celles-ci. Sur base de ces informations, la force des aubes (parties visqueuse et non-visqueuse) est déduite par résolution d'une équation supplémentaire (Bardoux [5], Simon [48]). Ces pertes sont d'origine bidimensionnelle. Ainsi, elles ne prennent en compte que l'écoulement en zone dite saine. Pour compléter la physique, des

<sup>4</sup>La déviation est l'écart entre la direction du fluide et l'aube à la sortie du passage inter-aubes.

<sup>5</sup>Dans la suite, le terme "perte" inclut aussi bien les pertes visqueuses que les déviations puisque ces dernières constituent un manque à gagner en terme de travail des aubes.

corrélations déterminant des pertes dites tridimensionnelles sont incluses afin de déterminer l'influence des écoulements secondaires apparaissant dans les zones proches des parois (Roberts et al [44]-[45]). Cet ensemble de corrélations a donc pour but de déterminer la force des aubes résultant de mécanismes bidimensionnels et tridimensionnels.

Cette force des aubes apparaît au sein des équations sous forme de termes sources appliqués uniquement au droit des aubes. Les phénomènes de pertes et de redistribution radiale de celles-ci s'étendent cependant à toute la zone fluide. Ainsi, il est nécessaire de rajouter, au travers de modèles, l'effet de phénomènes négligés. Un effet majeur est le mélange radial. Il consiste en une redistribution des pertes générées principalement dans les régions proches des parois vers la zone saine qu'est la région intermédiaire. La prise en compte de ce phénomène est particulièrement importante dans les machines multiétages où une redistribution radiale des pertes permet aux derniers étages de ne pas subir des accumulations de pertes aux parois et donc des gradients trop importants, leur permettant ainsi de fonctionner correctement. Sa formulation est donc essentielle pour une bonne prédiction des performances réelles d'un composant aérodynamique. Plusieurs auteurs se sont concentrés sur sa modélisation, formulant différentes hypothèses, certains le voyant comme un phénomène résultant d'un gradient de pression radial (Adkins et Smith [3]), d'autres comme un phénomène de diffusion analogue à la diffusion turbulente (Gallimore et Cumpsty [14]-[15]).

Le point commun entre tous ces modèles est qu'ils se reposent sur une analyse empirique de phénomènes physiques observés sur certaines configurations de machines. Ils résultent tous d'hypothèses et manquent tous de généralité. Ce que nous proposons dans la suite est de suivre l'approche d'Adamczyk en introduisant la force des aubes et les tensions circonférentielles en tant qu'êtres mathématiques traduisant fidèlement les phénomènes physiques.

### 1.3 Le throughflow d'ordre supérieur

Dans cette section, nous allons considérer un throughflow d'ordre supérieur, c'est-à-dire ne comportant plus de fermeture empirique, comme dans le throughflow classique, mais bien une fermeture répondant au formalisme d'Adamczyk, en considérant explicitement les tensions circonférentielles.

Au cours des dernières décennies, plusieurs auteurs ont investigué l'existence de termes traduisant les effets tridimensionnels moyens. Un des premiers auteurs à en parler est Smith [47] lors de la formulation de l'équation d'équilibre radial en turbomachines. Il les traite de manière approximative en supposant une évolution linéaire des grandeurs de l'écoulement dans la direction circonférentielle. Il finit par conclure qu'elles sont d'un ordre d'importance faible, en tout cas en fonctionnement nominal de la machine.

Sehra et Kerrebrock [46] analysent ensuite l'importance des tensions circonférentielles, qu'ils appellent tensions apparentes, sur la prédiction de l'écoulement moyen. Ils utilisent un code de calcul bidimensionnel résolvant l'écoulement dans le plan aube-à-aube pour déterminer les non-uniformités azimutales qu'ils utilisent ensuite dans un code méridien. Ils arrivent à la conclusion que la prise en compte de ces termes est importante pour prédire correctement les profils radiaux de l'écoulement et notamment de l'entropie.

Jennions [28] montre plus tard que la prise en compte des non-uniformités circonférentielles est nécessaire pour assurer la consistance entre un calcul aube-à-aube et un throughflow, pour la qualité de prédiction de son code et pour la capture des gradients radiaux de pression. Par

une comparaison des amplitudes des différents termes de l'équilibre radial, il montre aussi que les perturbations peuvent être du même ordre de grandeur que les autres termes, à l'exception de la force des aubes. Il situe l'effet des perturbations principalement dans les régions proches des parois.

Perrin [40] montre même que les tensions circumférentielles sont plus importantes que les tensions visqueuses, excepté aux parois où elles sont du même ordre. Il montre aussi que les tensions circumférentielles sont très importantes dans l'équation radiale et qu'elles sont à l'origine du gradient de pression radial, et donc du mélange dans cette direction.

Baralon [4], quant à lui, a examiné les différentes composantes du tenseur circumférentiel et les a rapprochées des phénomènes secondaires apparaissant aux parois, mentionnés précédemment.

Récemment, Simon [48] a extrait les tensions circumférentielles sur base d'une simulation tridimensionnelle pour ensuite les inclure dans une simulation méridienne. Par là, il a montré que l'effet moyen des écoulements secondaires comme le décrochage de coin (voir figure 1.4) ou encore le mélange radial étaient très bien reproduits par ces termes.

Dans la suite, nous allons reprendre cette dernière philosophie. Nous allons présenter les résultats d'une simulation<sup>6</sup> bidimensionnelle réalisée dans le plan aube-à-aube, à mi-hauteur de veine d'un étage de compresseur. A partir de ce résultat, les tensions circumférentielles seront extraites. Elles seront ensuite introduites dans un code de calcul résolvant les équations (1.9) à (1.11) où les variations radiales seront négligées. Il s'agit donc d'un code de calcul méridien unidimensionnel. Cette simulation à mi-hauteur de veine reviendra à considérer uniquement les mécanismes bidimensionnels de génération de non-uniformités circumférentielles, lesquels ont été mentionnés précédemment. Cet exemple n'en sera pas moins général pour l'étude que nous souhaitons faire, c'est-à-dire investiguer la nature harmonique des tensions circumférentielles, comme nous le détaillerons au chapitre suivant.

### 1.3.1 Présentation du cas test

Le cas test est une simulation de type plan de mélange. Cette technique consiste à ne transférer d'une roue à l'autre que l'écoulement moyenné selon la direction azimutale, moyenne effectuée à l'interface des deux roues, soit le plan de mélange, négligeant donc toute interaction instationnaire entre roues<sup>7</sup>. Cette simulation est effectuée en une section située à mi-hauteur de veine d'un compresseur basse vitesse.

Les performances globales de ce compresseur sont reprises au tableau 1.1. Sur ce tableau sont aussi reprises les performances calculées pour la section à mi-hauteur de veine, à un point de fonctionnement situé près du point de rendement maximum, où le degré de non-uniformité circumférentiel est plus important. Ce point de fonctionnement a été préféré au point de rapport de pression maximal (i.e. proche du pompage) car ce dernier aurait inclus trop de désorganisation et d'instationnarité pour permettre de tirer des conclusions générales.

<sup>6</sup>Pour cette simulation, il est fait usage d'un code de calcul commercial. La simulation méridienne sera quant à elle effectuée par notre code de calcul.

<sup>7</sup>Selon le formalisme d'Adamczyk, cela signifie que les tensions déterministes sont omises. En faisant cela, la comparaison de l'écoulement dans le plan aube-à-aube avec sa moyenne donnera les tensions circumférentielles associées à chaque roue uniquement.

	Etage complet (expérimental)	Section à mi-hauteur	
		visqueux	non-visqueux
débit massique [kg/s]	11	-	-
rapport de pression	1.14	1.151	1.16
rendement	0.92	0.956	-
vitesse de rotation [trs/min]	6300	6300	6300

TAB. 1.1 – Performances globales du compresseur

Deux simulations ont été effectuées, l'une inclut les phénomènes visqueux (simulation de type Navier-Stokes), l'autre est totalement non-visqueuse (simulation de type Euler). La comparaison de celles-ci permettra de mettre en exergue l'impact de la viscosité sur les tensions circumférentielles. Pour ce qui concerne la simulation de type Euler, le débit a été imposé à celui obtenu par la simulation Navier-Stokes, afin de faciliter la comparaison entre les résultats correspondants. Le maillage utilisé pour la simulation de type visqueux est illustré à la figure 1.5. Il est composé de 75.000 points. Un maillage de peau caractérisé par une taille de première maille correspondant à un  $y^+$  inférieur à l'unité a été utilisé pour capturer de manière précise la couche limite visqueuse. Le modèle de turbulence utilisé est celui de Spalart-Allmaras. Le maillage correspondant à la simulation de type non-visqueux comprend 30.000 points.

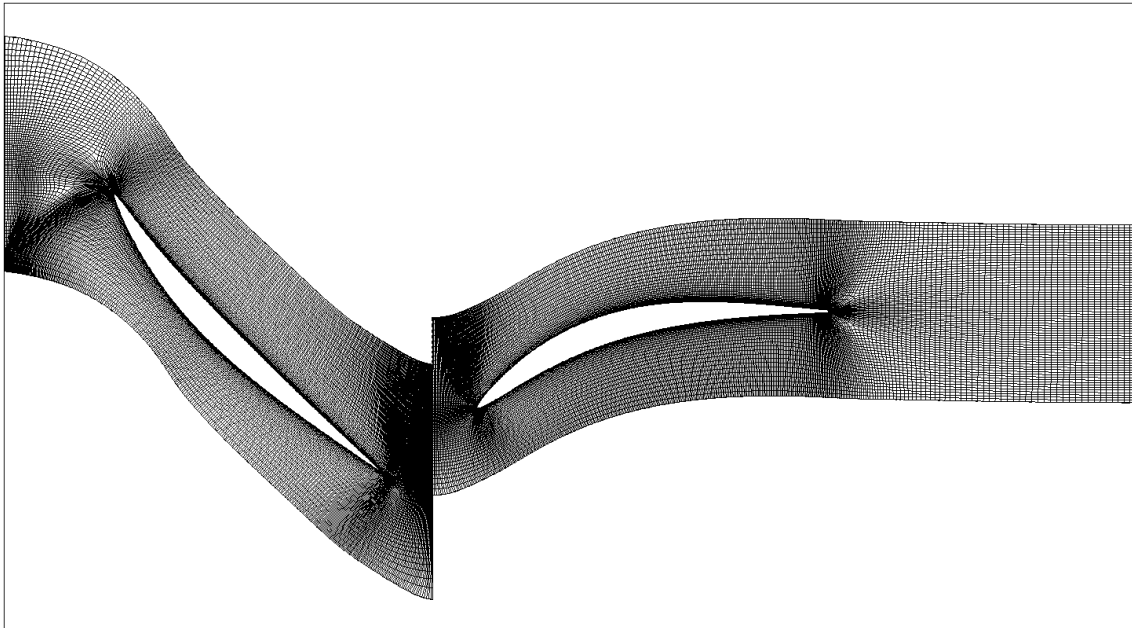


FIG. 1.5 – Maillage aube-à-aube de la section à mi-hauteur de veine

### 1.3.2 Résultats de la simulation dans le plan aube-à-aube

Les résultats des simulations de types Navier-Stokes et Euler sont présentés à la figure 1.6, en terme de nombre de Mach relatif. La figure illustre notamment l'effet potentiel devant le bord d'attaque, l'accélération du fluide côté extrados et, dans le cas de la simulation de type Navier-Stokes, les sillages.

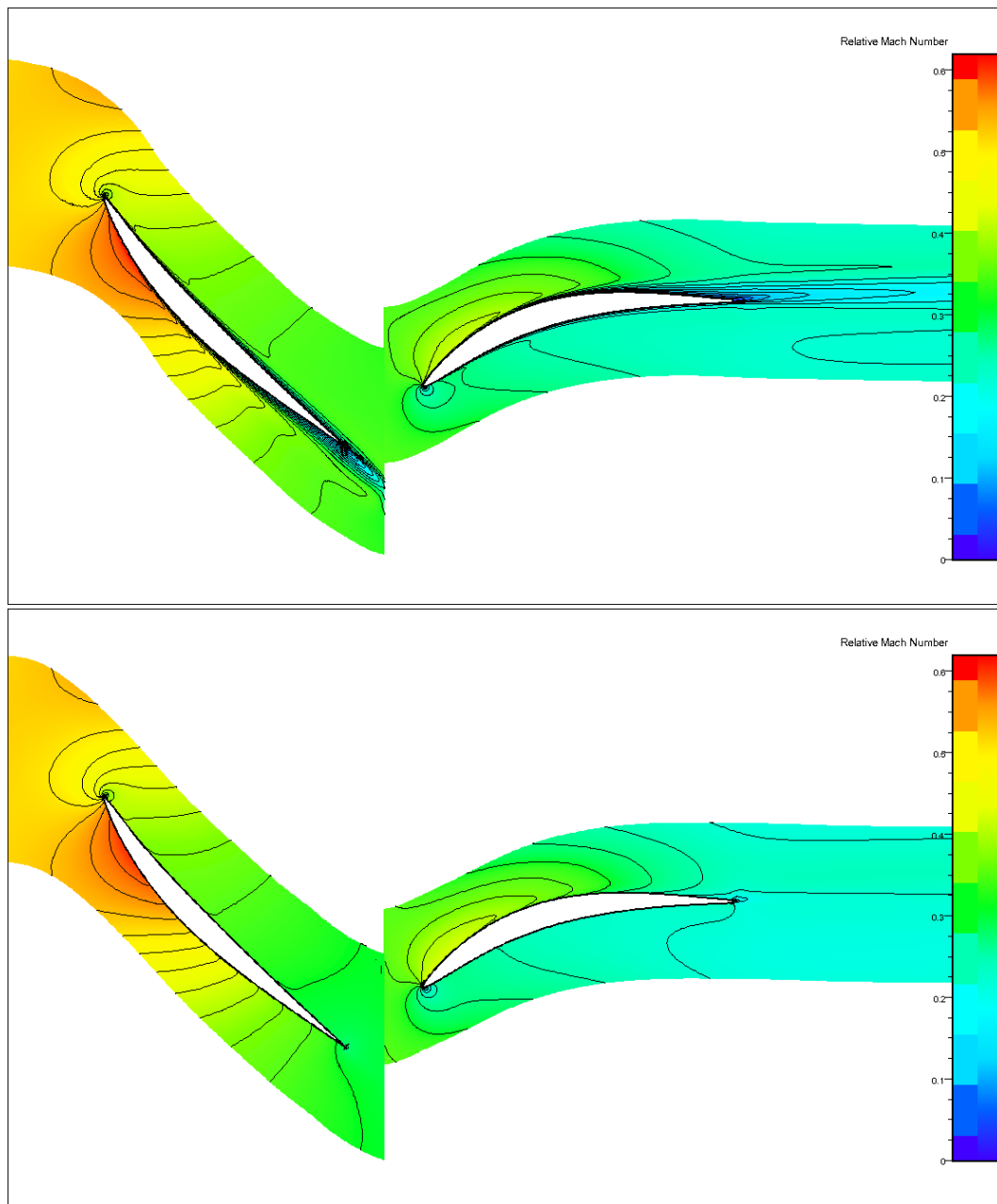


FIG. 1.6 – Nombre de Mach relatif : visqueux (haut) et non-visqueux (bas)

Inévitablement, comme la technique du plan de mélange est utilisée, les roues correspondent quasiment à des roues isolées, mais présenter un étage complet de compresseur est une manière de s'assurer une certaine généralité, en analysant deux roues avec des caractéristiques différentes (déflexion, chargement...).

### 1.3.3 L'écoulement moyenné

Nous allons, dans ce qui suit, présenter l'évolution moyenne de l'écoulement le long de la veine, ainsi que le niveau de non-uniformité. Les moyennes circumférentielles effectuées sont conformes aux expressions (1.6) et (1.8) présentées antérieurement.

En pratique, un maillage unidimensionnel (un maillage méridien) est généré le long de la veine, avec une densité plus importante aux bords d'attaque et de fuite des aubes pour capturer les évolutions rapides de l'écoulement dans ces régions. Des arcs de cercle sont ensuite générés, pour chaque nœud, par une extrusion azimutale. Les grandeurs de l'écoulement correspondant aux simulations bidimensionnelles sont ensuite interpolées sur ces nœuds par interpolation bilinéaire dans le plan aube-à-aube. La moyenne circonférentielle est alors effectuée sur ces arcs par la règle du trapèze, les perturbations étant ensuite déduites et éventuellement moyennées.

Attachons-nous à présent à l'analyse du degré de non-uniformité au sein de cet écoulement. Pour ce faire, il est nécessaire de définir un indicateur de cette non-uniformité. On a recours, pour cela, à l'énergie cinétique moyenne des perturbations azimutales<sup>8</sup>, définie en (1.12), qui contient la trace du tenseur circonférentiel.

$$\bar{k} = \frac{\overline{\rho V_r'' V_r''} + \overline{\rho V_\theta'' V_\theta''} + \overline{\rho V_z'' V_z''}}{2\bar{\rho}} \quad (1.12)$$

L'évolution de cette énergie cinétique est présentée à la figure 1.7 en pourcentage de l'énergie cinétique totale de l'écoulement. Les résultats des simulations de types Navier-Stokes et Euler sont superposés sur cette figure, même s'ils correspondent à des niveaux de chargement différents, comme le montre la figure 1.8. Néanmoins, des remarques qualitatives peuvent être faites.

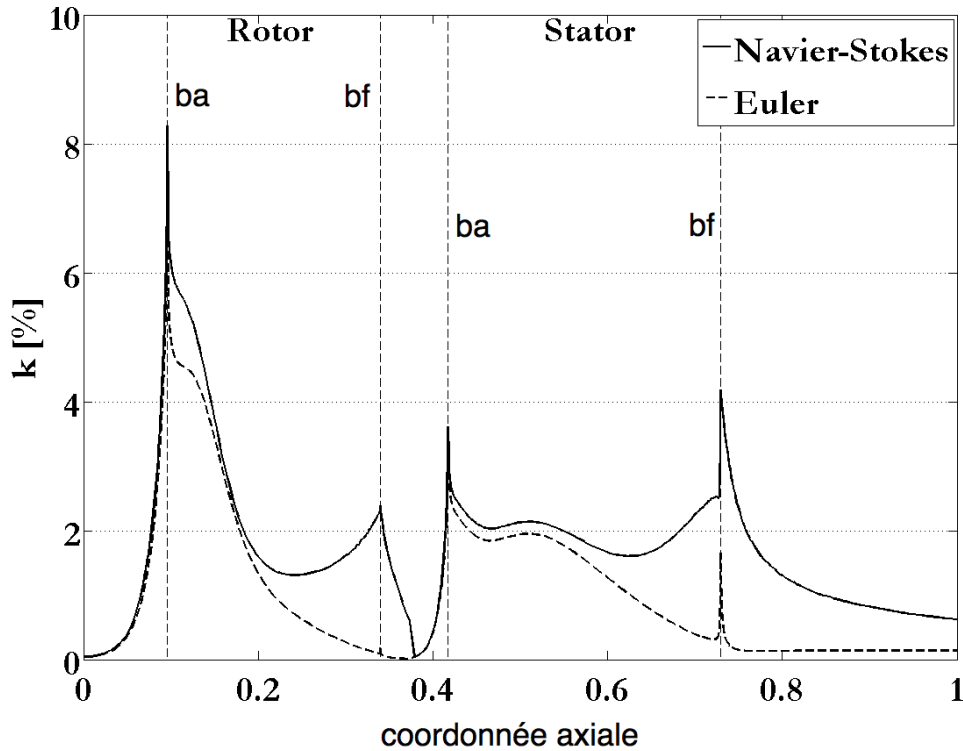


FIG. 1.7 – Evolution axiale de l'énergie cinétique moyenne des perturbations  $\bar{k}$  en pourcentage de l'énergie cinétique totale de l'écoulement : cas visqueux (trait continu), cas non-visqueux (trait discontinu)

<sup>8</sup>La vitesse radiale est conservée par souci de généralité dans cette expression, mais est nulle puisqu'il s'agit d'une simulation dans le plan aube-à-aube.

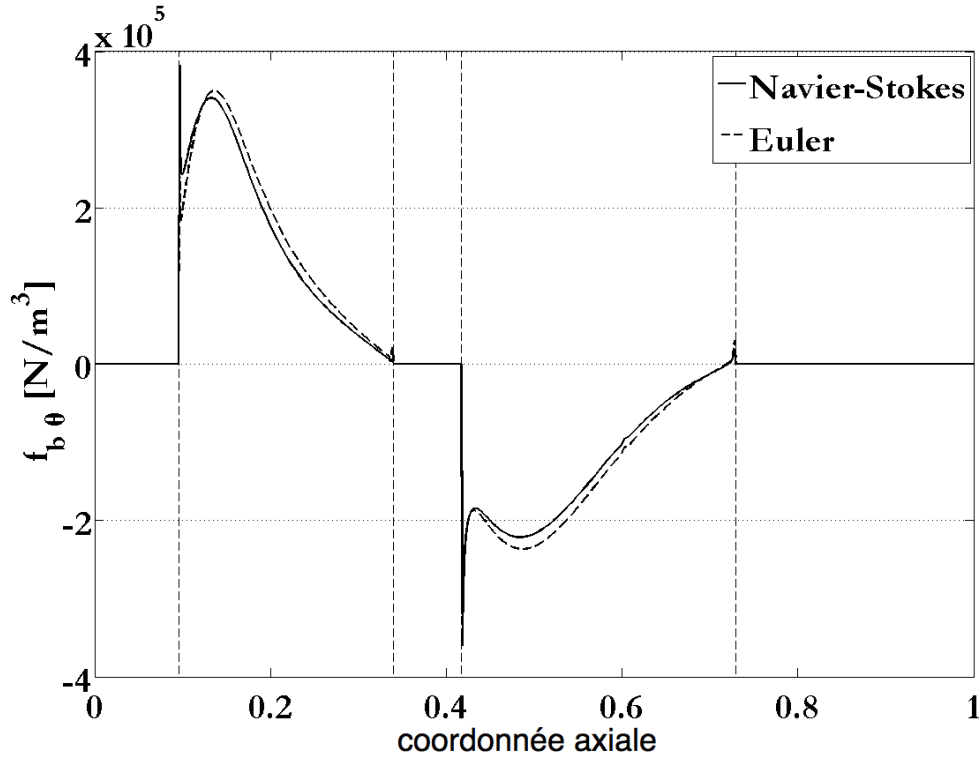


FIG. 1.8 – Evolution axiale de la partie non-visqueuse de la force : cas visqueux (trait continu), cas non-visqueux (trait discontinu).

Premièrement, un pic d'énergie cinétique est localisé au bord d'attaque du rotor (repéré par l'indication *ba* sur la figure). Cette augmentation d'énergie cinétique, qui débute avant le bord d'attaque, est un effet purement potentiel (i.e. non-visqueux) dû au contournement de l'aube. La nature non-visqueuse de ce phénomène est démontrée par l'allure de la courbe correspondant à la simulation de type Euler. Cette zone de fluctuations importantes peut être remarquée également à la figure 1.6 représentant le nombre de Mach relatif dans le plan aube-à-aube.

Deuxièmement, la zone située après le bord d'attaque est encore riche en non-uniformités. Celles-ci proviennent du chargement de l'aube, principalement situé dans cette région comme en témoigne la figure 1.8.

Les perturbations sur la seconde partie de l'aube sont principalement la conséquence de phénomènes visqueux, comme en témoigne la différence entre les deux courbes de la figure 1.7. En effet, le chargement de l'aube est moindre dans cette zone (figure 1.8) et la couche limite visqueuse se développe sur les parois de l'aube. Les perturbations augmentent ensuite jusqu'au bord de fuite (repéré par l'indication *bf* sur la figure) en même temps que l'épaisseur de la couche limite.

Au bord de fuite, un second pic est observé. Il est dû à la réorganisation locale des écoulements provenant des deux côtés de l'aube. Dans le cas non-visqueux, les perturbations décroissent rapidement pour (presque) s'annuler. Pour ce qui concerne le cas visqueux, la réorganisation de l'écoulement est suivie par une dissipation visqueuse et un sillage. Celui-ci est visible à la figure 1.6.

Notons également que la position du plan de mélange est aisément identifiable par l'absence de non-uniformité circonférentielle.

En conclusion, si la viscosité est importante pour la génération de fluctuations circonférentielles, les effets potentiels sont aussi de grands contributeurs. Cette observation montre une différence majeure entre les tensions circonférentielles et les tensions déterministes. En effet, ces dernières prennent en compte les interactions entre roues, interactions qui proviennent principalement de phénomènes agissant à longue distance (comme le sillage), qui sont majoritairement induits par la viscosité.

### 1.3.4 La simulation méridienne

Dans les codes méridiens classiques, les termes de perturbation apparaissant aux équations (1.10) et (1.11) sont négligés et pris en compte en partie par les corrélations et modèles physiques. Nous allons montrer ici quelle est leur influence, même sur un cas simplifié comme le nôtre. Pour ces simulations, aucune corrélation de perte ou de déviation ne sera utilisée, puisqu'elles comportent une certaine part, inconnue, des tensions circonférentielles résultant de la moyenne azimutale réalisée sur les résultats expérimentaux, dont les corrélations sont tirées. Ceci implique que tous les termes additionnels des équations (1.10) et (1.11) doivent être extraits de la simulation réalisée dans le plan aube-à-aube, c'est-à-dire la force des aubes, les termes sources d'énergie et les tensions circonférentielles. En pratique, ceci signifie que la pression et les tensions visqueuses agissant sur l'aube sont extraites en plus des non-uniformités circonférentielles. La formulation de la composante azimutale de la force des aubes est décrite par l'expression ci-dessous. Les expressions des autres composantes sont reprises à l'annexe A.

$$f_{b\theta} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi b} \left[ -\frac{p}{r} \right]_p^s, \quad f_{v\theta} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi b} \left[ -\tau_{z\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \tau_{r\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right]_p^s$$

Comme la simulation n'inclut ni carter ni moyeu, cela signifie qu'il n'y a pas de couche limite pariétale. De plus, le seul effet visqueux qui sera pris en compte provient de la force des aubes, aucune autre tension de cisaillement agissant dans le plan n'est incluse, ce qui est une hypothèse commune en turbomachines.

La figure 1.9 illustre les évolutions axiales du nombre de Mach absolu (expression (1.13)) et de l'entropie (expression (1.14)) obtenus par quatre calculs :

- 1) une résolution dans le plan aube-à-aube, champ de référence, moyenné par la densité
- 2) une simulation méridienne augmentée des termes non-visqueux de force des aubes et d'énergie ( $f_b, e_b$ )
- 3) une simulation méridienne augmentée des termes visqueux et non-visqueux de force des aubes et d'énergie ( $f_b, f_v, e_b, e_v$ )
- 4) une simulation méridienne incluant tous les termes additionnels, y compris les tensions circonférentielles ( $f_b, f_v, e_b, e_v, \overline{\rho V_i'' V_j''}, \overline{\rho V_j'' H''}$ )

$$\tilde{M} = \frac{\tilde{V}}{\sqrt{\gamma R \tilde{T}}} \quad (1.13)$$

$$\tilde{s} = C_p \ln(\tilde{T}) - R \ln(\tilde{P}) \quad (1.14)$$



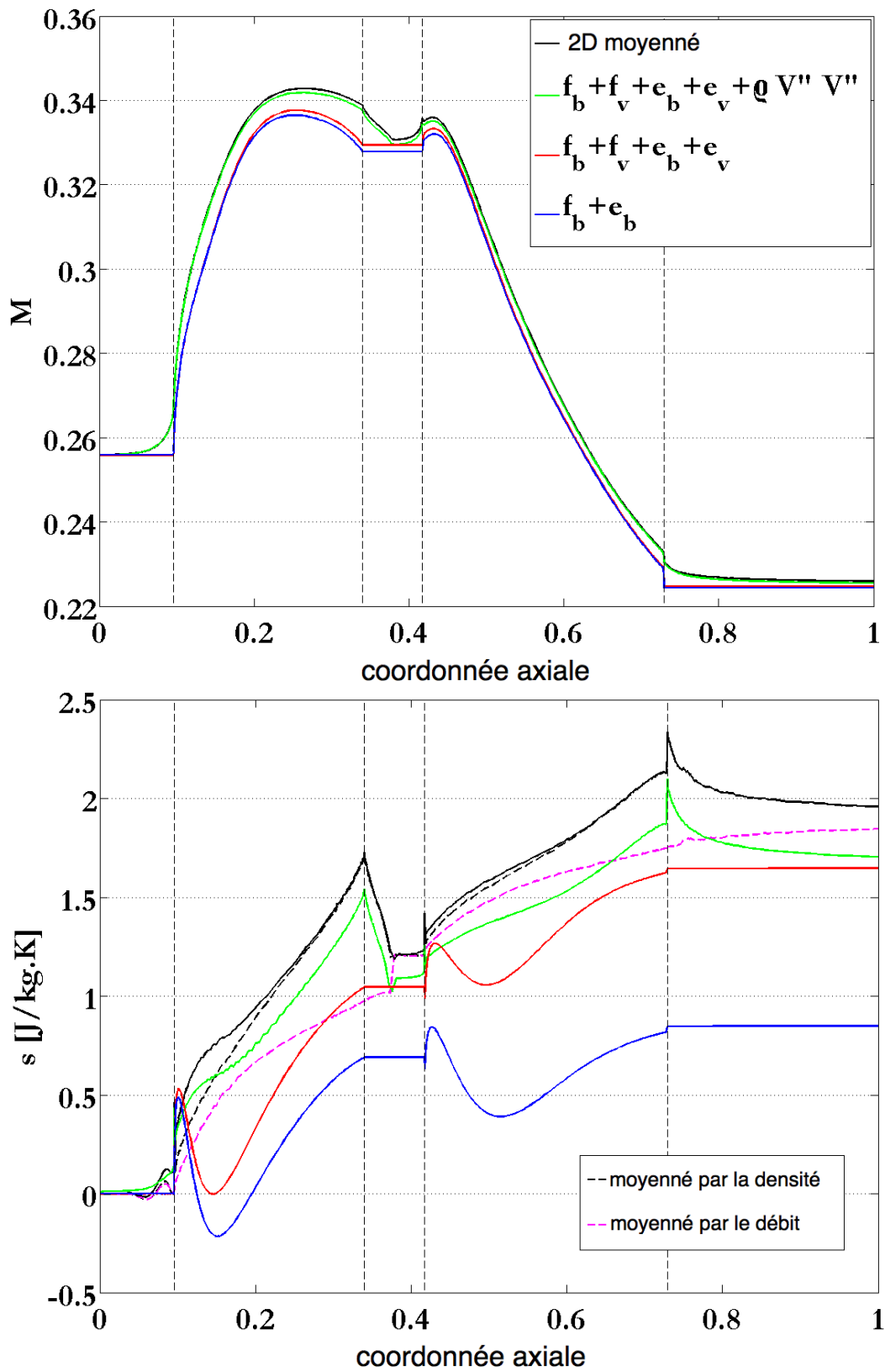


FIG. 1.9 – Evolutions axiales du nombre de Mach absolu (haut) et de l'entropie (bas) dans quatre cas : 2D moyenné par la densité (noir),  $f_b + e_b$  (bleu),  $f_b + f_v + e_b + e_v$  (rouge) and  $f_b + f_v + e_b + e_v + \rho V_i'' V_j'' + \rho V_j'' H''$  (vert)

La courbe correspondant à la moyenne de la simulation dans le plan aube-à-aube (courbe noire) consiste en fait en la prédiction que fournirait une simulation méridienne exacte. En effet, puisque cette courbe provient d'une simulation d'un ordre supérieur, elle inclut naturellement les phénomènes associés. Nous la considérerons comme notre solution de référence.

Quelques remarques peuvent être faites concernant cette figure. Les termes non-visqueux sont responsables de l'évolution générale de l'écoulement, comme nous pouvions nous y attendre puisqu'ils correspondent à l'effet principal des aubes. L'ajout des termes visqueux déplace la courbe dans le sens d'une augmentation de pertes, sans modification de forme. Pour la plupart des grandeurs de l'écoulement analysées, la dernière courbe, correspondant à l'ajout des tensions circonférentielles, permet de reproduire assez bien l'allure de la courbe de référence, en modifiant localement l'écoulement. L'évolution du nombre de Mach est représentative de cette situation. L'amélioration de la qualité de description due à ces derniers termes semble même être plus importante que celle apportée par les termes visqueux. Plus particulièrement, l'ajout des tensions circonférentielles permet de reproduire l'effet potentiel en amont des aubes, ainsi que la réorganisation de l'écoulement en aval du bord de fuite.

Concernant l'évolution de l'entropie, il est notable que la simulation d'ordre supérieur n'approche pas aussi bien la courbe de référence, même si la forme de la courbe est très similaire. Tout se passe comme si un phénomène d'amplitude progressivement croissante le long du canal inter-aubes était omis. Selon Simon [48], ce genre de comportement pourrait être expliqué par la négligence des tensions visqueuses dans le plan aube-à-aube. Une autre composante de l'explication est probablement une perte de précision lors de l'interpolation bilinéaire effectuée pour extraire les informations de la simulation bidimensionnelle.

Au niveau de l'entropie toujours, il apparaît un comportement étonnant puisque celle-ci diminue à certains endroits, en aval des aubes, violant apparemment le second principe de la thermodynamique, comme l'a remarqué Bardoux [5] précédemment. Simon [48] a ensuite expliqué mathématiquement l'origine de ce phénomène, lié au type de moyenne. En effet, pour analyser les pertes de charge et les différentes grandeurs en turbomachines, il est nécessaire de moyennner par le débit massique, non par la densité. Ainsi, une moyenne physiquement acceptable serait la suivante :

$$\tilde{\phi} = \frac{\int_p^s \rho V_n \phi \, d\theta}{\int_p^s \rho V_n \, d\theta} \quad (1.15)$$

où  $V_n$  est la norme du vecteur vitesse normal au plan de moyenne azimutale.

Dans le cas contraire, l'entropie augmente et diminue en fonction de l'évolution des non-uniformités circonférentielles. Ainsi, à la figure 1.9, l'entropie augmente jusqu'au bord de fuite, avec les non-uniformités (voir figure 1.7) pour diminuer ensuite. Ceci explique l'appellation de tensions pour ces termes additionnels (Sehra [46] les appelait tensions apparentes). En effet, tout comme les tensions visqueuses font augmenter le niveau d'entropie, ces tensions apparentes, les tensions circonférentielles, en font de même. La différence majeure est que cette augmentation d'entropie est fictive et réversible. Elle traduit en fait une perte d'énergie de l'écoulement moyen vers l'écoulement d'ordre supérieur, i.e. l'écoulement non-uniforme. Lorsque la non-uniformité disparaît, cette énergie est rendue à l'écoulement moyen, diminuant ainsi le niveau d'entropie.

Cependant, cette formulation d'entropie apparente est la seule disponible dans le système d'équation du canal moyenné d'Adamczyk. Hirsch [26] propose, pour résoudre ce problème, d'utiliser des coefficients de blocage fictif en plus du coefficient de blocage matériel représentant les aubes afin de résoudre un écoulement moyenné par le débit et non plus par la densité. Bardoux [5] quant à lui, dérive l'expression de passage des grandeurs moyennées par la densité à celles moyennées par le débit, laquelle implique la connaissance d'une corrélation supplémentaire par grandeur.

La moyenne de l'entropie par le débit est présentée à la figure 1.9 (courbe magenta) et présente effectivement une évolution monotonement croissante. Dans la suite, nous conserverons la formulation consistante avec le modèle méridien, à savoir la moyenne par la densité.

Une autre critique, soulignée également par Bardoux [5], est la différence de comportement entre la moyenne de l'entropie calculée sur base de grandeurs non-moyennées, et la reconstruction de l'entropie sur base de grandeurs moyennées. Cette différence provient de la non-linéarité de l'expression de l'entropie (1.16). Ainsi, la moyenne du logarithme d'une variable quelconque est différente du logarithme de la moyenne de cette variable. La différence est représentée à la figure 1.9, la courbe discontinue de couleur noire étant en réalité l'entropie de l'écoulement dans le plan aube-à-aube.

$$\tilde{s} = C_p \ln(\widetilde{T}) - R \ln(\widetilde{P}) \neq C_p \ln(\overline{T}) - R \ln(\overline{P}) \quad (1.16)$$

Il en est de même pour toutes les grandeurs nécessitant l'utilisation d'une expression non-linéaire pour leur reconstruction, comme le nombre de Mach, la pression totale et la température totale. Néanmoins, comme les seules informations fournies par la résolution du système méridien sont des informations moyennes, il faut se contenter de cette formulation.

Pour conclure cette section, nous avons vu que l'inclusion des termes additionnels en tant que tels fournit une qualité de prédiction de l'écoulement analogue à une simulation d'ordre supérieur, traduisant des phénomènes physiques importants. Si ceci a pu être observé sur un cas unidimensionnel, l'effet est encore davantage marqué dans une simulation méridienne complète, comme cela a été illustré par Simon [48], les tensions circonférentielles permettant de reproduire l'influence moyenne des écoulements secondaires comme le décrochage de coin ou encore le mélange radial, expliqués précédemment. Ainsi, ceci justifie l'intérêt porté à ces informations d'ordre supérieur en simulation méridienne, d'autant plus que, comme mentionné précédemment, leur importance a tendance à augmenter dans les conceptions modernes.

Le cas test utilisé ayant démontré sa valeur quant à la prise en compte des effets non-axisymétriques, nous allons le réutiliser dans le chapitre qui suit. Il va nous permettre d'aller plus en avant dans la compréhension des fluctuations spatiales, en évaluant leur caractérisation harmonique.

## Chapitre 2

# Nature harmonique des tensions circonférentielles

Le problème de la prise en compte d'effets d'un ordre supérieur ne se pose pas uniquement en modélisation méridienne. En effet, il est également présent en simulation instationnaire, au travers de la turbulence, et en simulation stationnaire tridimensionnelle par les tensions déterministes, relatives aux interactions instationnaires entre roues aubées.

Le premier à proposer une solution à ce dernier problème est Adamczyk [2]. Sa méthode consiste à calculer chaque roue séparément et à les rendre compatibles en imposant que les écoulements méridiens vus par chacune des roues soient égaux, étant donné qu'il n'existe qu'un seul écoulement méridien au sein d'une machine, contrairement au SECM qui est caractéristique d'une roue particulière.

Rhie et al [43] proposent ensuite d'utiliser des maillages recouvrant pour transférer les tensions déterministes d'une roue à l'autre. Ainsi, pour considérer les interactions de sillage d'une roue amont sur une roue aval, il étend le maillage de cette dernière, calculée explicitement, à la roue amont pour y obtenir l'information cherchée.

Perrin [41] puis Charbonnier [10]-[11] ont essayé de développer un modèle de transport, analogue à ce qui se fait en turbulence, pour calculer les tensions déterministes. Il est apparu cependant que les mécanismes physiques à l'origine du champ fluctuant et la nature même de celui-ci (réversibilité, faible création de tensions par le champ moyen), marquent des différences importantes par rapport au cas turbulent.

Par la suite, une catégorie différente de modélisations a émergé, par He [20] d'abord puis Hall [19]. Ces méthodes consistent à résoudre, dans le domaine fréquentiel, un système aux perturbations temporelles dans le cas du premier auteur mentionné, le système instationnaire complet dans le cas du second. Ces méthodes ont montré une précision et une efficacité en temps de calcul remarquables. Non seulement elles permettent d'obtenir les tensions déterministes, mais elles vont jusqu'à reproduire une approximation de l'écoulement instationnaire lui-même. Ces techniques sont classées sous la dénomination de méthodes harmoniques car elles ont recours à une décomposition de l'écoulement en série de Fourier. Nous discuterons ces méthodes plus amplement dans les chapitres suivants. Toutefois, l'hypothèse commune à toutes ces méthodes est que l'écoulement est de nature harmonique, autrement dit, qu'il peut être reconstruit efficacement par une série de Fourier tronquée.

Ainsi, pour espérer appliquer une de ces méthodes, qui ont fait leurs preuves, au cas méridien, il est impératif de vérifier la validité de cette hypothèse. Pour ce faire, nous allons analyser, dans la suite, la possibilité de reconstruire efficacement l'évolution azimuthale de l'écoulement et, en conséquence, les tensions circonférentielles. Nous investiguerons également la capacité de tensions reconstruites, et donc approchées, à reproduire les effets observés au chapitre précédent au sein d'une simulation méridienne. Pour tout ce qui suit, nous utilisons le cas test décrit précédemment.

## 2.1 L'analyse spectrale locale

Lors d'une première étape, nous étudions la possibilité de reconstruire, par une série de Fourier tronquée, l'évolution circonférentielle de l'écoulement en certaines sections caractéristiques de la roue statorique. Celles-ci sont présentées à la figure 2.1, sur une vue dans le plan aube-à-aube (coordonnées  $(z, \theta)$ ). Ces positions de coupe ont été choisies dans des régions de haut degré de non-uniformité : le bord d'attaque, le bord de fuite et le sillage.

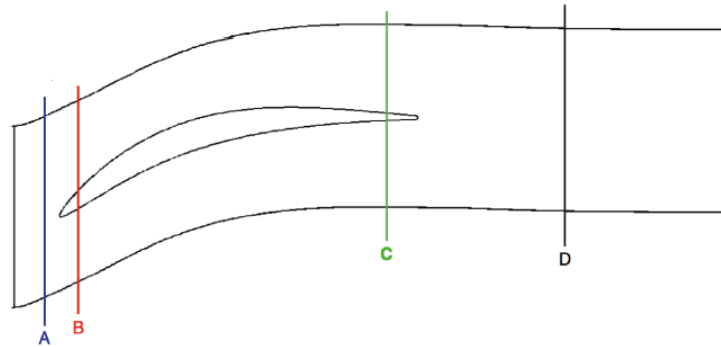


FIG. 2.1 – Sections caractéristiques

La figure 2.2 présente les perturbations circonférentielles sur les inconnues conservatives  $\rho V_z$  (haut) et  $\rho V_\theta$  (bas) aux coupes A, B, C et D. Des niveaux de non-uniformité plus élevés sont observés aux stations B et C, i.e. au sein du passage inter-aubes. C'est en accord avec la figure 1.7 illustrant l'énergie cinétique des fluctuations spatiales et avec le fait que les aubes sont les générateurs de la non-uniformité spatiale.

La différence entre ces deux stations d'une part, et les stations A et D d'autre part est notable. En effet, par suite de la condition d'arrêt à la paroi des aubes, les perturbations y sont égales à l'opposé de la valeur moyennes. Au contraire, l'écoulement à la station A est uniquement dicté par des effets potentiels alors que la station D est affectée par le sillage.

Avant de poursuivre, l'expression (2.1) rappelle le développement en série de Fourier d'une fonction quelconque  $f$  dépendant de la variable azimuthale  $\theta$ . Les coefficients  $K_n$  sont les coefficients de Fourier et les paramètres  $\omega_n$  les fréquences associées,  $\bar{f}$  désignant la valeur moyenne de la fonction.

$$f(\theta) = \bar{f} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ K_n e^{i\omega_n \theta} + K_{-n} e^{-i\omega_n \theta} \right] \quad (2.1)$$

Cette définition inclut un nombre infini de termes. Modéliser et calculer un nombre infini de coefficients est bien entendu irréalisable. La question qui va donc se poser, pour analyser la

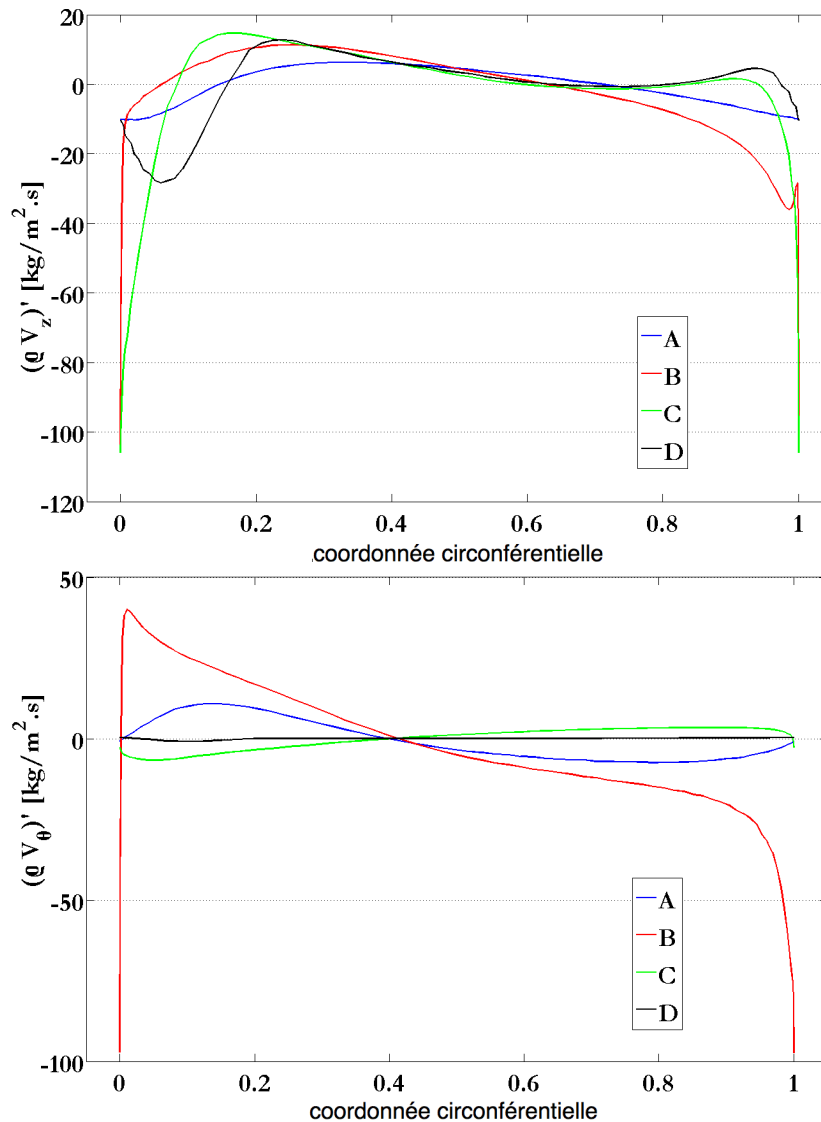


FIG. 2.2 – Perturbations circonférentielles de  $\rho V_z$  (haut) et  $\rho V_\theta$  (bas) aux sections A (bleu), B (rouge), C (vert) and D (noir).

possibilité de dériver une méthode harmonique efficace, est de déterminer combien de coefficients de Fourier il est nécessaire d'inclure dans le développement pour reproduire, de manière satisfaisante, l'évolution circonférentielle de l'écoulement.

Une série de Fourier converge vers la fonction exacte pourvu que celle-ci soit continue par morceaux et périodique. Cette dernière condition n'est pas remplie dans un passage inter-aubes, puisque les écoulements sont généralement différents sur l'extrados et l'intrados de l'aube<sup>1</sup>. Cela implique que pour décomposer une fonction en série de Fourier dans le canal inter-aubes, il est nécessaire de rendre cette fonction périodique. La difficulté principale est qu'en faisant cela, l'évolution réelle est altérée. Ainsi, un soin particulier doit être pris pour rendre cette fonction périodique en modifiant au minimum son contenu fréquentiel. Il existe

<sup>1</sup>Déplacer l'aube au milieu du domaine de calcul rendrait celui-ci périodique mais introduirait une zone de discontinuité et d'absence d'écoulement. Nous incorporons donc cette configuration à la classe de problèmes que nous appelons non-périodiques.

de nombreuses manières de prolonger une fonction. Deux possibilités sont envisagées ci-après.

Une prolongation linéaire est utilisée en cas de simulation de type visqueux. Du fait de la couche limite visqueuse se développant sur les deux faces de l'aube, l'évolution des variables conservatives est presque périodique<sup>2</sup> (voir figure 2.2), avec des variations rapides aux deux extrémités du domaine circonférentiel. Ainsi, il est suffisant d'ajouter une courte portion de courbe pour rendre le signal périodique de manière douce. Le résultat est présenté à la figure 2.3.

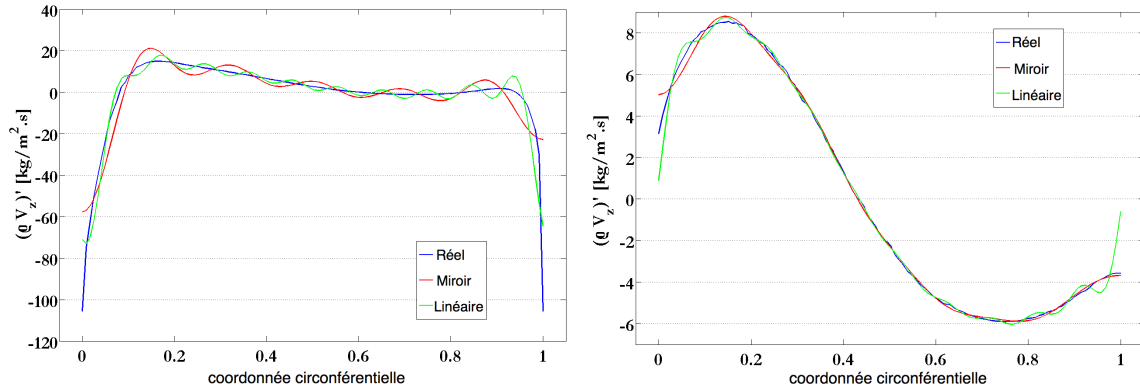


FIG. 2.3 – Reconstruction harmonique des évolutions circonférentielles de  $(\rho V_z)'$  avec 10 modes dans le cas visqueux (gauche) et non-visqueux (droite). Fonction réelle (bleu), série de Fourier avec prolongations miroir (rouge) et linéaire (vert).

Pour les simulations de type non-visqueux, cette prolongation est trop brutale et mène à des oscillations non physiques et à une distorsion du signal (voir figure 2.3). La solution est de prolonger la fonction par symétrie miroir. Comme le signal est prolongé par lui-même, une variation douce est obtenue et ne produit pas de parasitage du contenu fréquentiel<sup>3</sup> (voir figure 2.3).

Dans la suite, la prolongation linéaire sera utilisée systématiquement pour les résultats de la simulation de type Navier-Stokes, tandis qu'une extension symétrique sera effectuée pour le type Euler. D'autres méthodes telles que des prolongations par des fonctions polynomiales auraient pu être envisagées, mais elles auraient perturbé la partie du spectre fréquentiel relatif aux basses fréquences en ajoutant leur propre contribution (Callot [8]).

La figure 2.4, que nous appellerons spectre fréquentiel, illustre le logarithme de la valeur absolue des coefficients de Fourier normés par la valeur du premier pour les variables  $(\rho V_z)'$  (haut) et  $(\rho V_\theta)'$  (bas). La station A se révèle assez pauvre en terme de contenu spectral, ce qui était attendu puisque cette région est dominée par des effets potentiels, de longueur caractéristique importante. Ce genre de comportement apparaît aussi à la station D, laquelle se situe dans le sillage. Ainsi, la même conclusion est valable pour les effets visqueux et non-visqueux hors du canal inter-aubes, témoignant d'un contenu fréquentiel limité hors des aubes. En ce qui concerne la partie droite du spectre pour ces deux stations, les termes de haute

<sup>2</sup>En réalité, les évolutions des variables  $(\rho V_z)'$  et  $(\rho V_\theta)'$  sont périodiques, du fait de la condition de non-glissement à la paroi, mais il n'en est pas de même pour les deux autres variables conservatives  $\rho'$  et  $(\rho E)'$ .

<sup>3</sup>Pour les simulations de type visqueux, cette extension n'est pas efficace car cela équivaut à doubler un signal "presque" périodique, ce qui rend une moitié d'harmoniques "presque" inutile, menant ainsi à une convergence plus lente (voir figure 2.3).

fréquence et de faible amplitude sont probablement du bruit, conséquence de l'interpolation bilinéaire effectuée lors de l'extraction d'information de la simulation dans le plan aube-à-aube.

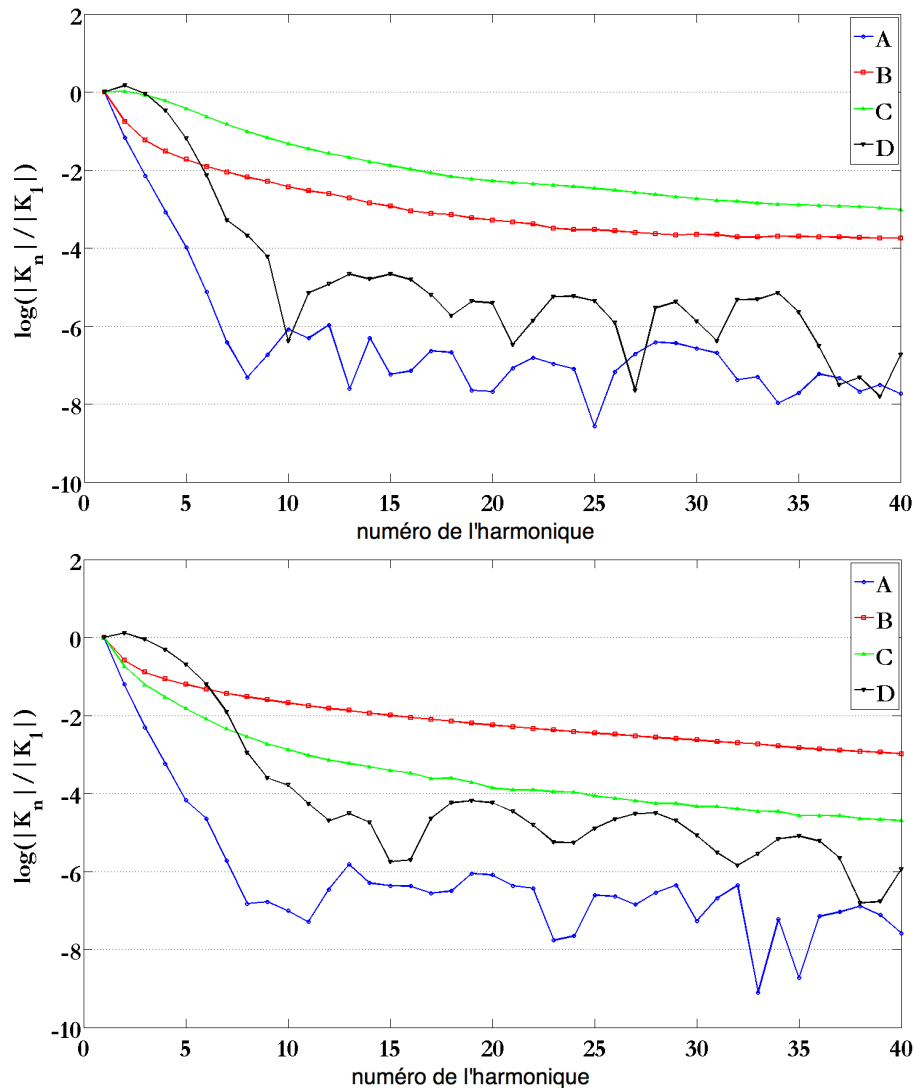


FIG. 2.4 – Spectre fréquentiel de  $(\rho V_z)'$  (haut) and  $(\rho V_\theta)'$  (bas) aux stations A (bleu), B (rouge), C (vert) and D (noir)

Par contre, les stations B et C sont riches en contenu fréquentiel. La décroissance des coefficients de Fourier est lente, ce qui démontre que des phénomènes de haute fréquence sont présents dans cette région. Ces deux positions correspondent au domaine inter-aubes, l'une près du bord d'attaque (station B) et l'autre près du bord de fuite (station C). Ainsi, elles impliquent toutes deux une couche limite visqueuse, qui correspond à un faible niveau de décroissance des coefficients de Fourier.

Il est à noter aussi, par la comparaison des spectres correspondant à  $(\rho V_z)'$  et  $(\rho V_\theta)'$  que la convergence est différente selon la variable considérée. Par exemple, le taux de décroissance des coefficients de Fourier à la station B est plus élevé pour  $(\rho V_z)'$  que  $(\rho V_\theta)'$ . Le comportement opposé est illustré à la station C. Ceci signifie que, bien qu'une convergence uniforme puisse être espérée, le niveau de celle-ci variera probablement pour les différentes grandeurs



de l'écoulement, selon la convergence caractéristique de la tension circonférentielle la plus influente pour chacune.

Cet exemple illustre une différence importante entre les régions inter-aubes et hors aubes, indiquant le besoin d'une reconstruction plus coûteuse dans la zone aubée, comprenant des longueurs caractéristiques plus faibles. Ces observations tendent à affirmer qu'il est nécessaire d'inclure un nombre trop important de coefficients de Fourier pour obtenir une méthode harmonique efficace. Cependant, notre objectif n'est pas de reconstruire avec exactitude les évolutions les plus brutales de l'écoulement, mais bien d'obtenir le niveau moyen de non-uniformité qui permettra de reproduire les phénomènes d'ordre supérieur au sein d'une simulation méridienne. Ceci fait l'objet de la section suivante.

## 2.2 La reconstruction harmonique

Cette section est consacrée à l'analyse de la difficulté à reconstruire les tensions circonférentielles, caractérisées par un spectre fréquentiel étendu, en particulier dans les régions aubées. Pour ce faire, les évolutions azimutales des variables conservatives sont reconstruites par série de Fourier, pour un nombre variable de modes. La qualité de reproduction des non-uniformités sera envisagée dans les cas visqueux comme non-visqueux.

La figure 2.5 représente l'énergie cinétique des non-uniformités circonférentielles moyennes associée à des champs fictifs approchant l'écoulement réel par reconstruction harmonique pour 1, 3, 5, 10, 20 et 50 modes.

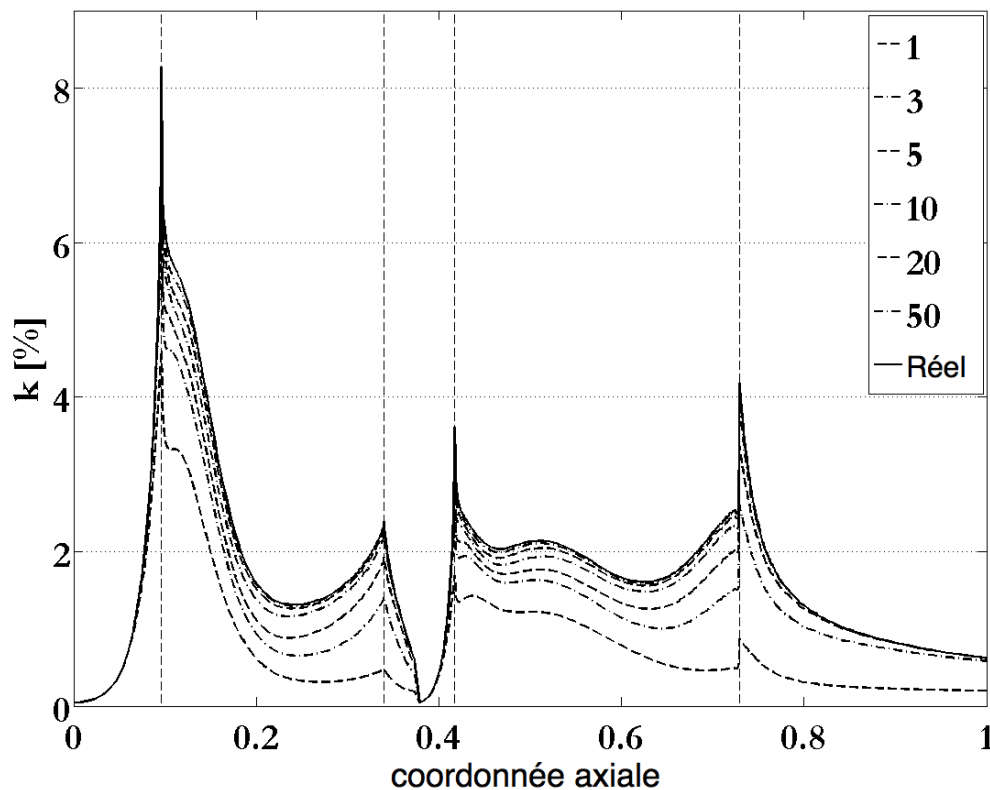


FIG. 2.5 – Energie cinétique de l'écoulement reconstruit avec 1, 3, 5, 10, 20 et 50 modes (trait discontinu) comparé à l'écoulement réel (trait continu).

L'évolution du niveau d'énergie cinétique reproduit en fonction du nombre d'harmoniques montre une convergence uniforme, chaque courbe incluant davantage de modes étant plus proche de la courbe exacte que la précédente. Il s'agit là d'une conséquence des propriétés de convergence d'une série de Fourier. De plus, il apparaît que, dès les premiers modes, l'évolution générale des non-uniformités le long de la veine est similaire à celle de la courbe exacte. Il s'agit là d'une observation importante. En effet, nous l'avons vu aux équations (1.9) à (1.11) décrivant le modèle méridien, les tensions n'apparaissent pas directement dans ces équations, mais bien leur dérivée. Ainsi, si l'allure de la courbe présente les bonnes caractéristiques locales relatives, il est à attendre que les dérivées seront cohérentes.

La figure 2.5 témoigne aussi d'une convergence rapide pour les premiers modes. De plus, le contenu spatial hors des aubes est reproduit avec 5 modes, ce qui est cohérent avec l'analyse spectrale faite précédemment. Sachant que les tensions déterministes sont en partie caractérisées par de telles évolutions circonférentielles, ceci explique pourquoi un faible nombre d'harmoniques est suffisant pour prendre en compte les interactions entre roues.

La figure 2.6 illustre le rapport de l'énergie cinétique associée aux champs reconstruits à l'énergie cinétique du champ exact, une valeur de 100 % signifiant une reproduction parfaite. Il est frappant qu'à l'intérieur du canal inter-aubes, la reconstruction est plus coûteuse. La question à se poser est de savoir s'il est possible de tronquer la série de Fourier à un nombre de modes raisonnable.

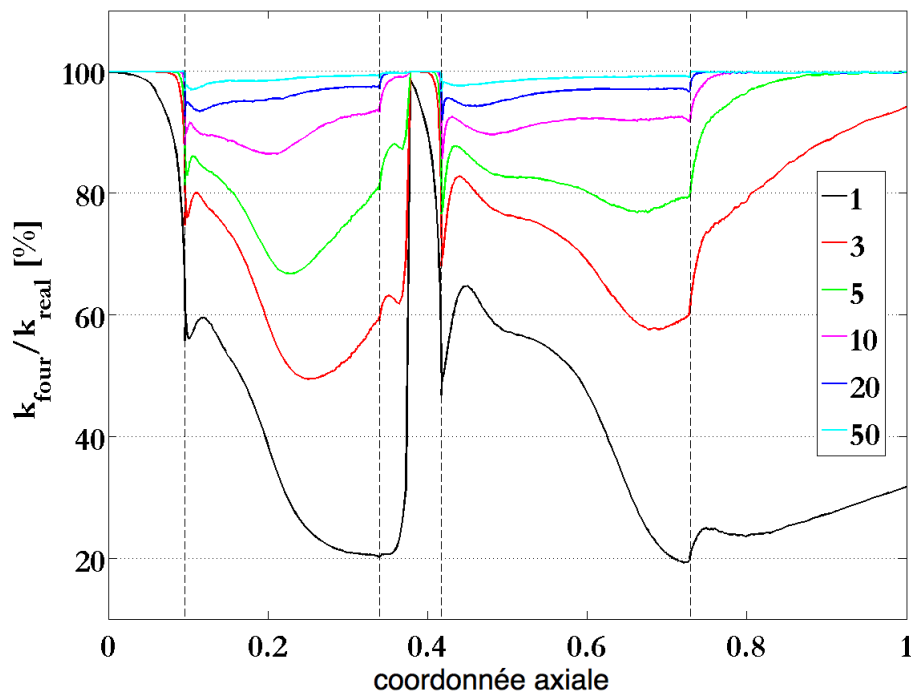


FIG. 2.6 – Rapport des énergies cinétiques de l'écoulement reconstruit à l'écoulement réel en fonction du nombre de modes de Fourier.

A l'examen de la figure 2.6 une différence de comportement apparaît, au niveau du passage inter-aubes, entre les régions proches du bord d'attaque et du bord de fuite. En effet, dans la première moitié de la zone aubée, près du bord d'attaque, le niveau de précision atteint avec peu d'harmoniques est vite acceptable. Ainsi, 5 modes reprennent 80% du niveau moyen de non-uniformité. Par contre, pour des nombres plus élevés de modes, la précision augmente

difficilement. La seconde moitié de la zone aubée présente le comportement inverse. Pour un faible nombre d'harmoniques, le niveau d'erreur est important. Celui-ci décroît cependant très rapidement avec le nombre de modes inclus. Il est même notable que la précision, dès 10 modes, est meilleure sur la deuxième partie de l'aube que sur la première.

Ces types de comportements sont explicables par le résultat suivant. Selon Orszag [39], le nombre de modes de Fourier nécessaire pour reproduire l'évolution d'un écoulement comprenant une couche limite d'épaisseur  $\epsilon$  est proportionnel à  $1/\sqrt{\epsilon}$ .

Sur la première moitié de l'aube, la couche limite est fine. Il est donc nécessaire, pour la reproduire, d'inclure un nombre élevé d'harmoniques, ce qui explique la convergence lente au-delà de 80 %. Pour des nombres plus faibles de modes, lesquels correspondent à des longueurs caractéristiques plus grandes que celles de la couche limite, cette dernière n'est pas capturée. Cependant, comme la couche limite est fine, elle constitue un phénomène très localisé, qui ne génère pas énormément de non-uniformité moyenne. Ainsi, il suffit de capter les phénomènes potentiels, qui conduisent à une précision élevée avec peu de modes et d'inclure quelques harmoniques plus élevées pour atteindre le niveau souhaité.

Sur la deuxième partie de l'aube, la couche limite visqueuse s'est développée, devenant d'une épaisseur plus importante. Elle ne peut dès lors plus être considérée comme un phénomène local et génère davantage de non-uniformité moyenne. Ainsi, comme les premiers modes de Fourier ne sont pas capables de reproduire cette couche limite, la précision est faible. Par contre, étant donné que la couche limite est plus épaisse, une augmentation du nombre d'harmoniques permet une capture rapide du phénomène, expliquant la convergence plus rapide pour la deuxième partie de l'aube.

De cet exemple, nous pouvons conclure qu'aussi bien pour la partie avant de l'aube, présentant un comportement principalement non-visqueux, que pour la zone proche du bord de fuite, présentant une couche limite plus épaisse, un nombre de modes de Fourier limité permet de reproduire, avec une précision suffisante, la non-uniformité moyenne.

Enfin, la figure 2.7 résume la même procédure dans le cas non-visqueux, pour 1, 2, 3 et 10 harmoniques.

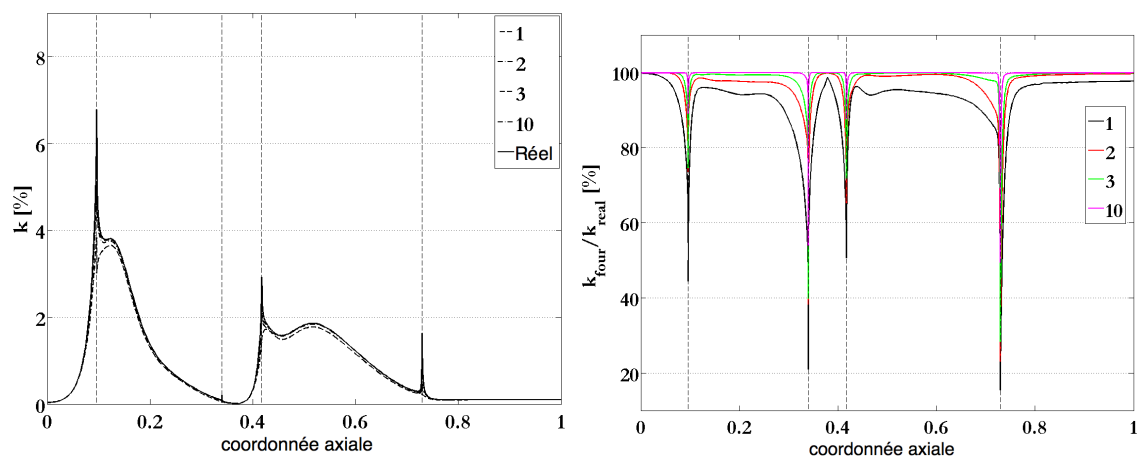


FIG. 2.7 – Energie cinétique de l'écoulement reconstruit avec 1, 3, 5, 10, 20 et 50 modes (trait discontinu) comparé à l'écoulement réel (trait continu) à gauche et rapport des énergies cinétiques de l'écoulement reconstruit à l'écoulement réel à droite.

Dans ce cas, l'écoulement est caractérisé par des longueurs caractéristiques importantes. C'est pourquoi la convergence est si rapide, 3 modes fournissant une précision d'environ 95 % sur la plupart du domaine.

Ce dernier exemple confirme la séparation du spectre fréquentiel en deux régions : la première, contenant environ 3 modes, correspond aux effets potentiels et à près de 70 % du niveau de non-uniformité moyenne et la seconde aux phénomènes visqueux localisés.

Ces analyses apportent la preuve qu'il est possible de reproduire, avec une précision raisonnable, le niveau de non-uniformité moyenne au sein de l'étage de compresseur par une série de Fourier tronquée. La dernière étape, avant de pouvoir affirmer qu'une reconstruction harmonique est adaptée aux tensions circonférentielles, est d'étudier l'impact de tensions reconstruites, i.e. approchées, dans une simulation méridienne. Ceci fait l'objet de la section suivante.

## 2.3 La fermeture harmonique du throughflow

Divers écoulements fictifs ont été reproduits par reconstruction harmonique. A chacun sont associées des tensions circonférentielles. Celles-ci vont être introduites dans une simulation méridienne, selon la procédure décrite au chapitre précédent. Ceci a pour but de vérifier la capacité de ces tensions approchées à reproduire les phénomènes physiques observés précédemment.

La figure 2.8 illustre les évolutions axiales du nombre de Mach absolu (haut) et de l'entropie (bas) de l'écoulement moyen pour plusieurs qualités de reconstruction harmonique, au travers des courbes en trait discontinu. La courbe bleue correspond à une simulation méridienne augmentée de la force des aubes et des termes sources d'énergie. La courbe rouge est le résultat d'une simulation méridienne comprenant tous les termes additionnels, i.e. également les tensions circonférentielles exactes.

Cette figure confirme que quelques modes sont suffisants pour reproduire l'adaptation de l'écoulement au bord d'attaque de l'aube. Comme attendu, la convergence dans la zone aubée est plus lente. Néanmoins, il apparaît que chaque courbe correspondant à un nombre de modes plus élevé se rapproche de la courbe exacte, la forme générale se transformant progressivement vers l'évolution réelle, traduisant une convergence de forme monotone. Notons au passage que, comme observé précédemment, la convergence est plus élevée pour les premiers modes.

Pour quantifier de manière objective le niveau de précision sur le champ capturé, un opérateur de calcul d'erreur relative moyenne est utilisé. Il est décrit par l'expression (2.2). Dans cette expression,  $\phi_{100}$  représente une variable quelconque résultant d'une simulation méridienne augmentée des termes additionnels visqueux et non-visqueux.  $\phi_0$  est son équivalent calculé avec ajout des tensions circonférentielles exactes et  $\phi$  est la même variable correspondant à des tensions reconstruites. L'erreur est calculée sur un échantillon de  $S$  nœuds axiaux reprenant le maillage méridien de la veine entière.

$$\text{erreur} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^S (\phi^k - \phi_0^k)^2}{\sum_{k=1}^S (\phi_{100}^k - \phi_0^k)^2}} \quad (2.2)$$

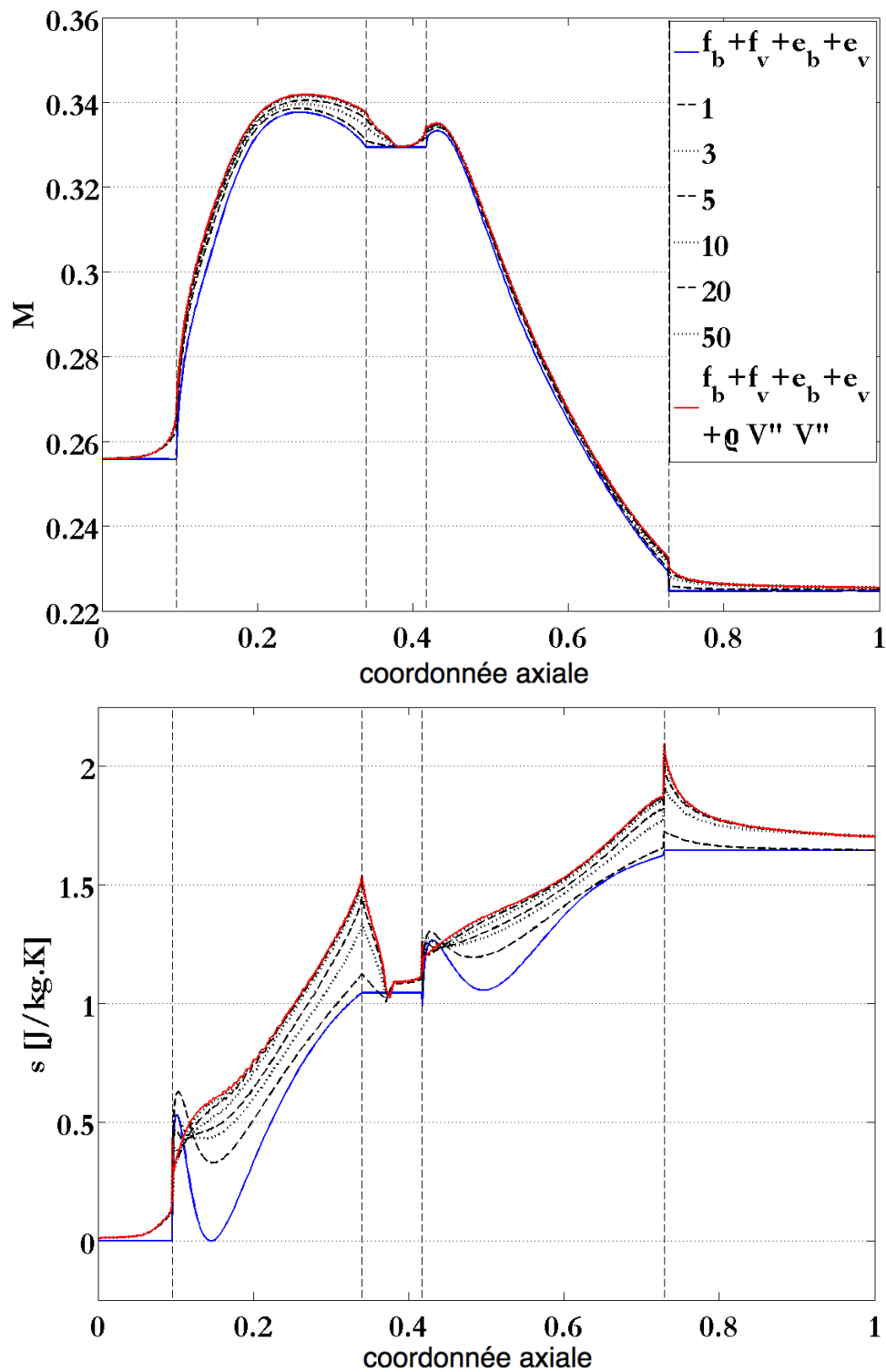


FIG. 2.8 – Evolution axiale du nombre de Mach (haut) et de l'entropie (bas). Les courbes intermédiaires correspondant à 1, 3, 5, 10, 20 et 50 harmoniques utilisées pour reconstruire le champ.

L'erreur relative résultante est illustrée à la figure 2.9 pour quelques grandeurs de l'écoulement.

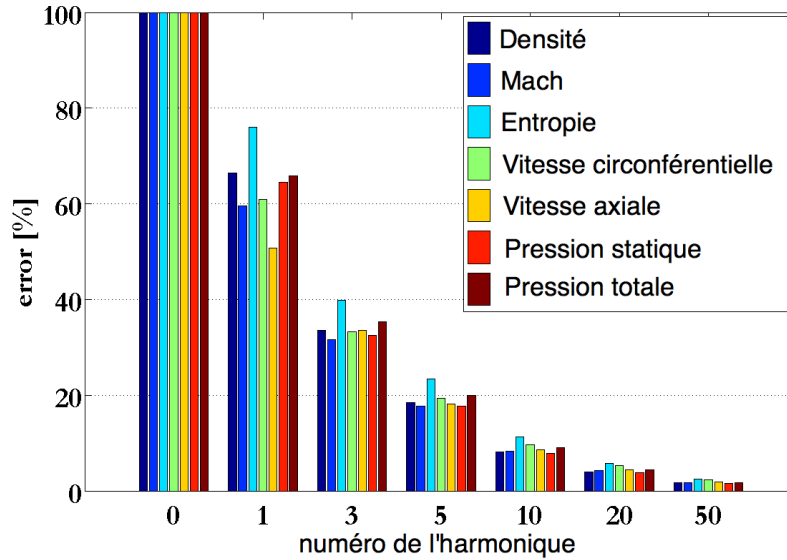


FIG. 2.9 – Erreur relative sur quelques grandeurs résultant d'une simulation méridienne augmentée de  $f_b+f_v+e_b+e_v$  et des tensions circonférentielles reconstruites avec 0, 1, 3, 5, 10, 20 et 50 modes.

Il apparaît clairement la confirmation de la convergence uniforme. Cette figure montre aussi la différence de sensibilité des variables par rapport au nombre d'harmoniques utilisées pour reconstruire l'écoulement. Cet effet a probablement deux origines. Premièrement, étant donné que les grandeurs sont reconstruites par différentes combinaisons des variables conservatives, les combinaisons d'approximation diffèrent aussi. La deuxième origine est à mettre en relation avec des niveaux différents de convergence des variables conservatives (voir figure 2.4), comme mentionné précédemment. De là, les composantes du tenseur circonférentiel n'ont pas la même qualité d'approximation. Ceci se transmet aux grandeurs de l'écoulement, selon la composante la plus influente sur chacune. Néanmoins, il est raisonnable d'affirmer que toutes les variables ont un niveau comparable d'erreur relative. Ceci signifie que, si l'on consent à utiliser un nombre plus élevé d'harmoniques et à en payer le prix, il est certain, d'une part, que la solution sera plus précise et, d'autre part, qu'elle le sera pour toutes les grandeurs d'intérêt, récompensant l'ajout de chaque mode.

Enfin, il est légitime de se poser la question de la généralité de ces résultats. Selon nous, une réponse positive ne peut pas être très éloignée de la réalité pour la raison suivante. Deux échelles de longueurs caractéristiques ont été envisagées : des longueurs importantes associées aux effets potentiels et des longueurs très faibles correspondant aux couches limites visqueuses. De là, le spectre fréquentiel du cas analysé couvre la plupart des sources de non-uniformité non envisagées (mélange radial, décrochage de coin, recirculation de jeu...), à l'exception peut-être des chocs pour lesquels rien ne peut être conclu à ce stade.

Sur base de cette analyse, nous pouvons affirmer que les tensions circonférentielles présentent une nature harmonique, c'est-à-dire qu'elles peuvent être reproduites sur base d'une série de Fourier tronquée. Ainsi, l'hypothèse principale des méthodes harmoniques est véri-

fiée, même s'il est vrai, la reconstruction sera probablement plus coûteuse que dans le cas instationnaire. Il reste un point à soulever. Au cours de nos analyses, nous avons toujours supposé connaître de manière exacte les autres termes additionnels, à savoir la force des aubes et les termes sources d'énergie. Dans la pratique, à moins de procéder systématiquement à une simulation tridimensionnelle, ce qui est à l'opposé de notre objectif, ce ne sera pas le cas. Cependant, dans la suite, nous considérerons que la modélisation de la force des aubes constitue, vu son ampleur, un domaine de recherche différent et continuerons, pour cette raison, à extraire la force des aubes d'une simulation d'ordre supérieur.

La suite de cet exposé est consacré à la dérivation du système d'équations aux perturbations spatiales qui nous permettra d'accéder aux tensions circonférentielles.

## Chapitre 3

# Vers une résolution harmonique non-linéaire

Le chapitre précédent a permis de montrer qu’une décomposition harmonique circonferentielle était adaptée, laissant la possibilité de recourir à une des méthodes harmoniques pour résoudre le problème de fermeture. Ces deux grandes catégories de méthode harmonique proviennent de deux auteurs : Li He [20] et Kenneth Hall [19]. Les méthodes associées sont respectivement “la méthode harmonique non-linéaire” (*Nonlinear Harmonic Method*) et “l’équilibre harmonique non-linéaire” (*Nonlinear Harmonic Balance*).

L’objectif principal de ces deux méthodes est la résolution approchée d’un écoulement instationnaire. En effet, à l’origine, ces deux auteurs ont souhaité développer une méthode efficace permettant d’étudier le phénomène de flottement, notamment des aubes de turbomachine. Le principe est de transformer le système d’équations instationnaires en un système d’équations stationnaires par un passage dans le domaine fréquentiel, utilisant la relation temps/fréquence fournie par la transformation de Fourier. Ainsi, en résolvant plusieurs modes spatiaux de Fourier par une série de simulations stationnaires, il est ensuite possible, par la transformation inverse de Fourier, de reconstruire l’information temporelle de manière approchée.

Ainsi, bien qu’ayant un objectif distinct, ces méthodes répondent aux besoins de modélisation des interactions rotor-stator puisqu’elles offrent la possibilité à un code de calcul tridimensionnel stationnaire de se fournir, de manière autonome, une information d’ordre supérieur, résolvant ainsi le problème de fermeture. En pratique, ces méthodes ayant la capacité d’offrir davantage que la simple fermeture, elles ont été adaptées aux machines tournantes multi-étages pour fournir une description instationnaire de l’écoulement, à moindre coût.

En ce qui nous concerne cependant, nous verrons ces méthodes, du moins dans un premier temps, comme un moyen d’accéder à la moyenne des perturbations d’ordre supérieur uniquement, nous limitant à la fermeture du système étudié.

Dans une première partie de ce chapitre, nous allons détailler la méthode de Hall. Nous proposerons ensuite une étude de l’applicabilité de celle-ci au cas qui nous intéresse : la fermeture du modèle méridien. La méthode de He quant à elle, fera l’objet du chapitre suivant.



### 3.1 La méthode de l'équilibre harmonique non-linéaire

La résolution d'un problème de flottement nécessite une vision instationnaire de l'écoulement. Pour ce faire, il existe deux possibilités. La première est de recourir à une simulation instationnaire en elle-même. Ceci a l'avantage de reproduire aussi bien les perturbations linéaires que non-linéaires, ne posant aucune hypothèse à ce sujet. En revanche, l'inconvénient majeur est que, pour obtenir à la fois une résolution stable et précise, les conditions à remplir sur le pas de temps entraînent des temps de calcul trop importants.

La deuxième possibilité est de recourir aux méthodes de résolution fréquentielle. La plupart de celles-ci ne résolvent cependant qu'un système linéarisé, limitant la gamme de perturbations reproductibles. L'avantage majeur est par contre de pouvoir utiliser un code de calcul stationnaire et de profiter de ses caractéristiques d'accélération de la résolution (pas de temps local, lissage des résidus), du fait qu'il n'est pas nécessaire d'obtenir une résolution temporelle précise.

Hall a souhaité profiter des avantages de chacune, à savoir les techniques d'accélération d'une résolution stationnaire et la reproduction des perturbations de tout type d'une méthode non-linéaire.

Pour expliquer cette méthode, nous supposerons un écoulement bidimensionnel, dans le plan  $(x, y)$ , non-visqueux et non conducteur. Nous utiliserons donc les équations d'Euler instationnaires, reprises ci-dessous<sup>1</sup>.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

Les vecteurs des inconnues conservatives  $\mathbf{U}$  et des flux  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$  sont donnés par l'expression (3.2). Il y apparaît la densité  $\rho$ , les deux composantes de vitesse  $u$  et  $v$ , la pression statique  $p$ , l'énergie totale  $E$  et l'enthalpie totale  $H$ .

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u H \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v H \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Ensuite, Hall suppose que l'écoulement est périodique dans le temps, de période  $T$ . De ce fait, il remplit les conditions pour être décomposé en série de Fourier.

$$\begin{aligned} \rho(x, y, t) &= \sum_n \rho_n(x, y) e^{i\omega_n t} \\ \rho u(x, y, t) &= \sum_n (\rho u)_n(x, y) e^{i\omega_n t} \\ \rho v(x, y, t) &= \sum_n (\rho v)_n(x, y) e^{i\omega_n t} \\ \rho E(x, y, t) &= \sum_n (\rho E)_n(x, y) e^{i\omega_n t} \end{aligned} \quad (3.3)$$

<sup>1</sup>Cette méthode est cependant applicable aux équations tridimensionnelles instationnaires visqueuses

Ainsi, par la décomposition en série de Fourier, la variable temporelle  $t$  a été séparée des variables spatiales  $(x, y)$ . La somme sur l'indice  $n$  est tronquée à un nombre fini de termes  $-N \leq n \leq N$ . L'expression réduite sous forme matricielle est donnée par (3.4).

$$\mathbf{U}(x, y, t) = \sum_n \mathbf{U}_n(x, y) e^{i\omega_n t} \quad (3.4)$$

Comme le vecteur des inconnues conservatives est réel, les coefficients de Fourier correspondant aux indices  $i$  et  $-i$  sont complexes conjugués. L'expression (3.4) peut alors être simplifiée et réécrite sous la forme (3.5).

$$\mathbf{U}(x, y, t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{n=1}^N [\mathbf{a}_n(x, y) \cos \omega_n t + \mathbf{b}_n(x, y) \sin \omega_n t] \quad (3.5)$$

Les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  sont des coefficients réels. Pour un total de  $N$  modes, ils sont au nombre de  $2N+1$ . Un développement analogue est envisageable pour les vecteurs de flux.

$$\mathbf{F}(x, y, t) = \mathbf{c}_0 + \sum_{n=1}^N [\mathbf{c}_n(x, y) \cos \omega_n t + \mathbf{d}_n(x, y) \sin \omega_n t] \quad (3.6)$$

$$\mathbf{G}(x, y, t) = \mathbf{e}_0 + \sum_{n=1}^N [\mathbf{e}_n(x, y) \cos \omega_n t + \mathbf{f}_n(x, y) \sin \omega_n t] \quad (3.7)$$

Substituant ces développements dans l'équation (3.1), l'expression suivante est obtenue.

$$\sum_{n=0}^N \left[ \left( \mathbf{b}_n \omega_n + \frac{\partial \mathbf{c}_n}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial y} \right) \cos(\omega_n t) + \left( -\mathbf{a}_n \omega_n + \frac{\partial \mathbf{d}_n}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial y} \right) \sin(\omega_n t) \right] = 0 \quad (3.8)$$

Le système (3.8) étant homogène et les fonctions propres de Fourier  $\cos(\omega_n t)$  et  $\sin(\omega_n t)$  étant orthogonales, il en résulte que les coefficients de celles-ci doivent s'annuler. Le système d'équations suivant en découle.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{e}_0}{\partial y} &= 0 \\ \mathbf{b}_n \omega_n + \frac{\partial \mathbf{c}_n}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial y} &= 0, \quad n = 1 \dots N \\ -\mathbf{a}_n \omega_n + \frac{\partial \mathbf{d}_n}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial y} &= 0, \quad n = 1 \dots N \end{aligned} \quad (3.9)$$

Regroupant les coefficients de Fourier des inconnues conservatives et des flux respectivement au sein des vecteurs  $\tilde{\mathbf{U}}$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}$  et  $\tilde{\mathbf{G}}$  et plaçant les différentes fréquences  $\omega_n$  au sein de la matrice  $\mathbf{\Omega}$ , l'expression (3.9) se réécrit de la manière suivante.

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}}{\partial y} + \mathbf{\Omega} \tilde{\mathbf{U}} = 0 \quad (3.10)$$

Ainsi, le système d'équations tridimensionnelles instationnaires d'Euler (3.1) est réduit à un système d'équations tridimensionnelles stationnaires, de taille plus élevée, dans le domaine

fréquentiel. Sa résolution est donc accessible par un code de calcul stationnaire. Ceci est vrai cependant à condition de connaître le développement en série de Fourier des flux, le système étant dans la cas contraire composé de davantage d'inconnues (les coefficients de Fourier) que d'équations. Pour ce faire, il existe deux possibilités. La première est d'exprimer les coefficients de Fourier des flux (voir expression (3.2)) en fonction des coefficients de Fourier des inconnues conservatives. Cependant, les expression résultantes sont compliquées et coûteuses en temps d'évaluation (Hall [19]). La deuxième possibilité est expliquée ci-dessous.

Imaginons que nous connaissons la valeur de  $\mathbf{U}(x, y, t)$  en  $2N+1$  instants  $t_i$ . Alors, en identifiant la série en ces  $2N+1$  instants  $t_i$ , il est possible de déterminer la valeur des  $2N+1$  coefficients de Fourier par la résolution du système suivant, selon le principe de collocation.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega_1 t_1) & \sin(\omega_1 t_1) & \cdots & \cos(\omega_N t_1) & \sin(\omega_N t_1) \\ 1 & \cos(\omega_1 t_2) & \sin(\omega_1 t_2) & \cdots & \cos(\omega_N t_2) & \sin(\omega_N t_2) \\ 1 & \cos(\omega_1 t_3) & \sin(\omega_1 t_3) & \cdots & \cos(\omega_N t_3) & \sin(\omega_N t_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega_1 t_{2N}) & \sin(\omega_1 t_{2N}) & \cdots & \cos(\omega_N t_{2N}) & \sin(\omega_N t_{2N}) \\ 1 & \cos(\omega_1 t_{2N+1}) & \sin(\omega_1 t_{2N+1}) & \cdots & \cos(\omega_N t_{2N+1}) & \sin(\omega_N t_{2N+1}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N \\ \mathbf{b}_N \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{U}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{U}(t_1) \\ \mathbf{U}(t_2) \\ \mathbf{U}(t_3) \\ \vdots \\ \mathbf{U}(t_{2N}) \\ \mathbf{U}(t_{2N+1}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}^*}$$

L'opérateur  $\mathbf{E}$ , qui n'est autre que l'opérateur de transformation de Fourier discrète, permet, par la méthode de collocation, d'identifier les coefficients de Fourier  $\tilde{\mathbf{U}}$  sur base du vecteur  $\mathbf{U}^*$  reprenant  $2N+1$  valeurs de  $\mathbf{U}(x, y, t)$  en  $2N+1$  instants  $t_i$ , par l'égalité suivante.

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{E} \mathbf{U}^* \quad (3.11)$$

Ceci est vrai également pour les flux  $\tilde{\mathbf{F}}$  et  $\tilde{\mathbf{G}}$ . Utilisant ce résultat pour réécrire le système (3.10), l'expression suivante est obtenue.

$$\frac{\partial \mathbf{E}\mathbf{F}^*}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{E}\mathbf{G}^*}{\partial y} + \mathbf{\Omega}\mathbf{E}\mathbf{U}^* = 0 \quad (3.12)$$

Prémultipliant ensuite ce système (3.12) par l'opérateur  $\mathbf{E}^{-1}$ , le système (3.13) est obtenu.

$$\frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial y} + \underbrace{\mathbf{E}^{-1}\mathbf{\Omega}\mathbf{E}\mathbf{U}^*}_{\approx \frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial t}} = 0 \quad (3.13)$$

Ainsi, le système (3.13) est résolu par collocation temporelle dans l'espace physique, les flux  $\mathbf{F}^*$  et  $\mathbf{G}^*$  étant calculés sur base de leur expression (3.2) dans l'espace physique en fonction des inconnues conservatives  $\mathbf{U}^*$  qui sont l'évaluation de  $\mathbf{U}(x, y, t)$  en  $2N+1$  instants  $t_i$ . L'évaluation des flux est donc simplifiée et l'opérateur de dérivation temporelle a été transformé en un opérateur spectral évaluable par un code de calcul stationnaire<sup>2</sup>. Cet opérateur spectral peut être vu comme un schéma de dérivation temporelle à  $2N+1$  points. L'avantage de cette méthode est, outre une résolution stationnaire, d'offrir les caractéristiques de convergence des séries de Fourier à l'évaluation de la dérivée temporelle. A condition que le nombre de modes inclus pour capter l'évolution temporelle du signal soit suffisant, cette dérivation par

<sup>2</sup>Dans le cas du problème de flottement, l'évaluation de  $\mathbf{U}^*$  en différents instants correspond en fait à l'évaluation des inconnues conservatives en différentes positions de déformation de l'aube, i.e. sur différents maillages stationnaires.

un opérateur spectral est plus précise qu'une évaluation par différences finies et nécessite moins de pas temporels.

Afin de résoudre le système d'équations obtenu par l'utilisation d'un code de calcul conventionnel, une pseudo-dérivée temporelle par rapport à un pseudo-temps  $\tau$  est ajoutée. Celle-ci permet d'associer chaque itération de résolution à un avancement dans le temps, rendant les équations hyperboliques, ce qui permet d'avoir recours aux techniques de résolution appartenant à l'état de l'art. Le système final à résoudre est exprimé par (3.14), où  $\mathbf{S}^*$  est l'opérateur spectral de dérivation temporelle. Au cours de la résolution, le système est mené vers un état stationnaire, annulant la pseudo-dérivée temporelle.

$$\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial y} + \mathbf{S}^* = 0 \quad (3.14)$$

Ce système, pour être résolu, doit être accompagné de conditions limites. Pour réduire son domaine de calcul à un seul canal inter-aubes, Hall suppose que l'écoulement est spatialement périodique, impliquant la propriété suivante, exprimée ici pour la densité, où  $\Delta y$  est le pas inter-aubes et  $\Delta t$  le décalage temporel entre deux points distants d'un pas inter-aubes.

$$\rho(x, y + \Delta y, t) = \rho(x, y, t + \Delta t)$$

Substituant cette propriété dans le développement en série de Fourier de  $\rho$ , l'expression suivante est obtenue.

$$\sum_n \rho_n(x, y + \Delta y) e^{i\omega_n t} = \sum_n \rho_n(x, y) e^{i\omega_n(t + \Delta t)}$$

Comparant les deux membres terme à terme, l'équation peut être simplifiée.

$$\rho_n(x, y + \Delta y) = \rho_n(x, y) e^{i\omega_n \Delta t}$$

Si la vitesse de rotation de la machine est  $\Omega$ , le nombre d'aubes est  $N_a$  et la fréquence fondamentale  $\omega_0$ , alors la condition limite périodique se réduit à l'expression (3.15), le décalage de phase  $\sigma_n$  étant connu pour chaque mode.

$$\rho_n(x, y + \Delta y) = \rho_n(x, y) e^{i\sigma_n}, \quad \sigma_n = \omega_n \Delta t = \frac{n 2\pi \omega_0}{N_a \Omega} \quad (3.15)$$

Cette condition limite a l'avantage de réduire le domaine de calcul à un seul passage inter-aubes, permettant d'utiliser un maillage moins important, d'usage commun en simulation stationnaire. Cependant, comme cette condition limite concerne les coefficients de Fourier, il est nécessaire d'appliquer une transformation de Fourier aux inconnues conservatives  $\mathbf{U}^*$ , d'appliquer les conditions limites puis d'effectuer une transformation inverse pour retourner au domaine physique. Il en est de même pour les conditions limites d'entrée et de sortie du domaine de calcul, Hall les appliquant dans le domaine fréquentiel.

Cette méthode a été appliquée avec succès par Hall aux problèmes de flottement, parvenant à reproduire les instationnarités de l'écoulement avec un temps de calcul largement inférieur à une simulation instationnaire classique, coûtant environ 10 fois le prix d'une simulation stationnaire. Cette méthode a aussi été reprise par Maple [34] et modifiée pour permettre une augmentation locale du nombre de modes de Fourier en cas de variation rapide au sein de l'écoulement. Plus récemment, McMullen [35] a lui aussi utilisé cette méthode et y a ajouté un module de recherche, par optimisation d'un résidu annexe, de la fréquence fondamentale caractérisant l'écoulement étudié.

En résumé, cette méthode harmonique est très efficace car elle permet de résoudre, par des techniques stationnaires, un écoulement instationnaire, sans linéarisation et avec un supplément de calcul raisonnable par rapport à une méthode stationnaire. Dans la suite, nous allons discuter l'applicabilité de cette méthode au cas du modèle méridien.

## 3.2 Applicabilité au cas du modèle méridien d'ordre supérieur

La méthode décrite répond à la problématique de la fermeture d'un modèle puisqu'elle permet d'accéder à des informations d'un ordre supérieur par une technique de résolution d'ordre inférieur. Selon ce principe, elle permettrait à un code de calcul méridien d'accéder aux non-uniformités circonférentielles. Nous allons discuter cette possibilité.

Au cours de la description de la méthode harmonique de Hall, plusieurs hypothèses ont été émises. La première hypothèse est que le signal à décomposer en série de Fourier est périodique, sans quoi la décomposition est impossible ou du moins, mène au phénomène de Gibbs. Deuxièmement, afin de s'affranchir de la variation temporelle explicite, c'est-à-dire pour pouvoir passer de l'expression (3.8) au système (3.9), il était nécessaire que le système soit homogène. Outre ces deux conditions sine qua non, il existe également des caractéristiques qui sont souhaitables pour que la résolution du problème par collocation soit efficace ; nous en parlerons ensuite.

### 3.2.1 Le système homogène

Intéressons-nous au cours de cette vérification, sans perte de généralité, au cas simplifié des équations bidimensionnelles d'Euler, comme l'a fait Hall. De plus, dans notre cas, les équations sont stationnaires. Elles sont reprises par l'expression (3.16) sous forme matricielle. Les inconnues conservatives et les flux sont identiques à ceux décrits par l'expression (3.2), excepté qu'ils sont maintenant indépendants du temps.

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = 0 \quad (3.16)$$

Appliquons maintenant une procédure de décomposition en série de Fourier mais selon la dimension  $y$  cette fois.

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sum_n \rho_n(x) e^{i\omega_n y} \\ \rho u(x, y) &= \sum_n (\rho u)_n(x) e^{i\omega_n y} \\ \rho v(x, y) &= \sum_n (\rho v)_n(x) e^{i\omega_n y} \\ \rho E(x, y) &= \sum_n (\rho E)_n(x) e^{i\omega_n y} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Les coefficients de Fourier sont indépendants de la dimension qui nous est inaccessible. Dans ce cas simplifié, il s'agit de la dimension  $y$  tandis que dans le cas tridimensionnel, il s'agirait de la dimension circonférentielle  $\theta$ .

Similairement au cas instationnaire, il est possible de passer directement à la décomposition de Fourier des flux  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$ .

$$\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{c}_0 + \sum_{n=1}^N [\mathbf{c}_n(x) \cos \omega_n y + \mathbf{d}_n(x) \sin \omega_n y] \quad (3.18)$$

$$\mathbf{G}(x, y) = \mathbf{e}_0 + \sum_{n=1}^N [\mathbf{e}_n(x) \cos \omega_n y + \mathbf{f}_n(x) \sin \omega_n y] \quad (3.19)$$

Remplaçant (3.18) et (3.19) dans les équations d'Euler, l'équation suivante est obtenue.

$$\sum_{n=0}^N \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{c}_n}{\partial x} + \mathbf{f}_n \omega_n \right) \cos(\omega_n y) + \left( \frac{\partial \mathbf{d}_n}{\partial x} - \mathbf{e}_n \omega_n \right) \sin(\omega_n y) \right] = 0 \quad (3.20)$$

Ainsi le même principe que dans le cas instationnaire est applicable et mènerait, après des développements similaires, au système d'équations de collocation (3.21).

$$\frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial x} + \underbrace{\mathbf{E}^{-1} \Omega \mathbf{E} \mathbf{G}^*}_{\approx \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial y}} = 0 \quad (3.21)$$

Par extension au cas tridimensionnel, dans un repère cylindrique  $(r, \theta, z)$ , l'expression suivante peut être obtenue, où  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  sont respectivement les flux axial, radial et azimutal.

$$\frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial r} + \underbrace{\mathbf{E}^{-1} \Omega \mathbf{E} \mathbf{H}^*}_{\approx \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \theta}} = 0 \quad (3.22)$$

L'expression (3.22) montre donc qu'il est possible d'approcher la dérivée azimutale par un opérateur spectral. Cependant, la dimension circonférentielle reste présente puisque les flux  $\mathbf{F}^*$ ,  $\mathbf{G}^*$  et  $\mathbf{H}^*$  doivent être évalués sur base des inconnues conservatives  $\mathbf{U}^*$  en  $2N+1$  stations azimutales.

Le problème est qu'un code méridien ne possède à priori aucune image de la dimension circonférentielle. Cependant, la résolution du système (3.22) ne nécessite pas de transfert d'information explicite entre les stations azimutales. Il en existe bien un mais il est effectué au travers de l'opérateur de dérivation azimutale qui ne dépend que des fréquences de Fourier et des positions circonférentielles choisies pour la collocation. Il n'y a donc pas de flux à transférer d'une maille à l'autre dans la direction azimutale comme c'est le cas dans une simulation tridimensionnelle. Ceci signifie qu'il suffirait, pour résoudre le système (3.22), d'utiliser une série de plans  $(z, r)$ , les coordonnées méridiennes, localisés en différentes stations azimutales  $\theta_i$  sans lien direct entre elles et de résoudre explicitement une série de problèmes bidimensionnels liés entre eux par un opérateur spectral. Cette résolution semble donc à la portée d'un code de calcul bidimensionnel. Un exemple de pseudo-maillage azimutal est présenté à la figure 3.1, entre l'intrados d'une aube repéré par la position  $\theta_p$  et l'extrados de l'aube suivante caractérisé par la position  $\theta_s$ .

Ainsi, pour une valeur fixée de  $\theta$  (i.e. pour une station azimutale), il reste un écoulement bidimensionnel à résoudre. Expriment ce système en  $2N+1$  stations azimutales, on dispose alors de  $2N+1$  équations, ce qui permet de déterminer  $N$  modes de Fourier. Ainsi, plus le nombre de stations sera important et plus le contenu fréquentiel calculable sera riche.

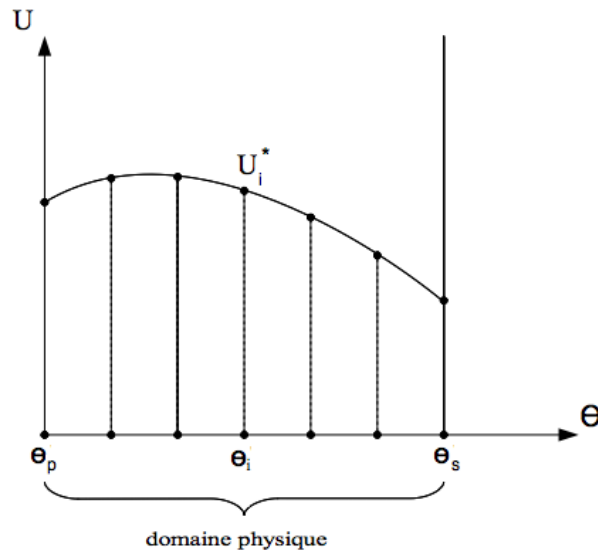


FIG. 3.1 – Stations azimuthales

### 3.2.2 La périodicité spatiale

La périodicité spatiale est indispensable pour pouvoir effectuer un développement en série de Fourier. Or, le domaine de calcul d'une roue n'est pas périodique en toute position axiale. La figure 3.2 présente un exemple de domaine de calcul, dans le plan  $(\theta, z)$ . A la vue de cette figure, pour qu'un domaine soit entièrement périodique azimuthalement, il est nécessaire que les écoulements sur l'extrados et l'intrados de l'aube soient identiques, ce qui n'est en général pas le cas. Ainsi, il semble qu'une des conditions sine qua non n'est pas remplie.

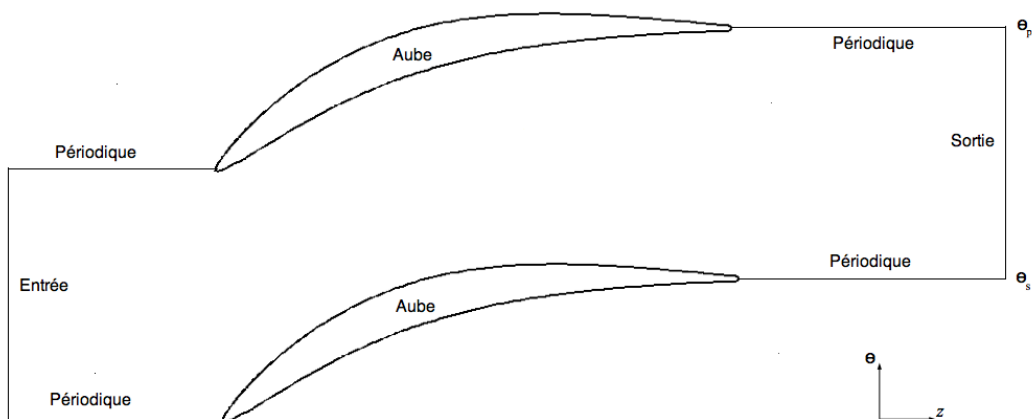


FIG. 3.2 – Domaine de calcul

Cela ne signifie pas pour autant que la théorie précédente n'est pas applicable. En effet, ce cas d'apériodicité a déjà été rencontré au cours du chapitre 2. Pour y remédier, il suffit de prolonger la fonction à reconstruire par une symétrie miroir ou, ce qui est similaire, d'utiliser une décomposition de Chebyshev au lieu d'une décomposition de Fourier. Un développement de Chebyshev permet de décomposer en série de cosinus une fonction apériodique, en appliquant une transformation à son domaine de définition.

Soit une fonction  $f(y)$  définie sur un intervalle  $y \in [-1, 1]$  avec  $f(-1) \neq f(1)$ . Pour rendre cette fonction périodique, une transformation est appliquée à son intervalle de définition. On définit un nouvel intervalle  $\theta \in [0, 2\pi]$  avec la relation  $y = \cos(\theta)$ . La relation entre les deux intervalles de définition de la fonction est illustrée à la figure 3.3.

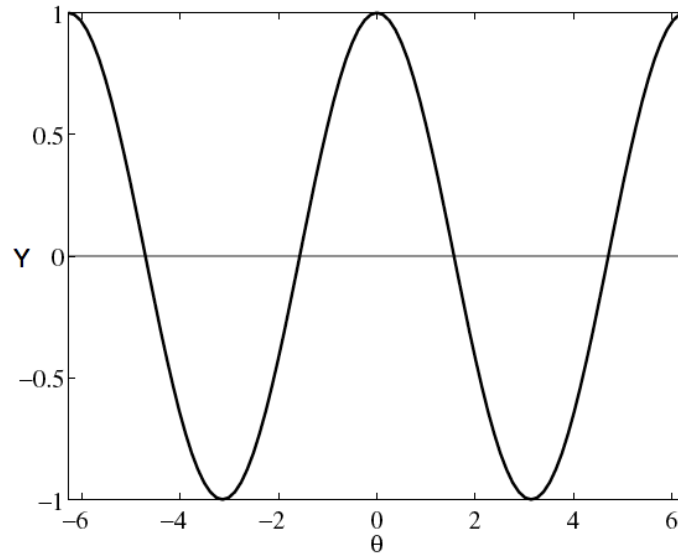


FIG. 3.3 – Relation entre  $y$  et  $\theta$ ,  $y = \cos(\theta)$ . [7]

La fonction  $f(\cos(\theta))$  est périodique sur le nouvel intervalle  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Le développement en série de Chebyshev est exprimé par la relation (3.23).

$$f(y) = f(\cos(\theta)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\theta) \quad (3.23)$$

Ainsi, le développement est analogue à une décomposition en série de Fourier d'un signal symétrique par rapport à  $\theta = \pi$ , exprimant l'action de prolongation miroir effectuée par le changement de domaine. L'hypothèse de périodicité spatiale peut donc être considérée comme acquise.

Les deux conditions de base pour permettre l'application de la méthode harmonique sont donc remplies. Cependant, l'extension de celle-ci au cas du modèle méridien présente d'autres difficultés, que nous allons détailler dans la suite. Elles ont deux origines. La première provient de la gestion d'une géométrie non-uniforme azimuthalement par un code de calcul bidimensionnel. La deuxième provient du principe même de collocation et des caractéristiques des non-uniformités circonférentielles.

### 3.2.3 La non-uniformité spatiale du domaine de calcul

Le domaine de calcul par collocation est illustré à la figure 3.2. La position circonférentielle de celui-ci varie selon l'axe de la machine, par la présence des aubes. Dès lors, le pseudo-maillage azimuthal nécessaire pour la résolution par collocation se compose de surfaces de coordonnées azimuthales variables. Un exemple est présenté à la figure 3.4.



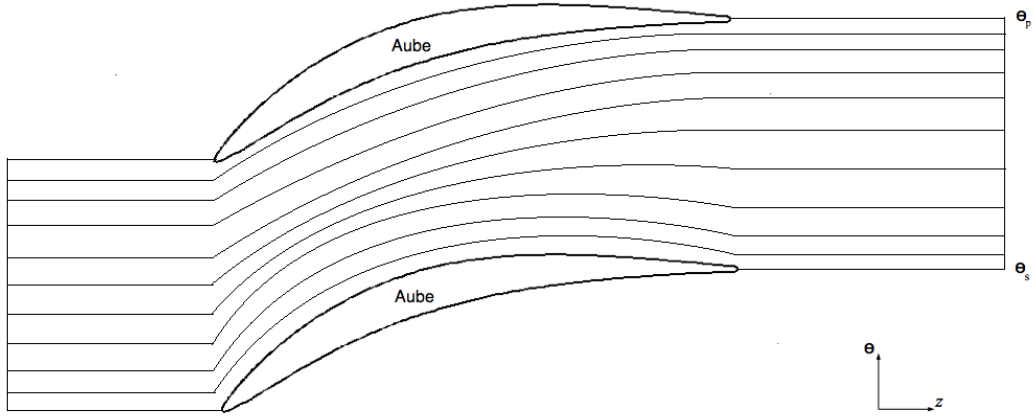


FIG. 3.4 – Maillage de collocation

Ainsi, les surfaces sur lesquelles la résolution par le code de calcul méridien doit s'opérer ne sont pas des plans. Or une condition supplémentaire, implicite cette fois, pour s'affranchir de la dimension d'ordre supérieur et utiliser un code de calcul d'ordre inférieur est que le domaine de calcul ne montre pas de variation azimutale.

Une autre manière de cerner la difficulté est la suivante. Lors de la résolution des équations proposées, une simulation méridienne exprime des transferts de flux ( $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$ ) dans un plan, i.e. sans variation de coordonnée azimutale. Si la surface sur laquelle ces équilibres doivent être exprimés varie circonférentiellement, il est nécessaire d'ajouter un transfert d'information dans cette direction pour assurer la conservation des différentes grandeurs, ce qui est inaccessible par une code de calcul bidimensionnel.

Afin de rendre possible une résolution du problème d'ordre supérieur par une simulation bidimensionnelle, il est nécessaire de rendre le maillage plan. Une solution est d'appliquer une transformation de mise à l'échelle sur le domaine de calcul  $\theta \in [\theta_s(r, z), \theta_p(r, z)]$ . Définissons un nouveau domaine azimutal  $\theta' \in [-1, 1]$ , uniforme, par la transformation suivante.

$$\theta' = 2 \frac{\theta - \theta_s}{\theta_p - \theta_s} - 1 \quad (3.24)$$

En exprimant la largeur du canal inter-aubes en fonction du facteur de blocage  $b$  et du nombre d'aubes  $N$ , le passage d'un domaine à l'autre est régi par les relations suivantes.

$$\theta' = (\theta - \theta_s) \frac{N}{\pi b} - 1 \quad (3.25)$$

$$\theta = (\theta' + 1) \frac{\pi b}{N} + \theta_s \quad (3.26)$$

Cette mise à l'échelle permet de travailler dans un espace de variables  $(r, \theta', z)$  indépendantes. Les dimensions variables du domaine initial apparaissent alors de manière explicite au travers de dérivées des grandeurs  $b$  et  $\theta_s$  présentes dans le changement de variable. Les relations entre les dérivées par rapport aux anciennes et nouvelles variables sont exprimées au travers de la matrice jacobienne du changement de variable.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{\partial.}{\partial r} \\ \frac{\partial.}{\partial \theta} \\ \frac{\partial.}{\partial z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial r} & \frac{\partial \theta'}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial r}{\partial \theta} & \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial \theta'}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial.}{\partial r} \\ \frac{\partial.}{\partial \theta'} \\ \frac{\partial.}{\partial z} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{(\theta'+1)}{b} \frac{\partial b}{\partial r} - \frac{N}{\pi b} \frac{\partial \theta_s}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{N}{\pi b} & 0 \\ 0 & -\frac{(\theta'+1)}{b} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{N}{\pi b} \frac{\partial \theta_s}{\partial z} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial.}{\partial r} \\ \frac{\partial.}{\partial \theta'} \\ \frac{\partial.}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Les différentes dérivées présentes dans le système à résoudre s'expriment alors par les relations (3.28) à (3.30).

$$\frac{\partial.}{\partial r} = \frac{\partial.}{\partial r} - \left( \frac{(\theta'+1)}{b} \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{N}{\pi b} \frac{\partial \theta_s}{\partial r} \right) \frac{\partial.}{\partial \theta'} \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial.}{\partial \theta} = \frac{N}{\pi b} \frac{\partial.}{\partial \theta'} \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial.}{\partial z} = \frac{\partial.}{\partial z} - \left( \frac{(\theta'+1)}{b} \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{N}{\pi b} \frac{\partial \theta_s}{\partial z} \right) \frac{\partial.}{\partial \theta'} \tag{3.30}$$

Il est donc possible de travailler sur un domaine constant circonférentiellement et de résoudre les équations adaptées par le changement de variable sur une série de plans de collocation. Il a cependant été nécessaire de modifier les équations pour les adapter à la géométrie. Tout se passe donc comme si l'on souhaitait étudier un écoulement sur une grille de plaques planes au moyen d'équations apparemment différentes de celles d'Euler ou de Navier-Stokes. L'interprétation est rendue plus délicate, tout comme l'imposition des conditions limites aux parois des aubes.

### 3.2.4 Les hypothèses implicites de la collocation

Le principe même d'une méthode de collocation, ou spectrale, implique que certaines conditions soient remplies pour qu'elle fonctionne efficacement. En effet, l'idée d'une telle méthode est d'obtenir de l'information en certains points du domaine physique, d'en identifier le contenu fréquentiel, puis de lier tous les points en partageant cette information spectrale. Il faut donc vérifier deux conditions.

La première est qu'il faut suffisamment de modes de Fourier pour reproduire le contenu fréquentiel, ce qui implique d'avoir suffisamment de points de maillage, i.e. une discrétisation suffisamment fine, puisque le nombre de points doit être suffisant pour identifier les coefficients de Fourier. Ainsi, plus le signal est riche, plus il faudra un maillage dense.

La deuxième condition est que les points de maillage doivent être disposés de manière à capter toute l'information fréquentielle. En effet, non seulement il est nécessaire d'avoir suffisamment de points mais ils doivent être placés dans les zones physiques où l'information est riche, c'est-à-dire dans les zones de variations importantes, afin de ne pas rendre le maillage aveugle à un contenu fréquentiel existant. Ceci est nécessaire pour transformer l'information spatiale en contenu spectral de manière efficace.

Sur base de ces deux remarques, un maillage de collocation doit donc être raffiné dans les régions proches des aubes, où les non-uniformités sont importantes, et inclure un nombre de points importants pour permettre la reproduction d'un écoulement caractérisé par un contenu fréquentiel riche, comme cela a été montré au chapitre 2. Ceci laisse supposer que pour imposer les conditions limites sur l'aube de manière efficace, dans une région de variations importantes, il faudra un nombre de points minimum, à déterminer. Ainsi, le nombre de stations azimutales utilisées pour la résolution du problème devra respecter une borne inférieure, une quantité critique. De plus, toutes ces stations azimutales doivent être résolues simultanément puisque couplées par l'opérateur spectral<sup>3</sup>. Ces contraintes s'apparentent à celle d'un code de calcul tridimensionnel. Il n'est donc pas évident d'affirmer que cette méthode sera plus efficace qu'un tel code.

De plus, comme nous l'avons détaillé précédemment, il est nécessaire d'apporter quelques modifications à la méthode pour l'appliquer au modèle méridien, rendant son application délicate. Nous pouvons donc émettre des doutes quant à l'efficacité de la méthode de Hall dans le cas méridien, celle-ci ne respectant pas vraiment la philosophie d'un code de calcul bidimensionnel. Pour toutes ces raisons, nous n'appliquerons pas cette méthode.

Comme nous l'avons mentionné en début de chapitre, il existe une deuxième méthode harmonique appliquée aux turbomachines, la méthode dite harmonique non-linéaire, issue de He. Le prochain chapitre lui est consacré.

---

<sup>3</sup>Celui-ci inclut de plus des transformations directes et inverses de Fourier, qui peuvent s'avérer coûteuses si le nombre de modes est important.

## Chapitre 4

# Vers une résolution harmonique par couplage non-linéaire

Le domaine de recherche de He se situe dans l'interaction fluide structure [21], tout comme Hall. Lui aussi a donc souhaité développer une méthode efficace pour étudier un phénomène instationnaire tel que le flottement. Il est cependant parti dans une autre direction, celle d'Adamczyk. En effet, He perçoit une résolution instationnaire efficace comme la résolution d'un système moyen, en l'occurrence un système moyenné dans le temps, associée à la résolution approchée d'un système d'ordre supérieur dont l'objectif est notamment de proposer une fermeture au problème moyen.

Le principe de la méthode de He est le suivant. Dans un esprit de résolution efficace de l'écoulement instationnaire, il souhaite avoir recours aux équations instationnaires linéarisées et les résoudre dans le domaine fréquentiel, par une technique stationnaire. Cependant, leur qualité de prédiction décroît en cas de non-linéarité importante au sein de l'écoulement, comme des chocs. Pour solutionner ce problème, du moins en partie, il couple les équations tridimensionnelles moyennes aux équations aux perturbations tridimensionnelles instationnaires au moyen des tensions déterministes, lesquelles assurent un transfert des non-linéarités entre les deux systèmes. Cette méthode a montré son efficacité tant du point de vue du coût de résolution que de la reproduction des non-linéarités principales.

Etant basée sur la philosophie d'Adamczyk, l'extension de cette méthode à la prise en compte des interactions entre roues mobiles et statiques a été réalisée, par l'adaptation de la technique des plans de mélange, par Chen [12]. Les résultats obtenus illustrent une continuité retrouvée entre les grandeurs de l'écoulement de part et d'autre des plans de mélange, grâce à la modélisation précise des tensions déterministes.

He [23] a même étendu, avec succès, sa méthode harmonique non-linéaire à la prise en compte des tensions a périodiques et donc de l'effet de clocking, soit les interactions entre roues immobiles l'une par rapport à l'autre, mais de nombres d'aubes différents.

Stridh [50] applique ensuite la méthode harmonique pour le calcul d'un champ de fonctionnement de compresseur et montre l'influence des tensions déterministes sur les performances globales. On y voit que l'influence des tensions déterministes est de plus en plus marquée au fur et à mesure de l'éloignement par rapport au point de design, témoignant de l'importance des instationnarités, c'est-à-dire des interactions entre roues.

Bref, cette méthode harmonique non-linéaire a été reprise par plusieurs auteurs, ayant prouvé son efficacité. Dans la suite, nous allons détailler cette méthode. Nous envisagerons ensuite son extension au cas du modèle méridien.

## 4.1 La méthode harmonique non-linéaire

Pour expliquer cette méthode, nous supposerons un écoulement bidimensionnel, dans le plan  $(x, y)$ , non-visqueux et non-conducteur. Nous utiliserons donc les équations d'Euler instationnaires, reprises ci-dessous<sup>1</sup>.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

Les vecteurs  $\mathbf{U}(x, y, t)$  des inconnues conservatives et  $\mathbf{F}(x, y, t)$  et  $\mathbf{G}(x, y, t)$  des flux sont donnés par l'expression (4.2). Il y apparaît la densité  $\rho$ , les deux composantes de vitesse  $u$  et  $v$ , la pression statique  $p$ , l'énergie totale  $E$  et l'enthalpie totale  $H$ .

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u H \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v H \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

La forme intégrale du système d'équations (4.1) est donnée par l'expression (4.3),  $\Delta A$  étant la surface d'un élément de maillage,  $S$  son périmètre.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Delta A} \mathbf{U} dA + \oint_S [\mathbf{F} dy + \mathbf{G} dx] = 0 \quad (4.3)$$

Ensuite, la philosophie d'Adamczyk est introduite en séparant les inconnues conservatives instationnaires en une partie moyenne et une partie fluctuante.

$$\mathbf{U}(x, y, t) = \bar{\mathbf{U}}(x, y) + \mathbf{U}'(x, y, t) \quad (4.4)$$

Substituant cette décomposition au sein de l'équation (4.3) et moyennant<sup>2</sup> par rapport au temps, le système suivant est obtenu.

$$\oint_S [\bar{\mathbf{F}} dy + \bar{\mathbf{G}} dx] = 0 \quad (4.5)$$

Les vecteurs flux  $\bar{\mathbf{F}}(x, y)$  et  $\bar{\mathbf{G}}(x, y)$  sont donnés par l'expression (4.6).

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \bar{u} \\ \bar{\rho} \bar{u} \bar{u} + \bar{p} + \overline{(\rho u)'} u' \\ \bar{\rho} \bar{u} \bar{v} + \overline{(\rho u)'} v' \\ \bar{\rho} \bar{u} \bar{H} + \overline{(\rho u)'} H' \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \bar{v} \\ \bar{\rho} \bar{v} \bar{u} + \overline{(\rho v)'} u' \\ \bar{\rho} \bar{v} \bar{v} + \bar{p} + \overline{(\rho v)'} v' \\ \bar{\rho} \bar{v} \bar{H} + \overline{(\rho v)'} H' \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Dans l'expression des flux apparaissent des produits de fluctuations; il s'agit des tensions déterministes. Elles sont le résultat de la procédure de moyenne appliquée à des termes

<sup>1</sup>Cette méthode est cependant applicable aux équations tridimensionnelles instationnaires visqueuses.

<sup>2</sup>Les différents développements mathématique réalisés pour obtenir ce système d'équation, comme ceux qui seront effectués dans la suite, ne sont pas détaillés ici. Une procédure complète sera présentée dans la suite lors de l'application au cas du modèle méridien.

non-linéaires et exprimant l'effet moyen de l'instationnarité sur le champ moyen. Ces termes expriment un échange entre le champ moyen et le champ fluctuant. Ce dernier est obtenu par la soustraction du système moyen (4.5) au système instationnaire (4.3). De plus, He fait l'hypothèse que le champ de perturbations est dominé par les termes du premier ordre, et procède à une linéarisation, marquant une différence majeure avec la méthode de Hall. Le résultat est exprimé par (4.7).

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Delta A} \mathbf{U}' dA + \oint_S [\mathbf{F}' dy + \mathbf{G}' dx] = 0 \quad (4.7)$$

Les vecteurs flux  $\mathbf{F}'(x, y, t)$  et  $\mathbf{G}'(x, y, t)$  sont donnés par l'expression (4.8).

$$\mathbf{F}' = \begin{bmatrix} (\rho u)' \\ \bar{\rho} \bar{u} u' + \bar{u} (\rho u)' + p' \\ \bar{\rho} \bar{v} v' + \bar{v} (\rho v)' \\ \bar{\rho} \bar{H} H' + \bar{H} (\rho v)' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}' = \begin{bmatrix} (\rho v)' \\ \bar{\rho} \bar{v} v' + \bar{v} (\rho v)' + p' \\ \bar{\rho} \bar{H} H' + \bar{H} (\rho v)' \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Les perturbations des inconnues primitives et conservatives sont liées par des expressions linéarisées, du type (4.9).

$$u' = \frac{(\rho u)' - \bar{u} \rho'}{\bar{\rho}} \quad (4.9)$$

He fait usage de la linéarisation des perturbations afin d'obtenir une forme quasi-linéaire des équations les concernant, c'est-à-dire linéaire pour un champ moyen donné. Ainsi, une décomposition en série de Fourier permet de découpler les fréquences, le système étant homogène et les fonctions de Fourier orthogonales. C'est sur ces hypothèses que se base l'efficacité de la méthode harmonique. En effet, soit la décomposition de Fourier suivante.

$$\mathbf{U}'(x, y, t) = \sum_n \mathbf{U}'_n(x, y) e^{i\omega_n t} \quad (4.10)$$

Sachant que les flux  $\mathbf{F}'$  et  $\mathbf{G}'$  sont des fonctions linéaires de  $\mathbf{U}'$ , la forme intégrale (4.7) se réduit à (4.11).

$$\sum_n \left( i\omega_n \iint_{\Delta A} \mathbf{U}'_n dA + \oint_S [\mathbf{F}'_n(\mathbf{U}'_n) dy + \mathbf{G}'_n(\mathbf{U}'_n) dx] \right) e^{i\omega_n t} = 0 \quad (4.11)$$

Le système étant homogène et les fonctions de Fourier étant orthogonales, on obtient, pour N modes, un ensemble de N équations intégrales découplées pour les inconnues complexes  $\mathbf{U}'_n$  et ne dépendant que des variables spatiales.

$$\oint_S [\mathbf{F}'_n(\mathbf{U}'_n) dy + \mathbf{G}'_n(\mathbf{U}'_n) dx] = -i\omega_n \iint_{\Delta A} \mathbf{U}'_n dA \quad (4.12)$$

Ceci marque une différence avec la méthode de Hall. En effet, Hall découplait lui aussi les équations mais devait passer pour cela par une décomposition harmonique des vecteurs flux. Ceux-ci étant cependant compliqués à évaluer dans le domaine fréquentiel, il retournait dans le domaine temporel pour les évaluer aux points de collocation. Dans la méthode exposée ici, la décomposition harmonique ne concerne que les inconnues conservatives. Dès lors, afin de pouvoir découpler les équations et d'évaluer les flux de manière peu coûteuse, la linéarisation est nécessaire.

Ensuite, le système (4.12) étant exprimé en fonction de variables stationnaires, il est possible de lui adjoindre une pseudo variable temporelle  $\tau$  afin de le rendre hyperbolique par rapport à celle-ci puis d'utiliser les techniques d'accélération caractéristiques des résolutions stationnaires.

Pour que la formulation (4.12) soit consistante, il est nécessaire de pouvoir exprimer les conditions limites instationnaires de manière homogène et linéaire afin d'obtenir un ensemble de conditions limites pour chaque mode. Les conditions limites d'entrée et de sortie utilisées sont les conditions limites non-réfléchissantes de Giles qui s'expriment dans le domaine fréquentiel. Elles peuvent être séparées par fréquence. En ce qui concerne les frontières circonférentielles du domaine de calcul, une condition limite de décalage de phase peut être utilisée, comme pour la méthode de l'équilibre harmonique non-linéaire, et exprimée par la relation (3.15) vue précédemment, s'appliquant à chaque mode séparément.

Le problème instationnaire (4.12) peut donc être résolu pour chaque mode successivement, dans le domaine fréquentiel. Ceci constitue une différence majeure par rapport à la méthode exposée précédemment, où la résolution conservait une part de l'image temporelle, soit la dimension d'ordre supérieur.

Une fois le système aux perturbations résolu par superposition modale, une mise en commun des différentes solutions permet d'accéder aux perturbations temporelles, fournissant ainsi une relation supplémentaire au système moyen, résolvant le problème de fermeture.

En effet, soit la décomposition de Fourier suivante pour les perturbations des composantes de vitesse  $u'$  et  $v'$ .

$$u' = \sum_{n=1}^N [u'_n e^{i\omega_n t} + u'_{-n} e^{-i\omega_n t}] \quad (4.13)$$

$$v' = \sum_{m=1}^N [v'_m e^{i\omega_m t} + v'_{-m} e^{-i\omega_m t}] \quad (4.14)$$

La moyenne temporelle, sur une période de révolution  $T$  de la machine, du produit de ces fluctuations représente une composante du tenseur déterministe apparaissant dans les flux (4.6) du système moyen. Il s'exprime de la manière suivante.

$$\begin{aligned} \overline{u'v'} = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N & \left( u'_n v'_m e^{i(\omega_n + \omega_m)t} + u'_n v'_{-m} e^{i(\omega_n - \omega_m)t} + \right. \\ & \left. u'_{-n} v'_m e^{i(-\omega_n + \omega_m)t} + u'_{-n} v'_{-m} e^{i(-\omega_n - \omega_m)t} \right) dt \end{aligned} \quad (4.15)$$

De ce développement ne subsistent, après moyenne, que les termes correspondant à  $m = n$  et  $\omega_n - \omega_m$  ou  $\omega_m - \omega_n$ . L'expression (4.15) se réduit donc à (4.16).

$$\overline{u'v'} = \sum_{n=1}^N (u'_n v'_{-n} + u'_{-n} v'_n) \quad (4.16)$$

Sachant de plus que chaque coefficient de Fourier contient une partie réelle et une partie imaginaire, la moyenne du produit de fluctuations prend la forme finale suivante.

$$\overline{u'v'} = \sum_{n=1}^N 2 \left( u_n'^{\Re} v_n'^{\Re} + u_n'^{\Im} v_n'^{\Im} \right) \quad (4.17)$$

Ainsi, le modèle d'ordre supérieur fournit une relation supplémentaire pour fermer le système moyen, conformément au formalisme d'Adamczyk. Cette relation de fermeture est le seul couplage entre les modes de Fourier obtenus par des résolutions distinctes, tout comme l'opérateur spectral de Hall était le seul lien entre les différentes stations temporelles.

De plus, cette relation de fermeture (4.17) constitue un lien non-linéaire entre le système aux perturbations (4.12) et le système moyen (4.5). En effet, pour être résolu, le système aux perturbations nécessite la connaissance de l'écoulement moyen. Il peut alors fournir les tensions circonférentielles. Ces dernières sont ensuite injectées dans le système moyen et modifient la prédiction. Cette modification de l'écoulement moyen va à son tour avoir une influence sur le système aux perturbations. Il s'agit donc d'un processus itératif non-linéaire. Ainsi, malgré l'hypothèse de petites perturbations menant à la linéarisation du système d'ordre supérieur, les non-linéarités principales de l'écoulement peuvent être reproduites. Pour tenir compte de ces interactions non-linéaires entre les écoulements moyen et instationnaire, He propose une stratégie de résolution réalisant un couplage fort, en intégrant simultanément les deux systèmes par rapport à un même pseudo-temps  $\tau$ , ce qui offre de plus des performances accrues en termes de stabilité et de convergence.

La méthode qui vient d'être exposée s'inscrit totalement dans la lignée de la cascade d'Adamczyk, un système d'ordre supérieur résolu de manière approchée étant perçu comme un moyen efficace de fournir au système moyen l'information qui lui manque. L'hypothèse la plus forte de cette méthode est que les perturbations sont faibles. Dans un premier temps, nous ne discuterons pas de la validité de cette hypothèse dans le cas du modèle méridien. Elle sera évaluée dans un chapitre ultérieur.

## 4.2 Applicabilité au modèle méridien

Dans le cas d'une application au modèle méridien, le système moyen serait ce dernier tandis que le système aux perturbations fournirait les non-uniformités circonférentielles, information d'ordre supérieur. Selon la méthode de He, un calcul couplé consisterait alors à résoudre un ensemble de problèmes méridiens dans le domaine fréquentiel, le nombre de résolutions étant déterminé par le nombre de modes, ce dernier conditionnant la précision de reconstruction.

La méthode présentée semble, a priori, convenir non seulement à nos objectifs d'affranchissement vis-à-vis de l'empirisme mais aussi à une résolution par un outil de calcul bidimensionnel. Nous allons cependant constater que la nature du problème à résoudre dans le cas méridien est différente du cas instationnaire et représente un obstacle à l'utilisation de cette méthode. Dans ce qui suit, nous présenterons cet obstacle. Nous arrêterons alors la discussion de l'applicabilité de la méthode en ce qui concerne ce chapitre. Les difficultés seront approfondies dans le chapitre suivant, après dérivation détaillée du système aux perturbations, puis des solutions seront proposées.

L'obstacle à l'application de la méthode précédente au cas méridien provient des conditions limites. Pour l'expliquer, l'exemple du cas instationnaire, plus particulièrement des interactions entre roues mobiles et statiques, est présenté. L'extension au cas méridien est ensuite discutée.



### 4.2.1 Les conditions limites déterministes

Un modèle d'ordre supérieur peut être résolu efficacement, dans le domaine fréquentiel, si ses conditions limites sont exprimables dans ce même domaine. Ainsi, il est nécessaire que les conditions limites d'ordre supérieur, c'est-à-dire associées aux phénomènes dont on souhaite une image moyenne, puissent être imposées, d'une manière ou d'une autre, au sein d'un code de calcul d'ordre inférieur, i.e. un code de calcul stationnaire dans le cas déterministe.

Prenons le cas d'un code de calcul tridimensionnel utilisant la technique des plans de mélange, où chaque roue d'un ensemble d'étages est calculée séparément, ne communiquant avec les autres roues qu'au travers d'écoulements moyennés. Si l'objectif est de reproduire les effets instationnaires, cela signifie que l'on recherche les interactions instationnaires entre roues mobiles et statiques, comme nous l'avons mentionné lors de l'analyse de la cascade d'Adamczyk. Pour cela, il faut appliquer une condition limite que nous qualifierons de déterministe, qui va permettre de générer les non-uniformités temporelles dans le domaine de calcul tridimensionnel stationnaire. Ainsi, afin de prendre en compte l'effet des roues adjacentes sur la roue considérée, il faut appliquer, aux frontières de son domaine de calcul, des conditions limites décrivant le comportement de celles-ci.

Prenons l'exemple d'un étage de compresseur, i.e. une roue mobile (rotor) suivie d'une roue statique (stator), illustré à la figure 4.1. L'interface entre les deux roues, le plan de mélange, est repéré sur la figure et constitue la limite des domaines de calcul de chaque roue.

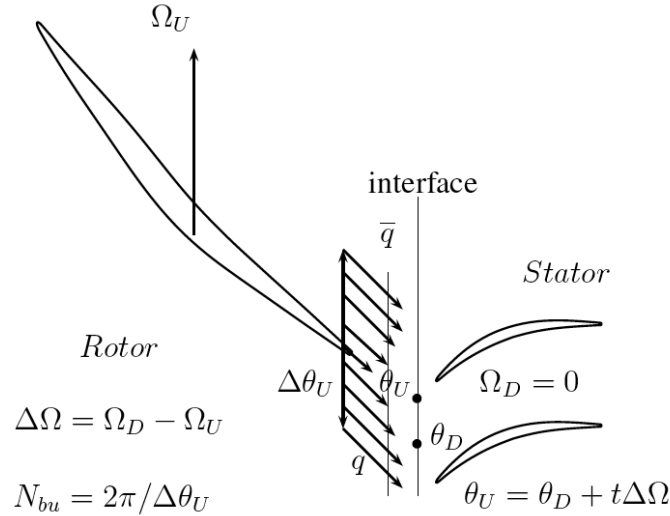


FIG. 4.1 – Conditions limites déterministes.

Afin de prendre en compte l'effet du rotor sur le stator, il faut reproduire les caractéristiques de l'écoulement en sortie du domaine amont à l'entrée du domaine aval et ce, dans un formalisme permettant une expression fréquentielle pour chaque mode. Pour ce faire, l'hypothèse d'Adamczyk [2] est utilisée. Celle-ci suppose que la composante instationnaire d'une roue sur l'autre provient de la non-uniformité azimutale stationnaire de la roue amont qui, par rotation d'un domaine par rapport à l'autre, se transforme en non-uniformité temporelle dans le domaine aval.

Dans le domaine aval, les instationnarités sont exprimées au travers d'une série de Fourier comme l'expression (4.18), où  $\theta_D$  est la coordonnée azimutale dans le domaine de calcul de la roue considérée, le stator.

$$U'(r, \theta_D, z, t) = \sum_n U'_n(r, \theta_D, z) e^{i\omega_n t} \quad (4.18)$$

Le problème se réduit donc à trouver une expression des conditions limites déterministes qui a cette forme, afin de pouvoir appliquer une condition limite distincte sur chaque mode spatial. Selon l'hypothèse faite précédemment, le développement (4.20) de l'écoulement stationnaire non-uniforme azimutalement dans le domaine amont (repéré par l'indice  $U$  dans la suite) permet d'obtenir une telle expression dans le domaine aval (repéré par l'indice  $D$  dans la suite).

Soit la relation de passage d'un domaine à l'autre (4.19).

$$\theta_U = \theta_D + \Omega t \quad (4.19)$$

La décomposition de l'écoulement amont est alors la suivante.

$$\begin{aligned} U'(r, \theta_U, z) &= \sum_n U'_n(r, z) e^{i\omega_n \theta_U} \\ &= \sum_n U'_n(r, z) e^{i\omega_n(\theta_D + \Omega t)} \\ &= \sum_n \underbrace{U'_n(r, z) e^{i\omega_n \theta_D}}_{U_n^*(r, \theta_D, z)} e^{i\omega_n^* \Omega t} \\ &= \sum_n U_n^*(r, \theta_D, z) e^{i\omega_n^* t} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ainsi, les interactions entre roues peuvent apparaître, dans le plan fréquentiel du domaine aval, comme des conditions limites purement spatiales.

## 4.2.2 Les conditions limites circonférentielles

Pour que la méthode de He soit applicable au cas méridien, il est donc nécessaire que les conditions limites d'ordre supérieur, à l'origine des non-uniformités circonférentielles soient décomposables en série de Fourier de la forme (4.21), afin qu'elles puissent être appliquées séparément à chaque mode méridien, fonction uniquement des variables méridiennes  $(r, z)$ .

$$U'(r, \theta, z) = \sum_n U'_n(r, z) e^{i\omega_n \theta} \quad (4.21)$$

Dans le cas méridien, l'information d'ordre supérieur, à savoir les non-uniformités azimutales, sont générées par l'aube elle-même, par son imperméabilité<sup>3</sup> dans le cas non-visqueux. Ceci signifie qu'en certaines positions particulières  $\theta_p$  et  $\theta_s$ , une condition limite doit être imposée. Cette condition limite peut être exprimée par (4.22).

$$U'(r, \theta, z) \Big|_{\theta=\theta_p} = U'_p(r, z) \quad (4.22)$$

<sup>3</sup>Ainsi que par sa condition de non-glissement dans le cas visqueux.

Substituant (4.22) dans (4.21), on obtient l'expression suivante de la condition limite d'ordre supérieur.

$$\begin{aligned}
 U_p'(r, z) &= \sum_n \underbrace{U_n'(r, z) e^{i\omega_n \theta_p}}_{U_n'^*(r, z)} \\
 &= \sum_n U_n'^*(r, z)
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

Ainsi, cette condition limite n'est pas vraie pour tout  $\theta$ . Elle ne peut donc pas être décomposée en série de Fourier du type (4.21) et ne peut s'appliquer de manière distincte sur chaque mode. Elle doit être appliquée sur la série entière, couplant tous les modes. Du fait de la présence du générateur d'information d'ordre supérieur dans le domaine de calcul, une résolution par superposition modale est donc impossible.

Il n'en reste pas moins que la méthode de He est très attractive. L'obstacle rencontré est cependant de taille. Toutefois, dans la suite, nous allons conserver comme objectif l'application de la méthode harmonique non-linéaire. Dans le chapitre qui suit, nous allons détailler l'obtention du système aux perturbations circonférentielles et le discuter. Nous établirons ensuite, mathématiquement et physiquement, les conditions que celui-ci doit remplir pour permettre l'application de la méthode exposée. Nous proposerons alors une technique de résolution satisfaisant ces conditions.

## Chapitre 5

# Dérivation et analyse du système aux perturbations

Nous avons détaillé deux méthodes harmoniques permettant de résoudre le problème de fermeture d'un écoulement tridimensionnel moyenné dans le temps. Les deux méthodes ont présenté des difficultés de mise en œuvre dans le cas du modèle méridien. Nous allons cependant approfondir le sujet. Parmi les deux méthodes, celle de He [20] se conforme à la philosophie d'Adamczyk, en séparant les problèmes moyen et d'ordre supérieur. Ce dernier est résolu de manière approchée, privilégiant l'efficacité de résolution et affirmant le système moyen comme prioritaire. Nous choisissons donc d'approfondir l'extension de cette méthode au cas méridien.

Dans ce chapitre, nous allons dériver le système d'ordre supérieur donnant accès aux perturbations circumférentielles. Lors de ce développement, nous garderons comme objectif l'application de la méthode harmonique non-linéaire. Pour ce faire, nous exprimerons les variations circumférentielles au travers d'un système secondaire, aux perturbations, et orienterons nos développements vers un système linéaire, mieux adapté aux décompositions en série. Cependant, ceci est contraire à notre objectif de généralité. En effet, supposer un système linéaire reviendrait à poser une hypothèse de petites perturbations, ce que nous ne souhaitons pas faire ici. Pour concilier les objectifs, nous présenterons le système aux perturbations sous forme linéaire non-homogène, les termes non-linéaires apparaissant dans le membre de droite du système, de manière analogue à des termes sources.

Un fois le système établi, nous discuterons les particularités du problème à résoudre et envisagerons une adaptation de la méthode de He afin de permettre son application au modèle méridien.

### 5.1 Le système d'équations d'Euler tridimensionnelles stationnaires

Le système d'équations de Navier-Stokes tridimensionnelles instationnaires est présenté à l'annexe B. Nous souhaitons ne considérer que le système stationnaire au sein d'un canal inter-aubes. Selon la philosophie d'Adamczyk, cela correspond à effectuer successivement les moyennes d'ensemble (ou de Reynolds), temporelle et aperiodique, moyennes qui ne sont pas rappelées ici. De plus, nous négligeons tout terme supplémentaire apparu au cours de ces moyennes successives. Cela constitue une expression simplifiée de l'étage supérieur au modèle méridien au sein de la cascade d'Adamczyk (figure 1.1), autrement dit le modèle d'ordre supérieur.

Pour simplifier d'avantage, et sans nuire à la généralité de l'exposé, nous oublions toute viscosité et passons aux équations dites d'Euler. D'après ces considérations, le système d'équations est obtenu du système repris en annexe en supprimant les termes instationnaires et visqueux, et en considérant les variables physiques désormais figées dans le temps et identiques d'un canal à l'autre. Ce système est repris aux équations (5.1) à (5.5) ci-dessous exprimées en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , la vitesse de rotation de la roue y étant dénommée  $\omega$ . Ces équations sont complétées par l'expression de l'enthalpie totale (5.6) et la loi des gaz parfaits (5.7). Ces équations sont valables dans un repère fixe comme dans un repère mobile, les grandeurs apparaissant dans les équations devant, dans ce dernier, cas être assimilées aux grandeurs relatives.

### Equation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho V_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (5.1)$$

### Equations de conservation de la quantité de mouvement

Composante axiale

$$\frac{\partial (\rho V_z V_z + p)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r V_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_\theta V_z}{\partial \theta} = 0 \quad (5.2)$$

Composante circonférentielle

$$\frac{\partial \rho V_z V_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_\theta V_\theta + p)}{\partial \theta} = \frac{-\rho V_r V_\theta}{r} - 2\rho \omega V_r \quad (5.3)$$

Composante radiale

$$\frac{\partial \rho V_z V_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r (\rho V_r V_r + p)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_\theta V_r}{\partial \theta} = \frac{\rho V_\theta^2 + p}{r} + \rho \omega^2 r + 2\rho \omega V_\theta \quad (5.4)$$

### Equation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial \rho V_z H}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r H}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_\theta H}{\partial \theta} = \rho \omega^2 r V_r \quad (5.5)$$

### Equations d'état

$$H = E + \frac{p}{\rho} \quad (5.6)$$

$$p = (\gamma - 1) \rho \left[ E - \frac{V_j V_j}{2} \right] \quad (5.7)$$

## 5.2 Le système moyen

Pour obtenir le système moyen (ou système méridien), on utilise l'opérateur de moyenne circonférentielle au sein d'un canal, lequel a déjà été présenté, mais est rappelé ci-dessous.

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\frac{2\pi}{N}b} \int_p^s \phi \, d\theta \quad (5.8)$$

Nous rappelons également l'expression de la moyenne circonférentielle d'une dérivée selon une variable spatiale quelconque  $s$ .

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial s} = \frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\phi}}{\partial s} - \frac{1}{\frac{2\pi}{N}b} \left[ \phi \frac{\partial \theta}{\partial s} \right]_p^s \quad (5.9)$$

Nous rappelons aussi la moyenne de Favre.

$$\tilde{\phi} = \frac{\int_p^s \rho \phi \, d\theta}{\int_p^s \rho \, d\theta} = \frac{\overline{\rho \phi}}{\bar{\rho}} \quad (5.10)$$

Enfin, les expressions des perturbations par rapport aux deux moyennes sont décrites ci-dessous.

$$\phi' = \phi - \bar{\phi} \quad \phi'' = \phi - \tilde{\phi} \quad (5.11)$$

Une relation entre ces deux perturbations peut être établie.

$$\begin{aligned} \rho \phi &= (\bar{\rho} + \rho') (\tilde{\phi} + \phi'') = \bar{\rho} \tilde{\phi} + \bar{\rho} \phi'' + \rho' \tilde{\phi} + \rho' \phi'' \\ (\rho \phi)' &= \rho \phi' - \bar{\rho} \phi' = \bar{\rho} \phi'' + \rho' \tilde{\phi} + \rho' \phi'' \\ \rho \phi'' &= (\rho \phi)' - \rho' \tilde{\phi} \end{aligned}$$

Utilisant cette relation, il est possible d'obtenir l'expression détaillée du triple produit  $\rho \phi \psi$ .

$$\begin{aligned} \rho \phi \psi &= \rho (\tilde{\phi} + \phi'') (\tilde{\psi} + \psi'') \\ &= \rho \tilde{\phi} \tilde{\psi} + \rho \psi'' \tilde{\phi} + \rho \phi'' \tilde{\psi} + \rho \phi'' \psi'' \\ &= \bar{\rho} \tilde{\phi} \tilde{\psi} + \rho' \tilde{\phi} \tilde{\psi} + \tilde{\phi} (\rho \psi)' - \rho' \tilde{\phi} \tilde{\psi} + \tilde{\psi} (\rho \phi)' - \rho' \tilde{\phi} \tilde{\psi} + \rho \phi'' \psi'' \\ &= \bar{\rho} \tilde{\phi} \tilde{\psi} + \tilde{\phi} (\rho \psi)' + \tilde{\psi} (\rho \phi)' - \rho' \tilde{\phi} \tilde{\psi} + \rho \phi'' \psi'' \end{aligned}$$

De là, les composantes moyenne et fluctuante du triple produit sont déduites.

$$\begin{aligned} \overline{\rho \phi \psi} &= \bar{\rho} \tilde{\phi} \tilde{\psi} + \overline{\rho \phi'' \psi''} \\ (\rho \phi \psi)' &= \tilde{\phi} (\rho \psi)' + \tilde{\psi} (\rho \phi)' - \rho' \tilde{\phi} \tilde{\psi} + \rho \phi'' \psi'' - \overline{\rho \phi'' \psi''} \end{aligned}$$

Utilisant ces relations, le système d'équations décrivant un écoulement moyen au sein d'une machine complète peut être dérivé, soit l'écoulement méridien, que nous rappelons ci-dessous.

### Equation de conservation de la masse

$$\frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\rho} \widetilde{V}_z}{\partial z} + \frac{1}{rb} \frac{\partial rb \bar{\rho} \widetilde{V}_r}{\partial r} = 0 \quad (5.12)$$

### Equations de conservation de la quantité de mouvement

Composante axiale

$$\frac{1}{b} \frac{\partial b \left( \bar{\rho} \widetilde{V}_z \widetilde{V}_z + \bar{p} \right)}{\partial z} + \frac{1}{rb} \frac{\partial rb \bar{\rho} \widetilde{V}_r \widetilde{V}_z}{\partial r} = -\frac{1}{b} \frac{\partial b \overline{\rho V_z'' V_z''}}{\partial z} - \frac{1}{rb} \frac{\partial rb \overline{\rho V_r'' V_z''}}{\partial r} + f_{bz} \quad (5.13)$$

Composante circonférentielle

$$\frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\rho} \widetilde{V}_z \widetilde{V}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{rb} \frac{\partial rb \bar{\rho} \widetilde{V}_r \widetilde{V}_\theta}{\partial r} = -\frac{1}{b} \frac{\partial b \overline{\rho V_z'' V_\theta''}}{\partial z} - \frac{1}{rb} \frac{\partial rb \overline{\rho V_r'' V_\theta''}}{\partial r} - \frac{1}{r} \left( \bar{\rho} \widetilde{V}_r \widetilde{V}_\theta + \overline{\rho V_r'' V_\theta''} \right) - 2\omega \bar{\rho} \widetilde{V}_r + f_{b\theta} \quad (5.14)$$

Composante radiale

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\rho} \widetilde{V}_z \widetilde{V}_r}{\partial z} + \frac{1}{rb} \frac{\partial rb \left( \bar{\rho} \widetilde{V}_r \widetilde{V}_r + \bar{p} \right)}{\partial r} = & -\frac{1}{b} \frac{\partial b \overline{\rho V_z'' V_r''}}{\partial z} - \frac{1}{rb} \frac{\partial rb \overline{\rho V_r'' V_r''}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \bar{\rho} \widetilde{V}_\theta \widetilde{V}_\theta + \bar{p} + \overline{\rho V_\theta'' V_\theta''} \right) \\ & + 2\omega \bar{\rho} \widetilde{V}_\theta + \bar{\rho} \omega^2 r + f_{br} \end{aligned} \quad (5.15)$$

### Equation de conservation de l'énergie

$$\frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\rho} \widetilde{V}_z \widetilde{H}}{\partial z} + \frac{1}{rb} \frac{\partial rb \bar{\rho} \widetilde{V}_r \widetilde{H}}{\partial r} = -\frac{1}{b} \frac{\partial b \overline{\rho V_z'' H''}}{\partial z} - \frac{1}{rb} \frac{\partial rb \overline{\rho V_r'' H''}}{\partial r} + \omega^2 r \bar{\rho} \widetilde{V}_r \quad (5.16)$$

### Equations d'état

$$\bar{\rho} \widetilde{H} = \bar{\rho} \widetilde{E} + \bar{p} \quad (5.17)$$

$$\bar{p} = (\gamma - 1) \left[ \bar{\rho} \widetilde{E} - \frac{\bar{\rho} \widetilde{V}_j \widetilde{V}_j}{2} - \frac{\overline{\rho V_j'' V_j''}}{2} \right] \quad (5.18)$$

### 5.3 Deux possibilités de dériver le système auxiliaire

Il existe deux façons d'obtenir l'expression du système aux perturbations : la première est de soustraire le système moyen au système tridimensionnel et la deuxième est de dériver le système auxiliaire directement du système tridimensionnel. Cette dernière possibilité permet d'exprimer certains termes sources, comme la force des aubes, en fonction des inconnues perturbées. Les deux systèmes sont évidemment identiques, seule leur expression diffère.

L'obtention "directe" du système aux perturbations est basée sur la décomposition explicite de la perturbation de la dérivée d'une inconnue quelconque  $\phi$  par rapport à une variable quelconque  $s$ .

Pour rappel, une inconnue peut être décomposée en sa moyenne et une partie fluctuante.

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad \bar{\phi} = \frac{1}{2\pi b} \int_{\theta_p}^{\theta_s} \phi d\theta$$

Il en est de même pour une dérivée.

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \overline{\left(\frac{\partial \phi}{\partial s}\right)} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial s}\right)'$$

Or l'expression de la moyenne d'une dérivée est connue.

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\partial \phi}{\partial s}\right)} &= \frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\phi}}{\partial s} - \frac{1}{\frac{2\pi}{N} b} \left[ \phi' \frac{\partial \theta}{\partial s} \right]_p^s \\ &= \frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\phi}}{\partial s} - \frac{1}{\frac{2\pi}{N} b} \left[ \bar{\phi} \frac{\partial \theta}{\partial s} + \phi' \frac{\partial \theta}{\partial s} \right]_p^s \\ &= \frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\phi}}{\partial s} - \frac{\bar{\phi}}{\frac{2\pi}{N} b} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial s} \right]_p^s - \frac{1}{\frac{2\pi}{N} b} \left[ \phi' \frac{\partial \theta}{\partial s} \right]_p^s \\ &= \frac{1}{b} \frac{\partial b \bar{\phi}}{\partial s} - \frac{\bar{\phi}}{b} \frac{\partial b}{\partial s} - \frac{1}{\frac{2\pi}{N} b} \left[ \phi' \frac{\partial \theta}{\partial s} \right]_p^s \\ &= \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial s} + \frac{\bar{\phi}}{b} \frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\bar{\phi}}{b} \frac{\partial b}{\partial s} - \frac{1}{\frac{2\pi}{N} b} \left[ \phi' \frac{\partial \theta}{\partial s} \right]_p^s \\ &= \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial s} - \frac{1}{\frac{2\pi}{N} b} \left[ \phi' \frac{\partial \theta}{\partial s} \right]_p^s \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de la perturbation d'une dérivée.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial s}\right)' &= \frac{\partial \phi}{\partial s} - \overline{\left(\frac{\partial \phi}{\partial s}\right)} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial s} - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial s} + \frac{1}{\frac{2\pi}{N} b} \left[ \phi' \frac{\partial \theta}{\partial s} \right]_p^s \\ &= \frac{\partial \phi'}{\partial s} + \frac{1}{\frac{2\pi}{N} b} \left[ \phi' \frac{\partial \theta}{\partial s} \right]_p^s \end{aligned}$$

Cette expression montre que le système aux perturbations peut être exprimé en fonction des perturbations des inconnues tridimensionnelles. Mathématiquement, le second terme du



membre de droite de l'expression précédente provient de la non-périodicité de la fonction  $\phi$  sur l'intervalle  $[\theta_p, \theta_s]$ . Physiquement, il traduit l'influence des aubes sur l'écoulement perturbé dans le passage inter-aubes.

Dans la suite, nous présentons le système aux perturbations sous les deux formes discutées. De plus, les termes linéaires seront placés dans le membre de gauche des différentes équations, les termes non-linéaires dans le membre de droite et ce pour les raisons mentionnées précédemment.

Notons, de plus, que le système sera exprimé en fonction des inconnues conservatives  $\rho'$ ,  $(\rho V_z)'$ ,  $(\rho V_\theta)'$ ,  $(\rho V_r)'$  et  $(\rho E)'$ . Il est également fait usage de l'équation d'état et des relations entre l'enthalpie totale et l'énergie totale.

$$p' = (\gamma - 1) \left[ (\rho E)' + \rho' \frac{\tilde{V}_i^2}{2} - \tilde{V}_i (\rho V_i)' - \frac{(\rho V_i'' V_i'' - \overline{\rho V_i'' V_i''})}{2} \right] \quad (5.19)$$

$$\tilde{H} = \gamma \tilde{E} + \frac{(1 - \gamma)}{2} (\tilde{V}_z^2 + \tilde{V}_\theta^2 + \tilde{V}_r^2 + \tilde{k}), \quad \tilde{k} = \overline{V_i'' V_i''} \quad (5.20)$$

$$(\rho H)' = \gamma (\rho E)' + (1 - \gamma) \left[ -\frac{\tilde{V}_i^2}{2} \rho' + \tilde{V}_i (\rho V_i)' + \frac{(\rho V_i'' V_i'' - \overline{\rho V_i'' V_i''})}{2} \right] \quad (5.21)$$

## 5.4 Les deux formes de système aux perturbations circonférentielles

Sous forme matricielle, le système aux perturbations circonférentielles s'écrit, selon la méthode utilisée, par les expressions (5.22) ou (5.23). Les vecteurs qui ne sont pas surmontés d'un symbole de moyenne sont composés de produits de fluctuations. Les éléments soulignés sont des matrices. Ce système ne comporte aucune hypothèse supplémentaire au modèle d'Euler.

$$1) \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{U}'}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{U}'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{U}'}{\partial \theta} + \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{U}' = \tilde{\mathbf{S}}_b + \mathbf{S}_{bp} - \mathbf{S}_{dp} + \mathbf{S}_p \quad (5.22)$$

$$2) \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{U}'}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{U}'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{U}'}{\partial \theta} + \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{U}' + \frac{1}{\frac{2\pi}{N} b} \left[ \left( \tilde{\mathbf{F}} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \tilde{\mathbf{G}} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \tilde{\mathbf{H}} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) \mathbf{U}' \right]_p^s = -\mathbf{S}_{tp} - \mathbf{S}_{dp} + \mathbf{S}_p \quad (5.23)$$

$$\mathbf{U}' = \begin{bmatrix} (\rho)' \\ (\rho V_z)' \\ (\rho V_\theta)' \\ (\rho V_r)' \\ (\rho E)' \end{bmatrix}$$

Les matrices jacobiennes  $\tilde{\mathbf{F}}$ ,  $\tilde{\mathbf{G}}$  et  $\tilde{\mathbf{H}}$  ainsi que la matrice  $\tilde{\mathbf{L}}$  et le vecteur  $\tilde{\mathbf{S}}_b$  dépendent uniquement de l'écoulement moyen. Les expressions des différentes matrices et vecteurs sont présentées ci-après. La répétition d'un indice implique une sommation.

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\gamma-3}{2}\right) \tilde{V}_z^2 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) (\tilde{V}_\theta^2 + \tilde{V}_r^2) & (3-\gamma) \tilde{V}_z & (1-\gamma) \tilde{V}_\theta & (1-\gamma) \tilde{V}_r & \gamma-1 \\ -\tilde{V}_z \tilde{V}_\theta & \tilde{V}_\theta & \tilde{V}_z & 0 & 0 \\ -\tilde{V}_z \tilde{V}_r & \tilde{V}_r & 0 & \tilde{V}_z & 0 \\ -\gamma \tilde{V}_z \tilde{E} + (\gamma-1) \tilde{V}_z \left(\tilde{V}_i^2 + \frac{\tilde{k}}{2}\right) & \gamma \tilde{E} - \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) (2\tilde{V}_z^2 + \tilde{V}_i^2 + \tilde{k}) & (1-\gamma) \tilde{V}_z \tilde{V}_\theta & (1-\gamma) \tilde{V}_z \tilde{V}_r & \gamma \tilde{V}_z \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\tilde{V}_z \tilde{V}_r & \tilde{V}_r & 0 & \tilde{V}_z & 0 \\ -\tilde{V}_\theta \tilde{V}_r & 0 & \tilde{V}_r & \tilde{V}_\theta & 0 \\ \left(\frac{\gamma-3}{2}\right) \tilde{V}_r^2 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) (\tilde{V}_\theta^2 + \tilde{V}_z^2) & (1-\gamma) \tilde{V}_z & (1-\gamma) \tilde{V}_\theta & (3-\gamma) \tilde{V}_r & \gamma-1 \\ -\gamma \tilde{V}_r \tilde{E} + (\gamma-1) \tilde{V}_r \left(\tilde{V}_i^2 + \frac{\tilde{k}}{2}\right) & (1-\gamma) \tilde{V}_z \tilde{V}_r & (1-\gamma) \tilde{V}_\theta \tilde{V}_r & \gamma \tilde{E} - \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) (2\tilde{V}_r^2 + \tilde{V}_i^2 + \tilde{k}) & \gamma \tilde{V}_r \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\tilde{V}_z \tilde{V}_\theta & \tilde{V}_\theta & \tilde{V}_z & 0 & 0 \\ \left(\frac{\gamma-3}{2}\right) \tilde{V}_\theta^2 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) (\tilde{V}_z^2 + \tilde{V}_r^2) & (1-\gamma) \tilde{V}_z & (3-\gamma) \tilde{V}_\theta & (1-\gamma) \tilde{V}_r & \gamma-1 \\ -\tilde{V}_\theta \tilde{V}_r & 0 & \tilde{V}_r & \tilde{V}_\theta & 0 \\ -\gamma \tilde{V}_\theta \tilde{E} + (\gamma-1) \tilde{V}_\theta \left(\tilde{V}_i^2 + \frac{\tilde{k}}{2}\right) & (1-\gamma) \tilde{V}_z \tilde{V}_\theta & \gamma \tilde{E} - \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) (2\tilde{V}_\theta^2 + \tilde{V}_i^2 + \tilde{k}) & (1-\gamma) \tilde{V}_\theta \tilde{V}_r & \gamma \tilde{V}_\theta \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{L}} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{V}_z \tilde{V}_r & \tilde{V}_r & 0 \\ -2\tilde{V}_r \tilde{V}_\theta & 0 & 2\tilde{V}_r & \dots \\ \tilde{V}_\theta^2 - \tilde{V}_r^2 - \omega^2 r^2 & 0 & -2\tilde{V}_\theta - 2\omega r \\ -\gamma \tilde{V}_r \tilde{E} + (\gamma-1) \tilde{V}_r \left(\tilde{V}_i^2 + \frac{\tilde{k}}{2}\right) & (1-\gamma) \tilde{V}_z \tilde{V}_r & (1-\gamma) \tilde{V}_\theta \tilde{V}_r \\ 1 & 0 \\ \tilde{V}_z & 0 \\ \dots & 2\tilde{V}_\theta + 2\omega r & 0 \\ 2\tilde{V}_r & 0 \\ \gamma \tilde{E} - \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) (2\tilde{V}_r^2 + \tilde{V}_i^2 + \tilde{k}) - \omega^2 r^2 & \gamma \tilde{V}_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{S}}_b &= \begin{bmatrix} \frac{1}{b} \left( \bar{\rho} \tilde{V}_z \right) \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{1}{b} \left( \bar{\rho} \tilde{V}_r \right) \frac{\partial b}{\partial r} \\ \frac{1}{b} \left( \bar{\rho} \tilde{V}_z \tilde{V}_z + \bar{p} \right) \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{1}{b} \left( \bar{\rho} \tilde{V}_r \tilde{V}_z \right) \frac{\partial b}{\partial r} - f_{bz} \\ \frac{1}{b} \left( \bar{\rho} \tilde{V}_z \tilde{V}_\theta \right) \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{1}{b} \left( \bar{\rho} \tilde{V}_r \tilde{V}_\theta \right) \frac{\partial b}{\partial r} - f_{b\theta} \\ \frac{1}{b} \left( \bar{\rho} \tilde{V}_z \tilde{V}_r \right) \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{1}{b} \left( \bar{\rho} \tilde{V}_r \tilde{V}_r + \bar{p} \right) \frac{\partial b}{\partial r} - f_{br} \\ \frac{1}{b} \left( \bar{\rho} \tilde{V}_z \tilde{H} \right) \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{1}{b} \left( \bar{\rho} \tilde{V}_r \tilde{H} \right) \frac{\partial b}{\partial r} - f_{bh} \end{bmatrix} \\
\mathbf{S}_{bp} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{b} \left( \overline{\rho V_z'' V_z''} \right) \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{1}{b} \left( \overline{\rho V_r'' V_z''} \right) \frac{\partial b}{\partial r} \\ \frac{1}{b} \left( \overline{\rho V_z'' V_\theta''} \right) \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{1}{b} \left( \overline{\rho V_r'' V_\theta''} \right) \frac{\partial b}{\partial r} \\ \frac{1}{b} \left( \overline{\rho V_z'' V_r''} \right) \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{1}{b} \left( \overline{\rho V_r'' V_r''} \right) \frac{\partial b}{\partial r} \\ \frac{1}{b} \left( \overline{\rho V_z'' H''} \right) \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{1}{b} \left( \overline{\rho V_r'' H''} \right) \frac{\partial b}{\partial r} \end{bmatrix} \\
\mathbf{S}_{dp} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial(\rho V_z'' V_z'' - \overline{\rho V_z'' V_z''})}{\partial z} + \frac{\partial(\rho V_r'' V_z'' - \overline{\rho V_r'' V_z''})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho V_\theta'' V_z'' - \overline{\rho V_\theta'' V_z''})}{\partial \theta} - \frac{(\gamma-1)}{2} \frac{\partial(\rho V_k'' V_k'' - \overline{\rho V_k'' V_k''})}{\partial z} \\ \frac{\partial(\rho V_\theta'' V_z'' - \overline{\rho V_\theta'' V_z''})}{\partial z} + \frac{\partial(\rho V_r'' V_\theta'' - \overline{\rho V_r'' V_\theta''})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho V_\theta'' V_\theta'' - \overline{\rho V_\theta'' V_\theta''})}{\partial \theta} - \frac{(\gamma-1)}{2r} \frac{\partial(\rho V_k'' V_k'' - \overline{\rho V_k'' V_k''})}{\partial \theta} \\ \frac{\partial(\rho V_r'' V_z'' - \overline{\rho V_r'' V_z''})}{\partial z} + \frac{\partial(\rho V_r'' V_r'' - \overline{\rho V_r'' V_r''})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho V_\theta'' V_r'' - \overline{\rho V_\theta'' V_r''})}{\partial \theta} - \frac{(\gamma-1)}{2} \frac{\partial(\rho V_k'' V_k'' - \overline{\rho V_k'' V_k''})}{\partial r} \\ \frac{\partial(\rho V_z'' H'' - \overline{\rho V_z'' H''})}{\partial z} + \frac{\partial(\rho V_r'' H'' - \overline{\rho V_r'' H''})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho V_\theta'' H'' - \overline{\rho V_\theta'' H''})}{\partial \theta} - \frac{(\gamma-1)}{2} \frac{\partial(\tilde{V}_j (\rho V_k'' V_k'' - \overline{\rho V_k'' V_k''}))}{\partial s_j} \end{bmatrix} \\
\mathbf{S}_{tp} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2\pi b} \left[ \left( \rho V_z'' V_z'' - \overline{\rho V_z'' V_z''} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \left( \rho V_r'' V_z'' - \overline{\rho V_r'' V_z''} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \left( \rho V_\theta'' V_z'' - \overline{\rho V_\theta'' V_z''} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right. \\ \left. - \frac{(\gamma-1)}{2} \left( \rho V_k'' V_k'' - \overline{\rho V_k'' V_k''} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]_p \\ \frac{1}{2\pi b} \left[ \left( \rho V_z'' V_\theta'' - \overline{\rho V_z'' V_\theta''} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \left( \rho V_r'' V_\theta'' - \overline{\rho V_r'' V_\theta''} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \left( \rho V_\theta'' V_\theta'' - \overline{\rho V_\theta'' V_\theta''} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right. \\ \left. - \frac{(\gamma-1)}{2} \left( \rho V_k'' V_k'' - \overline{\rho V_k'' V_k''} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right]_p \\ \frac{1}{2\pi b} \left[ \left( \rho V_z'' V_r'' - \overline{\rho V_z'' V_r''} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \left( \rho V_r'' V_r'' - \overline{\rho V_r'' V_r''} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \left( \rho V_\theta'' V_r'' - \overline{\rho V_\theta'' V_r''} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right. \\ \left. - \frac{(\gamma-1)}{2} \left( \rho V_k'' V_k'' - \overline{\rho V_k'' V_k''} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right]_p \\ \frac{1}{2\pi b} \left[ \left( \rho V_z'' H'' - \overline{\rho V_z'' H''} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \left( \rho V_r'' H'' - \overline{\rho V_r'' H''} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \left( \rho V_\theta'' H'' - \overline{\rho V_\theta'' H''} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right. \\ \left. - \frac{(\gamma-1)}{2} \tilde{V}_j \left( \rho V_k'' V_k'' - \overline{\rho V_k'' V_k''} \right) \frac{\partial \theta}{\partial s_j} \right]_p \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{S}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{[\rho V_r'' V_z'' - \rho V_r'' V_z'']}{r} \\ -2 \frac{[\rho V_r'' V_\theta'' - \rho V_r'' V_\theta'']}{r} \\ \frac{[\rho V_\theta'' V_\theta'' - \rho V_\theta'' V_\theta'']}{r} \quad - \frac{[\rho V_r'' V_r'' - \rho V_r'' V_r'']}{r} \\ -\frac{(1-\gamma)}{2} \frac{[\tilde{V}_r (\rho V_k'' V_k'' - \rho V_k'' V_k'')]}{r} \quad - \frac{[\rho V_r'' H'' - \rho V_r'' H'']}{r} \end{bmatrix}$$

## 5.5 Discussion du système aux perturbations

Les systèmes d'équations (5.22) et (5.23) sont deux formes distinctes d'un même système d'équations non-linéaires et tridimensionnelles, ne comportant aucune hypothèse additionnelle. Dans les deux cas, le membre de gauche représente une forme quasi-linéaire vis-à-vis des perturbations  $\mathbf{U}'$ , c'est-à-dire linéaire pour un écoulement moyen connu. Le membre de droite reprend quant à lui des termes non-linéaires, ainsi que la force des aubes en ce qui concerne la première forme.

La différence entre les deux expressions concerne donc les termes de force des aubes. Comparant les expressions (5.22) et (5.23), l'égalité suivante apparaît.

$$\underbrace{\tilde{\mathbf{S}}_b}_{\text{moyen}} + \underbrace{\mathbf{S}_{bp}}_{\text{non-linéaire}} = -\frac{1}{\frac{2\pi}{N}b} \left[ \left( \tilde{\mathbf{F}} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \tilde{\mathbf{G}} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \tilde{\mathbf{H}} \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) \mathbf{U}' \right]_p^s - \underbrace{\mathbf{S}_{tp}}_{\text{non-linéaire}} \quad (5.24)$$

Ainsi, nous voyons qu'à la condition de négliger les termes non-linéaires, l'effet des aubes, qui apparaît sous forme moyenne dans le membre de gauche de (5.24), peut être exprimé par une fonction linéaire des perturbations des inconnues conservatives. Physiquement, il est logique que l'effet des aubes puisse s'exprimer en fonction des perturbations circonférentielles puisque celles-ci sont générées par la présence de l'aube. Mathématiquement, il ne pouvait en être autrement puisque l'expression (5.22) a été obtenue en retranchant la composante moyenne de l'écoulement au système tridimensionnel.

Comme entame de la discussion de ce système d'ordre supérieur, nous allons procéder à une décomposition en série de Fourier du vecteur des variables conservatives.

### 5.5.1 Développement en série

Soit le développement en série de Fourier dans la direction circonférentielle du vecteur des perturbations des inconnues conservatives.

$$\mathbf{U}'(r, \theta, z) = \sum_n \mathbf{U}'_n(r, z) e^{i\omega_n \theta} \quad (5.25)$$

Substituant le développement (5.25) dans les équations (5.22) et (5.23), nous obtenons les expressions suivantes.

$$\sum_n \left[ \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{U}'_n}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{U}'_n}{\partial r} + \frac{i\omega_n}{r} \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{U}'_n + \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{U}'_n \right] e^{i\omega_n \theta} = \underbrace{\tilde{\mathbf{S}}_b}_{\text{moyen}} + \underbrace{\mathbf{S}_{bp} - \mathbf{S}_{dp} + \mathbf{S}_p}_{\text{non-linéaire}} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \sum_n \left[ \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{U}'_n}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{U}'_n}{\partial r} + \frac{i\omega_n}{r} \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{U}'_n + \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{U}'_n \right] e^{i\omega_n \theta} &+ \frac{1}{\frac{2\pi}{N}b} \sum_n \left[ \left( \tilde{\mathbf{F}} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \tilde{\mathbf{G}} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \tilde{\mathbf{H}} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) \mathbf{U}'_n e^{i\omega_n \theta} \right]^s \\ &= \underbrace{-\mathbf{S}_{tp} - \mathbf{S}_{dp} + \mathbf{S}_p}_{\text{non-linéaire}} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Lors du chapitre précédent, nous avons mentionné le problème que représentait l'expression des conditions limites azimuthales, empêchant une résolution séparée des modes de Fourier. Nous constatons, par l'observation de (5.26) et (5.27) que le système à résoudre lui-même n'est pas homogène, interdisant une séparation des termes de la série. Dans la suite, nous allons analyser les sources de cette non-homogénéité.

### 5.5.2 Termes non-linéaires

Seuls les membres de gauche de (5.22) et (5.23) ont été développés en série. En effet, le membre de droite reprend les termes non-linéaires. Non seulement développer ces termes et les regrouper par fréquence de Fourier nécessiterait une identification complexe mais présenterait, comme l'affirmait Hall [19] pour l'expression des flux, un coût d'évaluation trop important.

Ces termes pourraient être négligés, c'est l'hypothèse qui est faite dans la méthode harmonique non-linéaire. Cependant, pour que cette hypothèse soit valide, il faut que les perturbations (et leurs dérivées) soient suffisamment inférieures aux grandeurs moyennes. Dans le cas de perturbations circonférentielles, il s'agit d'une hypothèse lourde. En effet, nous l'avons vu au chapitre 1, les variations de l'écoulement par rapport à la moyenne peuvent être importantes, allant même jusqu'à égaler cette dernière à la paroi de l'aube en cas de calcul visqueux.

A priori, ces termes semblent donc devoir être conservés. Cependant, tels quels, ils participent à l'impossibilité de séparer les résolutions modales. Pour résoudre ce problème, il est donc nécessaire de les développer en série de Fourier. Les termes non-linéaires devront apparaître sous la forme suivante.

$$\mathbf{S}(r, \theta, z) = \sum_n \mathbf{S}_n(r, z) e^{i\omega_n \theta} \quad (5.28)$$

A moins d'identifier les coefficients de Fourier des termes non-linéaires en fonction des inconnues conservatives, ce que nous avons affirmé être chose malaisée, le système est insoluble. Pour y remédier, il faut alors recourir à la méthode qu'emploie Hall pour estimer ses vecteurs de flux, du moins en partie. Nous connaissons l'expression de ces termes non-linéaires en fonction des inconnues conservatives dans l'espace physique. Dès lors, au cours d'un processus itératif, supposons connu le vecteur  $\mathbf{U}'_n$  à l'itération  $m$ . Il est alors possible de recourir à la transformation inverse de Fourier pour retourner dans l'espace physique. Les termes non-linéaires peuvent alors être calculés puis convertis en coefficients de Fourier. Il agiront alors comme termes sources à l'itération  $m + 1$ .

Cette façon de procéder présente l'inconvénient de devoir recourir aux transformations de Fourier en cours de processus itératif. Elle permet cependant d'inclure toutes les non-linéarités au sein de la méthode de He.

Il existe une alternative. Billson [6] propose et valide<sup>1</sup> une expression simplifiée des termes non-linéaires dans l'espace physique, obtenue en négligeant les triples produits de fluctuations, les perturbations de température et les fluctuations de densité. Dans ce cas, les termes non-linéaires se réduisent à des doubles produits de fluctuation de vitesse. Ces formulations étant simplifiées, il serait plus aisé d'exprimer les termes sources dans l'espace fréquentiel en fonction des coefficients de Fourier des inconnues conservatives, évitant les transformations de Fourier.

### 5.5.3 La force des aubes

La force des aubes apparaît également comme un terme non-homogène. Dans la formulation (5.26), il est vu comme un terme moyen, ne permettant donc pas de développement en série de Fourier. L'expression (5.27) par contre, inclut la force des aubes comme une fonction des perturbations possédant une partie linéaire et une autre non-linéaire, dont le cas a été traité ci-dessus.

La partie linéaire de la force des aubes est rappelée ci-dessous.

$$\frac{1}{\frac{2\pi}{N}b} \sum_n \left[ \left( \tilde{\mathbf{F}} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \tilde{\mathbf{G}} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \tilde{\mathbf{H}} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) \mathbf{U}'_n e^{i\omega_n \theta} \right]_p^s \quad (5.29)$$

Mathématiquement, cette expression provient de l'opération de dérivation de l'écoulement sur un intervalle non périodique  $[\theta_p, \theta_s]$ . Physiquement, il traduit l'influence des aubes sur l'écoulement perturbé dans le passage inter-aubes.

Quoiqu'il en soit, étant donné que la perturbation  $\mathbf{U}'$  doit être évaluée en  $\theta_p$  et  $\theta_s$ , l'expression (5.29) se développe de la manière suivante.

$$\frac{1}{\frac{2\pi}{N}b} \sum_n \left[ \left( \tilde{\mathbf{F}} \frac{\partial \theta_s}{\partial z} + \tilde{\mathbf{G}} \frac{\partial \theta_s}{\partial r} + \frac{1}{r} \tilde{\mathbf{H}} \frac{\partial \theta_s}{\partial \theta} \right) e^{i\omega_n \theta_s} - \left( \tilde{\mathbf{F}} \frac{\partial \theta_p}{\partial z} + \tilde{\mathbf{G}} \frac{\partial \theta_p}{\partial r} + \frac{1}{r} \tilde{\mathbf{H}} \frac{\partial \theta_p}{\partial \theta} \right) e^{i\omega_n \theta_p} \right] \mathbf{U}'_n \quad (5.30)$$

La force des aubes, du moins la partie linéaire, prend donc une forme analogue aux conditions limites circonférentielles (4.23) présentées au chapitre précédent, ce qui est logique puisqu'elles traduisent le même fait, l'imperméabilité de l'aube ou l'apériodicité azimutale de l'écoulement dans un canal inter-aubes.

### 5.5.4 Proposition de solution

Le problème posé est dès lors assez clair. D'un point de vue mathématique, afin de résoudre le système aux perturbations par superposition modale, il est nécessaire de rendre l'écoulement périodique<sup>2</sup>. D'un point de vue physique, il faut s'affranchir de toute condition limite sur l'aube, c'est-à-dire rendre l'aube perméable. En d'autres termes, il faut supprimer l'application

<sup>1</sup>Il teste sa formulation sur le calcul du mélange de deux écoulements, l'un entrant dans le domaine à un nombre de Mach de 0.5, l'autre à 0.25. Billson reconnaît qu'il n'a pas testé sa formulation sur des écoulements à des nombres de Mach plus élevés.

<sup>2</sup>Déplacer l'aube au milieu du domaine de calcul rendrait celui-ci périodique mais introduirait une zone de discontinuité et d'absence d'écoulement. Nous incorporons donc cette configuration à la classe de problèmes que nous appelons non-périodiques.

de conditions locales (i.e. en certains  $\theta_i$ ) tout en conservant l'effet des aubes puisqu'elles sont à l'origine des perturbations circonférentielles.

Selon ce raisonnement, la force des aubes doit apparaître comme un terme source dans le système d'équations aux perturbations, et ce de manière décomposable en série de Fourier (i.e. par une expression similaire à (5.28)). Les aubes doivent donc être remplacées par un champ de force tridimensionnel qui conduit l'écoulement à respecter une condition d'imperméabilité fictive. Ce champ de force doit de plus ne pas être localisé aux parois fictives des aubes, ce qui correspondrait à deux fonctions de Dirac (l'une à l'extrados et l'autre à l'intrados), mais être "répandu" autour de la position fictive de l'aube, de manière à fournir une décomposition spectrale de bande passante limitée.

Ainsi, chaque mode serait résolu par un calcul méridien distinct correspondant à une composante fréquentielle du champ de force. Cette formulation s'inscrit en ligne directe de la méthode de He, puisque le système aux perturbations peut être vu comme une superposition de problèmes d'ordre inférieur dans le domaine fréquentiel, et donc résolu par la même technique que le système moyen, lui-même correspondant à la partie moyenne du champ de force.

Ces idées font partie intégrante de la méthode dite de frontière immergée ("Immersed Boundary Method"), où le corps plongé dans un fluide apparaît sous forme d'un champ de force. Celui-ci agit sur le domaine fluide défini sur un maillage ne se conformant pas au corps. Le corps solide n'apparaît plus explicitement, ni les conditions limites correspondantes. La clé de cette méthode est la transposition des conditions limites reproduisant le corps afin d'en traduire l'effet sur un maillage recouvrant à la fois les domaines fluide et solide.

Le chapitre suivant est consacré à la présentation de cette méthode et à son illustration sur un exemple simple. Ensuite, nous montrerons que l'utilisation de cette technique de reproduction du corps permet d'appliquer la méthode de He au cas du modèle méridien.

## Chapitre 6

# La méthode de frontière immergée

Charles Peskin [42] développe une méthode (1972) destinée à faciliter le traitement de problèmes d'interaction fluide-structure, qu'il applique en dynamique des fluides biologiques (écoulement du sang dans le coeur). Sa méthode met en jeu deux maillages. Le premier est un maillage fixe représentant tout le domaine de calcul (maillage dit "eulérien"). Le deuxième est un maillage curviligne mobile et déformable suivant le mouvement du corps (maillage dit "lagrangien"). Ces deux maillages sont totalement indépendants et l'information se transmet de l'un à l'autre au moyen d'une équation d'interaction qui inclut une fonction de distribution (approximation lissée de la fonction de Dirac), qui répartit l'information de la présence du corps sur le domaine. Le maillage lagrangien bouge librement sur le maillage cartésien, sans obligation de s'y adapter. Il s'agit d'une méthode de maillage non-conforme.

Par la suite, une autre catégorie de méthodes, dites "méthodes de maillage cartésien" ont vu le jour. Elles reprennent l'idée de Peskin et l'appliquent au calcul d'écoulements sur des corps de géométrie complexe sur un simple maillage cartésien. Dans la suite, nous regroupons sous l'appellation méthode "Immersed Boundary", ou méthode de "frontière immergée", les méthodes qui simulent des écoulements autour de frontières solides et auxquelles le maillage ne se conforme pas.

Au cours de ce chapitre, nous allons tout d'abord présenter la méthode de frontière immergée et le travail de quelques auteurs. Nous montrerons qu'elle remplit les critères d'une application au cas du méridien harmonique. Dans un deuxième temps, nous appliquerons cette méthode sur un exemple bidimensionnel. Son extension au cas harmonique fera l'objet du chapitre suivant.

### 6.1 Principe de la méthode

Classiquement, la résolution du problème de l'écoulement d'un fluide autour d'un corps se fait par résolution des équations de Navier-Stokes sur un domaine fluide  $\Omega_f$  borné notamment par la frontière solide  $\Gamma_b$  du corps, comme illustré à la figure 6.1 (haut). Dans ce cas, une étape importante et complexe de la résolution du problème est la génération du maillage. Les équations à résoudre sont alors discrétisées sur ce maillage et sont accompagnées de conditions limites, notamment sur le corps. Celles-ci sont aisément implémentées dans le code de calcul puisqu'elles font partie du domaine de calcul.



Par exemple, soit les équations et conditions limites suivantes, où  $\mathbf{U}$  est le vecteur des inconnues et  $\mathbf{L}(\mathbf{U})$  l'opérateur représentant les équations de Navier-Stokes.

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) = 0 \quad \text{sur } \Omega_f \quad (6.1)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_\Gamma \quad \text{sur } \Gamma_b \quad (6.2)$$

Les conditions limites sont donc imposées explicitement au cours du processus de résolution. C'est ce point qui représentait un obstacle à l'application directe de la méthode de He au cas du modèle méridien.

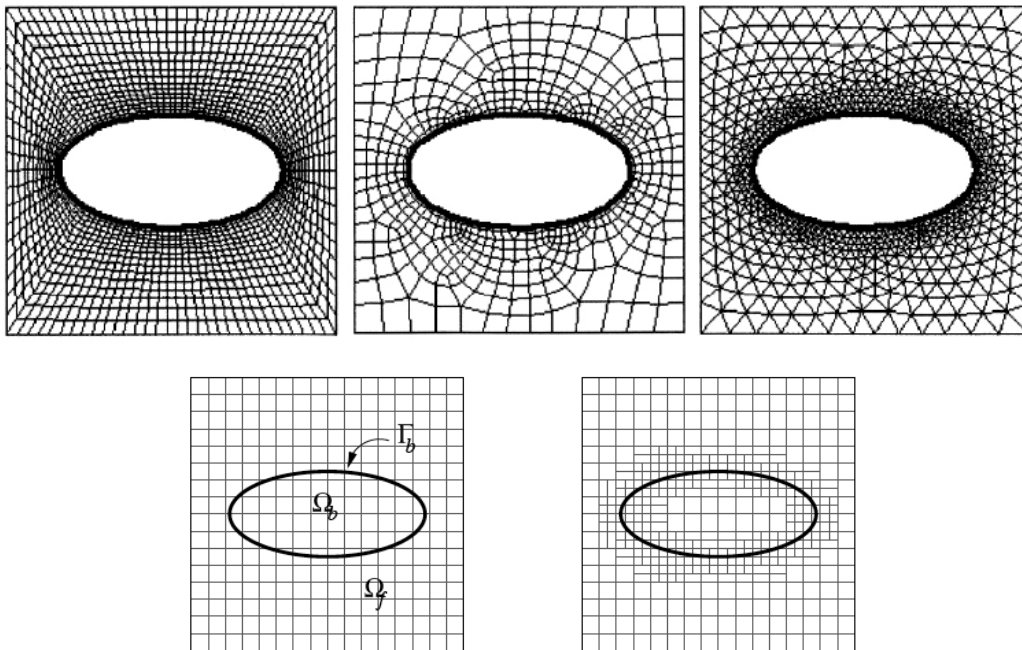


FIG. 6.1 – Exemples de maillages conformes (haut) et de maillages cartésiens (bas) [54].

Dans une méthode de frontière immergée par contre, il n'existe plus de restriction sur la forme du maillage, il peut être généré indépendamment de la forme du corps. Ceci est très avantageux en cas de corps mobile ou de géométrie complexe. Dans ce cas de maillage non-conforme, les conditions limites apparaissent indirectement, par une modification du système d'équations (6.1). Cette modification consiste en l'ajout d'un terme source dont le but est de reproduire l'effet du corps, c'est-à-dire l'effet de la condition limite (6.2). L'imposition des conditions limites est la clé de l'efficacité de la technique. C'est aussi par la façon d'imposer la présence du corps que les différentes méthodes se distinguent. Le terme source peut être introduit dans les équations de deux façons : continue ("Continuous forcing approach") ou discrète ("Discrete forcing approach").

## 6.2 Approche discrète

Dans l'approche discrète, les équations (6.1) sont d'abord discrétisées sur le maillage cartésien, sans prendre en compte les conditions limites, ce qui donne l'expression suivante.

$$[\mathbf{L}] \{\mathbf{U}\} = 0 \text{ sur } \Omega \quad (6.3)$$

Ensuite, la discrétisation est ajustée dans les régions proches des parois fictives pour prendre en compte leur présence. Ainsi, l'opérateur discrétisé  $[\mathbf{L}]$  devient un opérateur  $[\mathbf{L}']$  différent et l'effet des parois fictives est introduit par un terme  $\{\mathbf{r}\}$ , donnant lieu à l'expression suivante.

$$[\mathbf{L}'] \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{r}\} \text{ sur } \Omega \quad (6.4)$$

Cette approche discrète n'est pas universelle car elle dépend du schéma de discrétisation choisi. Cette vision de la méthode de frontière immergée se rapproche du cas de résolution sur maillage conforme. En effet, dans le cas discret, les équations sur le domaine fluide sont traitées en priorité. Ce n'est que dans un deuxième temps que les conditions limites sont ajoutées au sein de la discrétisation. Il apparaît donc une distinction entre le domaine fluide et le corps qui y est baigné, l'écoulement n'y étant d'ailleurs pas nécessairement résolu. Les conditions limites peuvent être imposées de manière indirecte, au travers d'une force, ou directe, par interpolation de l'écoulement sur les parois fictives puis correction de celui-ci. Ce dernier cas se rapproche fortement de la méthode classique sur maillage conforme.

Dans un cas comme dans l'autre, l'approche discrète nécessite une localisation explicite du corps immergé pour effectuer les modifications de la discrétisation des équations.

Le corollaire est que les conditions limites peuvent être imposées de manière plus précise, plus ponctuelle, et conviennent donc bien aux écoulements à haut nombre de Reynolds pour lesquels la couche limite est très localisée.

## 6.3 Approche continue

Dans l'approche continue, le terme source de force  $\mathbf{f}_b$  traduisant la présence du corps est inclu dans les équations continues (6.1), ce qui donne l'expression suivante à résoudre.

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) = \mathbf{f}_b \text{ sur } \Omega \quad (6.5)$$

Le système d'équations à résoudre est appliqué sur le domaine  $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_b$ , c'est-à-dire sur le maillage cartésien entier, y compris à l'intérieur du corps. C'est une différence majeure par rapport aux résolutions sur maillage conforme. Cette équation est ensuite discrétisée sur le maillage cartésien, menant à l'équation suivante qui sera résolue sur tout le domaine.

$$[\mathbf{L}] \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{f}_b\} \text{ sur } \Omega \quad (6.6)$$

Contrairement à l'approche discrète, l'approche continue ne distingue pas le domaine fluide du domaine solide. Les équations sont donc résolues sur le domaine cartésien entier. Ceci peut présenter un inconvénient puisqu'il est nécessaire de résoudre les équations sur un domaine solide qui, à priori, ne présente aucun intérêt. Cependant, en vue d'une extension à une méthode harmonique, c'est appréciable puisque le domaine peut être uniforme azimutalement et périodique. La présence des aubes est vue comme une information externe qui vient se superposer à l'écoulement défini sur un maillage quelconque. Ceci correspond à la philosophie

d'Adamczyk où le générateur de non-uniformité circonférentielle (l'aube) est une information d'ordre supérieur. Pour cette raison, c'est l'approche continue qui est choisie et approfondie dans la suite.

Cette approche s'applique différemment selon la nature du corps immergé : élastique ou rigide.

### 6.3.1 Frontières élastiques

La méthode initiale de Peskin s'inscrit dans cette catégorie. Elle avait pour but de faciliter les calculs d'interaction fluide-structure, notamment le couplage des équations solides aux équations fluides. La transmission de l'information du corps élastique au domaine fluide est effectué au moyen d'une loi constitutive comme celle de Hooke.

Soit  $(q, r, s)$  les coordonnées curvilignes d'un point de la surface du corps,  $\mathbf{X}(q, r, s, t)$  sa position au temps  $t$  dans l'espace cartésien,  $\mathbf{x}$  un point quelconque de l'espace cartésien,  $\mathbf{F}(q, r, s, t)$  la force élastique appliquée par le corps sur le fluide dans les coordonnées lagrangiennes. La relation qui lie cette force à son équivalent dans l'espace eulérien (le domaine cartésien)  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  est la suivante, où  $\delta$  est la fonction de Dirac.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{F}(q, r, s, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(q, r, s, t)) dq dr ds \quad (6.7)$$

Il s'agit de l'équation d'interaction entre les deux domaines.

En pratique, ces domaines sont discrétisés. Il s'ensuit qu'une fonction de Dirac ne pourra transmettre l'information que si les deux maillages coïncident. Or cela va à l'encontre de la philosophie de Peskin. La fonction  $\delta$  est donc remplacée par une fonction  $\delta_h$  qui est une approximation lissée de la fonction de Dirac. Elle permet de transmettre la force exercée par un nœud lagrangien aux nœuds eulériens adjacents, sans nécessiter une coïncidence de maillage, comme illustré à la figure 6.2. Pour être cohérente, cette fonction  $\delta_h$  doit satisfaire plusieurs conditions.

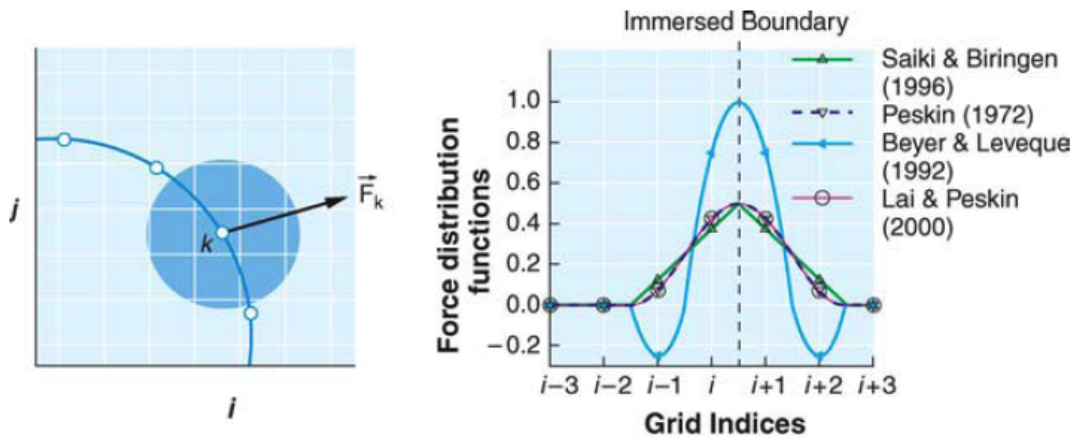


FIG. 6.2 – Transmission de l'information d'un maillage à l'autre. [36].

**Construction de  $\delta_h$** 

Supposons que la fonction tridimensionnelle  $\delta_h$  est donnée par un produit de fonctions d'une variable qui dépendent de la largeur de maille  $h$  de la manière suivante :

$$\delta_h(\mathbf{x}) = \frac{1}{h^3} \phi\left(\frac{x_1}{h}\right) \phi\left(\frac{x_2}{h}\right) \phi\left(\frac{x_3}{h}\right), \quad (6.8)$$

où  $x_1, x_2, x_3$  sont les composantes cartésiennes de  $\mathbf{x}$ . Cette formulation n'est pas essentielle mais permet la simplification du raisonnement à une dimension. La dépendance vis-à-vis du maillage exprimée par (6.8) permet de retrouver naturellement la fonction de Dirac comme une limite pour  $h$  tendant vers 0.

En fonction de cela, les postulats suivants peuvent être énoncés en termes de fonction  $\phi(r)$ , où  $r$  désigne  $x_1/h$ ,  $x_2/h$  ou  $x_3/h$ . Ces conditions à satisfaire sont les suivantes, exprimées en langage discret.

$$\phi(r) \text{ est continue pour tout réel } r \quad (6.9)$$

$$\phi(r) = 0 \text{ pour } |r| \geq 2 \quad (6.10)$$

$$\sum_j \phi(r - j) = 1 \text{ pour tout réel } r \quad (6.11)$$

$$\sum_j (r - j)\phi(r - j) = 0 \text{ pour tout réel } r \quad (6.12)$$

La condition de continuité (6.9) est utilisée pour permettre une transmission progressive de la force au domaine fluide, facilitant la résolution numérique.

La condition (6.10) de support compact est énoncée, à l'origine, pour des raisons d'efficacité de calcul, afin de limiter le nombre de points du maillage cartésien qui interagissent avec le maillage lagrangien. Peskin propose une borne égale à 2 parce qu'elle convient à son schéma de discrétisation. La condition pourrait cependant être exprimée plus généralement pour  $|r| \geq C$  où  $C$  est une constante déterminée par l'utilisateur. D'un autre côté, il est logique de limiter l'extension de la fonction, puisqu'elle est censée approcher une fonction ponctuelle.

La condition (6.11) exprime la conservation de la force lors de la distribution sur le maillage cartésien.

La dernière condition exprime la surface comme le centre de gravité de la distribution de la force qu'elle génère, ce qui permet de ne pas créer de couple parasite par la distribution.

Peskin propose la fonction suivante.

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{4} (1 + \cos(\frac{\pi r}{2})), & \text{si } |r| \leq 2 \\ 0, & \text{si } |r| > 2 \end{cases} \quad (6.13)$$

Il existe plusieurs fonctions  $\delta_h$ , les plus connues étant illustrées à la figure 6.2. Chaque point lagrangien (i.e. de la frontière solide) répand son effet sur le maillage eulérien au moyen de la fonction de distribution.

### 6.3.2 Frontières rigides

La méthode classique de Peskin utilise la loi de Hooke, adaptée à un corps élastique, mais dont la limite pour un corps rigide pose problème. Dans le cas d'un corps rigide, il ne s'agit plus d'un problème d'interaction fluide-structure nécessitant une loi de comportement du solide immergé. Une condition limite d'imperméabilité ou de non-glissement suffit dès lors pour traduire son influence sur l'écoulement.

Plusieurs auteurs se sont intéressés à la manière de formuler une force externe qui permettrait de satisfaire les conditions d'imperméabilité ou de non-glissement sur les parois fictives. Dans la suite, nous nous intéresserons plus particulièrement aux méthodes de Goldstein [17], Khadra [30] et Mohd-Yusof [37].

### 6.3.3 Méthode de Goldstein

Goldstein [17] inclut le calcul de la force  $\mathbf{f}_b$  au sein du processus itératif de résolution. Il résout les équations de Navier-Stokes et souhaite donc que l'effet des parois fictives soit l'arrêt total du fluide. Pour ce faire, il utilise un procédé de régulation de la vitesse du fluide en différents points  $\mathbf{x}_s$  du corps solide. Sa formulation de la force est la suivante, où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux paramètres déterminés par l'utilisateur et  $\mathbf{V}$  est la vitesse du fluide.

$$\mathbf{f}_b(\mathbf{x}_s, t) = \alpha \int_0^t \mathbf{V}(\mathbf{x}_s, t) dt + \beta \mathbf{V}(\mathbf{x}_s, t) \quad (6.14)$$

La force externe est donc dictée par un contrôleur composé d'un terme proportionnel et d'un terme intégral, dont la consigne de régulation est une vitesse nulle aux points  $\mathbf{x}_s$ .

L'inconvénient majeur de cette méthode est que le terme intégral de (6.14) introduit une condition de stabilité sur le pas de temps  $\Delta t$  entre les itérations, laquelle est dans la plupart des cas plus restrictive que la condition CFL intrinsèque aux schémas d'intégration explicite d'équations hyperboliques.

Goldstein utilisant une méthode de résolution spectrale (collocation), la force calculée est ensuite distribuée aux points du maillage cartésien par une distribution spatiale  $\delta_h$  gaussienne centrée en  $\mathbf{x}_s$ , censée répartir l'effet de manière douce. L'application de la force génère pourtant des oscillations. Il filtre donc les coefficients de Fourier de l'écoulement par un filtre passe-bas. Il mentionne qu'un lissage de la force peut être envisagé, mais ne l'applique pas.

Enfin, Goldstein apporte certaines critiques à sa méthode. Calculer une force précise n'est pas évident étant donné que la vitesse  $\mathbf{V}$  est mesurée sur le maillage cartésien et n'est donc pas forcément connue avec précision sur le maillage lagrangien, non-coïncident. Ensuite, la force devant être lissée avant transmission au maillage eulérien, son effet en est répandu, ce qui rend difficile la traduction d'effets localisés. Néanmoins, cette méthode peut fournir une bonne approximation de l'écoulement autour du corps.

### 6.3.4 Méthode de Khadra

Khadra [30] utilise le concept de milieu poreux pour définir le terme de force. Il considère le domaine entier  $\Omega$  comme l'union de différents milieux : fluide  $\Omega_f$ , poreux  $\Omega_p$  et solide  $\Omega_b$ . Chacun des milieux est caractérisé par une constante de perméabilité  $K(\mathbf{x})$ .

$$K(\mathbf{x}) = \begin{cases} K_f & \rightarrow \infty & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_f \\ K_p & & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_p \\ K_b & \rightarrow 0^+ & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_b \end{cases} \quad (6.15)$$

Les milieux fluide et solide apparaissent donc comme limites d'un milieu poreux. La méthode consiste ensuite à ajouter un terme de traînée aux équations de Navier-Stokes définies sur le domaine  $\Omega$ . Ce terme représente l'action du milieu poreux fictif sur l'écoulement et est défini ci-dessous, où  $\mu$  est la viscosité du fluide et  $\mathbf{V}$  sa vitesse.

$$\left(\frac{\mu}{K}\right) \mathbf{V} \quad (6.16)$$

Cette expression lui permet de définir une condition de non-glissement sur un corps solide par pénalisation sur la vitesse. Il applique cette méthode en volumes-finis, tout volume appartenant au moins en partie au corps étant affublé d'une constante de perméabilité  $K_b$ . Un maillage suffisamment fin est donc nécessaire pour définir les frontières solides.

Cette méthode est en fait un cas particulier de celle de Goldstein pour  $\alpha = 0$  et  $\beta = \frac{\mu}{K}$ . Elle en possède donc certains défauts. En effet, une variation brutale de la perméabilité mène à un problème presque discontinu et difficile à résoudre tandis qu'une application trop progressive modélise mal une couche limite fine.

### 6.3.5 Méthode de Mohd-Yusof

Mohd-Yusof [37] définit un terme source de force qui lui permet d'imposer directement la valeur de certaines inconnues (les composantes de vitesse) au droit des frontières fictives  $\Gamma_b$ . Soit les équations de Navier-Stokes discrétisées par rapport au temps, où  $\mathbf{U}$  est le vecteur des inconnues,  $\mathbf{R}(\mathbf{U})$  le vecteur de résidu spatial et  $\mathbf{F}$  le terme source de force.

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} = \mathbf{R}(\mathbf{U}^n) + \mathbf{F} \quad (6.17)$$

Mohd-Yusof souhaite imposer la valeur  $\mathbf{V}$  aux inconnues  $\mathbf{U}$  sur les frontières  $\Gamma_b$ . Les équations (6.17) peuvent être réarrangées de la manière suivante.

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t [\mathbf{R}(\mathbf{U}^n) + \mathbf{F}] \quad (6.18)$$

Dès lors, si le résidu spatial  $\mathbf{R}(\mathbf{U})$  est connu à l'itération  $n$ , alors le terme de force est le suivant.

$$\mathbf{F} = \begin{cases} -\mathbf{R}(\mathbf{U}^n) + \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{V} - \mathbf{U}^n) & \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma_b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (6.19)$$

En pratique, Mohd-Yusof utilise une méthode spectrale pour résoudre l'écoulement. Pour éviter d'introduire un contenu fréquentiel trop riche, il transmet cette force au travers d'une fonction de Dirac lissée. Cette méthode a l'avantage d'être très simple à implémenter et de ne pas introduire de limite de stabilité.

## 6.4 Synthèse de la méthode de frontière immergée

L'idée de base de Peskin est de définir un domaine de calcul très général puis de venir rajouter par dessus celui-ci, un domaine secondaire, le corps, apportant une information de modification de l'écoulement uniforme. La méthode de Peskin est très générale et offre des avantages qui sont recherchés dans plusieurs domaines. Il l'a lui-même appliquée aux problèmes d'interaction fluide-structure. Elle a ensuite été reprise pour calculer l'écoulement autour de corps de géométrie complexe pour lesquels il est difficile de générer un maillage.

L'imposition des conditions limites n'est pas directe. Il existe plusieurs méthodes pour appliquer celles-ci, aucune n'étant universelle. La méthode la plus appropriée dépend de l'usage que l'on souhaite faire de la technique.

L'approche discrète permet un contrôle sur la qualité de résolution près de l'aube, cette dernière pouvant apparaître explicitement au travers d'interpolations du maillage cartésien. Son principe se rapproche donc d'une résolution en maillage conforme, si ce n'est que ce sont les équations qui sont modifiées pour reproduire le corps, non le maillage. Elle en tire donc une propriété avantageuse, qui est la gestion efficace des écoulements à haut nombre de Reynolds, qui requièrent une localisation précise des parois. Cependant, cette approche ne peut nous convenir puisqu'il y est requis de localiser explicitement l'aube.

Nous nous orienterons plutôt vers l'approche continue. Celle-ci satisfait nos exigences en vue d'une résolution harmonique. En effet, elle permet un calcul sur un maillage uniforme azimuthalement sur lequel vient se superposer une distribution de force. De plus, pour l'application au cas harmonique, nous reprenons l'idée de Peskin d'utiliser une fonction de Dirac lissée. Il ne s'agit pas seulement de répartir la force sur les points voisins du maillage eulérien mais aussi d'avoir une répartition douce de cette action. Celle-ci doit en effet être caractérisée par un spectre fréquentiel étroit, tout en offrant une définition suffisamment fine de l'aube. Ce sont là deux critères opposés, qui mèneront à un compromis.

Le corollaire est qu'il faut s'attendre à ne pouvoir résoudre l'écoulement que de manière approximative. En effet, sans localisation explicite de l'aube, l'imposition des conditions limites est soumise au niveau de raffinement du maillage, par le calcul de la force mais aussi par la répartition de celle-ci sur le maillage cartésien. Cependant, notre optique est de résoudre le système d'ordre supérieur de manière approchée, avec comme paramètres le maillage et le nombre de modes de Fourier, une information approchée donnant de bons résultats, comme nous l'avons vu au chapitre 1.

Dans la suite, nous allons appliquer cette méthode sur un écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre dans le cas non-visqueux. Ceci nous permettra de mentionner quelques points importants de la méthode avant de la transposer au méridien harmonique.

## 6.5 Application à l'écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre

Dans cette deuxième partie de chapitre, nous allons présenter les points principaux de l'implémentation de la méthode de frontière immergée appliquée à un écoulement bidimensionnel résolu par la méthode des volumes finis. Il s'agit de l'écoulement autour d'un cylindre. Ce cas test a été choisi car il mène à de fortes variations de vitesse et de pression et représente donc un cas délicat à résoudre.

Nous tenons à attirer l'attention du lecteur sur le fait que cette méthode n'a pas encore été pleinement exploitée par l'auteur au moment d'écrire ces lignes. Ce qui suit constitue une première approche d'une méthode de frontière immergée. Néanmoins, certains résultats intéressants ont d'ores et déjà été obtenus.

Après avoir exposé brièvement la méthode de résolution, les résultats obtenus seront présentés et comparés aux résultats d'un calcul sur maillage conforme, effectué au moyen d'un code distinct.

### 6.5.1 Discrétisation du corps

La méthode de frontière immergée consiste à résoudre un problème d'interaction entre un corps, caractérisé par un maillage, et un domaine d'écoulement auquel correspond un second maillage. Ce paragraphe présente le premier, le second fera l'objet du paragraphe suivant.

La figure 6.3 représente un exemple de discrétisation du corps, un cylindre dans notre cas, par un maillage curviligne. Le corps est découpé en portions de courbe  $dS_k$ , chacune étant caractérisée par un point central d'indice  $k$ .

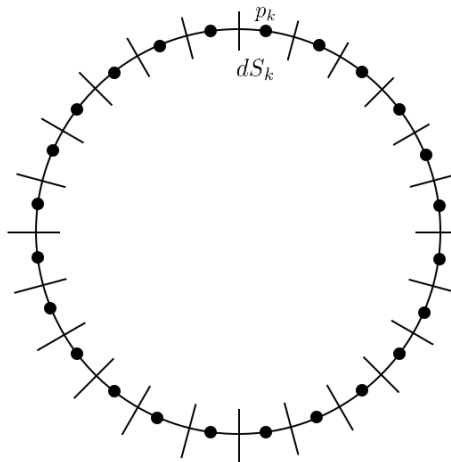


FIG. 6.3 – Discrétisation du corps.

Comme dans toute résolution numérique, la finesse du maillage est un paramètre déterminant pour la précision de la résolution. En effet, plus le corps sera discrétisé de manière fine, plus son influence sur le domaine fluide sera détaillée et précise.



### 6.5.2 Discrétisation du domaine

La seconde étape est la discrétisation du domaine fluide en lui-même. En réalité, ce domaine s'étend également à l'intérieur du corps fictif autour duquel l'écoulement doit être calculé. Ceci permet de générer un maillage cartésien très simple, sans tenir compte de la géométrie du corps<sup>1</sup>, ce qui représente l'avantage majeur de la méthode de frontière immergée. Pour obtenir une définition précise du corps fictif, obtenue par transfert d'information entre les maillages lagrangien et eulérien, ce dernier doit être raffiné dans la zone en question. Le contrôle de la résolution de maillage dans les zones proches de la paroi est plus coûteux en méthode de frontière immergée qu'en cas de domaine de calcul épousant la forme du corps. En effet, dans ce dernier cas, l'obtention d'un certain espacement dans la couche limite peut se faire par une adaptation du maillage dans la direction normale à l'aube. Dans le cas d'un maillage non-conforme par contre, il est nécessaire de raffiner celui-ci dans les deux directions. Ceci représente un inconvénient de la méthode.

Un exemple de discrétisation du domaine de calcul est présenté à la figure 6.4, la trace du corps étant superposée au maillage à titre indicatif. Le domaine couvre l'intervalle bidimensionnel  $[0, 20] \times [-4, 4]$ . Le cylindre est centré au point de coordonnées  $(10, 0)$  et est caractérisé par un diamètre de 3.

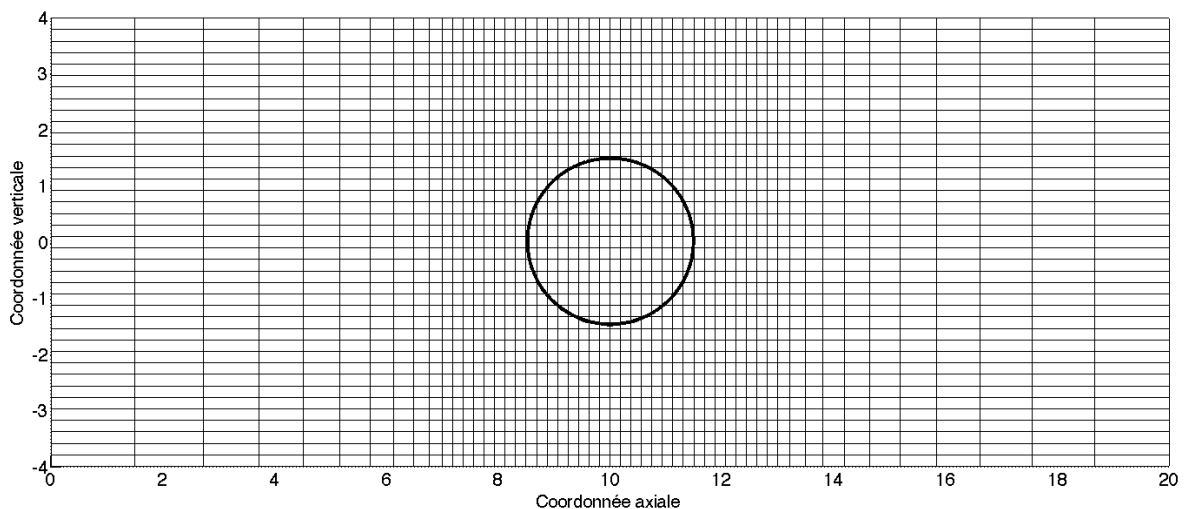


FIG. 6.4 – Exemple de discrétisation du domaine de calcul.

Lors de la résolution de l'écoulement, des conditions limites de périodicité seront appliquées aux frontières  $y = 4$  et  $y = -4$  du maillage, comme ce serait le cas pour le calcul d'un écoulement autour d'une aube de turbomachine.

### 6.5.3 Répartition de la force

L'étape suivante est la détermination de l'influence de chaque point  $k$  du corps sur chaque maille du domaine cartésien. Pour ce faire, il faut recourir à la fonction de distribution  $\delta_h$  correspondant à une approximation lissée de la fonction de Dirac. Il existe de nombreuses possibilités. Théoriquement, toute fonction satisfaisant les conditions (6.9) à (6.12) énoncées par Peskin est utilisable pour reproduire l'influence du corps. En pratique, ces conditions ont

<sup>1</sup>Il est tout de même tenu compte de la géométrie au travers de la nécessité de raffiner le maillage dans la région correspondante.

été énoncées pour une application de couplage fluide-structure. Ainsi, une condition comme (6.12) qui empêche la génération d'un couple mécanique parasite sur l'aube n'a plus la même signification dans le cas d'un corps rigide.

Néanmoins, dans le cas qui nous occupe, il reste tout de même à satisfaire les propriétés de répartition progressive, limitée et conservatrice de la force sur le maillage cartésien. En effet, plus la répartition sera douce, plus son spectre fréquentiel sera étroit, ce qui sera profitable lors de l'extension au cas harmonique. La distribution doit aussi être limitée, autrement dit à support compact, afin d'être capable de reproduire au mieux l'effet d'une paroi, qui est théoriquement localisée en un point.

Pour notre application, nous utiliserons une fonction cosinusoidale du type (6.13) décrite par Peskin, car elle satisfait bien nos exigences. Nous la modifions cependant légèrement afin de faire apparaître la largeur de son support sous forme d'un paramètre  $\epsilon$  modifiable par l'utilisateur. Elle est également normée pour que son intégrale sur un disque de diamètre  $2\epsilon$  soit unitaire.

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{(1 + \cos(\frac{\pi r}{\epsilon}))}{\epsilon^2 (\pi - \frac{4}{\pi})}, & \text{si } |r| \leq \epsilon \\ 0, & \text{si } |r| > \epsilon \end{cases} \quad (6.20)$$

Un exemple de la procédure de distribution de l'influence du corps sur le domaine de calcul est présenté à la figure 6.5. La frontière immergée apparaît comme une courbe discrétisée se superposant au maillage cartésien, l'indice  $k$  étant associé à une portion de la frontière immergée. Le disque apparaissant sur la figure représente le support de la fonction de distribution. Toute maille d'indice  $l$  du domaine cartésien étant couverte totalement ou partiellement par le disque centré sur le point  $k$  ressent l'influence de la portion de frontière immergée correspondante.

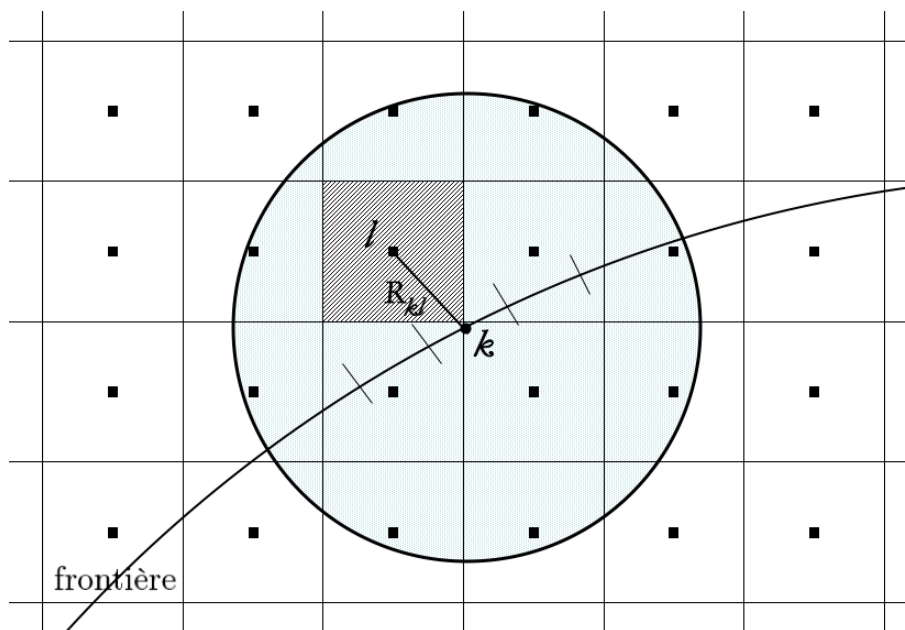


FIG. 6.5 – Projection de la frontière immergée sur le maillage cartésien.

La distribution du corps sur le domaine de calcul consiste donc en la construction d'une matrice d'influence  $[\delta_{lk}]$  du point frontière  $k$  sur la maille  $l$ . Cette transmission d'information d'un maillage à l'autre se fait en fonction de la distance  $r_{kl}$  séparant les points considérés. Il s'agit ensuite d'intégrer la portion de fonction couvrant chaque maille et de transmettre un certain poids  $\delta_{lk}$  au nœud de cette maille.

Afin de réaliser une distribution précise et conservative, nous procédons à une intégration par points de Gauss. Chaque maille est donc caractérisée par quatre points auxquels la fonction de distribution est évaluée. La figure 6.6 représente schématiquement les points de Gauss.

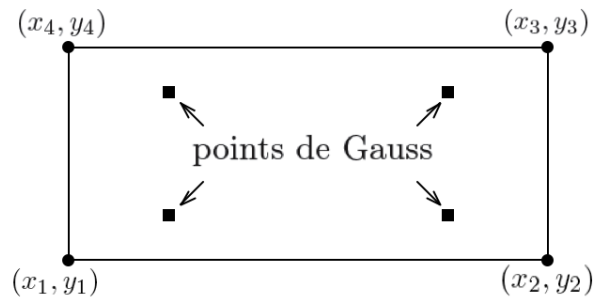


FIG. 6.6 – Points d'intégration de la fonction de distribution sur une maille.

Pour une maille définie de manière générale sur un intervalle  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , les points de Gauss se trouvent aux coordonnées  $(\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3})$ . Pour une maille d'intervalle quelconque comme illustré à la figure 6.6, une mise à l'échelle permet de disposer les points. L'expression d'un élément  $\delta_{lk}$  de la matrice d'influence est donné par 6.21, où  $i$  et  $j$  sont les indices des points de Gauss dans les directions horizontale et verticale et où  $r_{kij}$  est la distance du point  $k$  au point de Gauss  $ij$ .

$$\delta_{kl} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \phi(r_{kij}) \quad (6.21)$$

Ces termes sont calculés par unité de surface de chaque maille de telle manière que la somme des forces  $f_k$  s'appliquant sur chaque élément  $k$  du corps pondérée par la matrice d'influence  $\delta_{kl}$  fournisse la force surfacique  $f_l$  associée à chaque maille  $l$ , c'est-à-dire le terme source apparaissant dans une résolution par volumes finis. Ceci s'exprime par l'égalité suivante.

$$f_l = \sum_k f_k \delta_{kl} \quad (6.22)$$

L'intégration sur le domaine entier de la force surfacique s'appliquant sur chaque maille est alors égale à la force appliquée par le corps. Ainsi, si cette force est dénommée  $F$ , si la force surfacique associée à chaque maille  $l$  est nommée  $f_l$ , alors l'égalité suivante est vraie.

$$F = \sum_l f_l dS_l = \sum_l \sum_k f_k \delta_{kl} dS_l \quad (6.23)$$

Une illustration de la matrice d'influence est reprise à la figure 6.7. La quantité associée à chaque maille est ici la somme sur l'indice  $k$  de chaque composante  $\delta_{kl}$ . La trace du cylindre est également représentée.

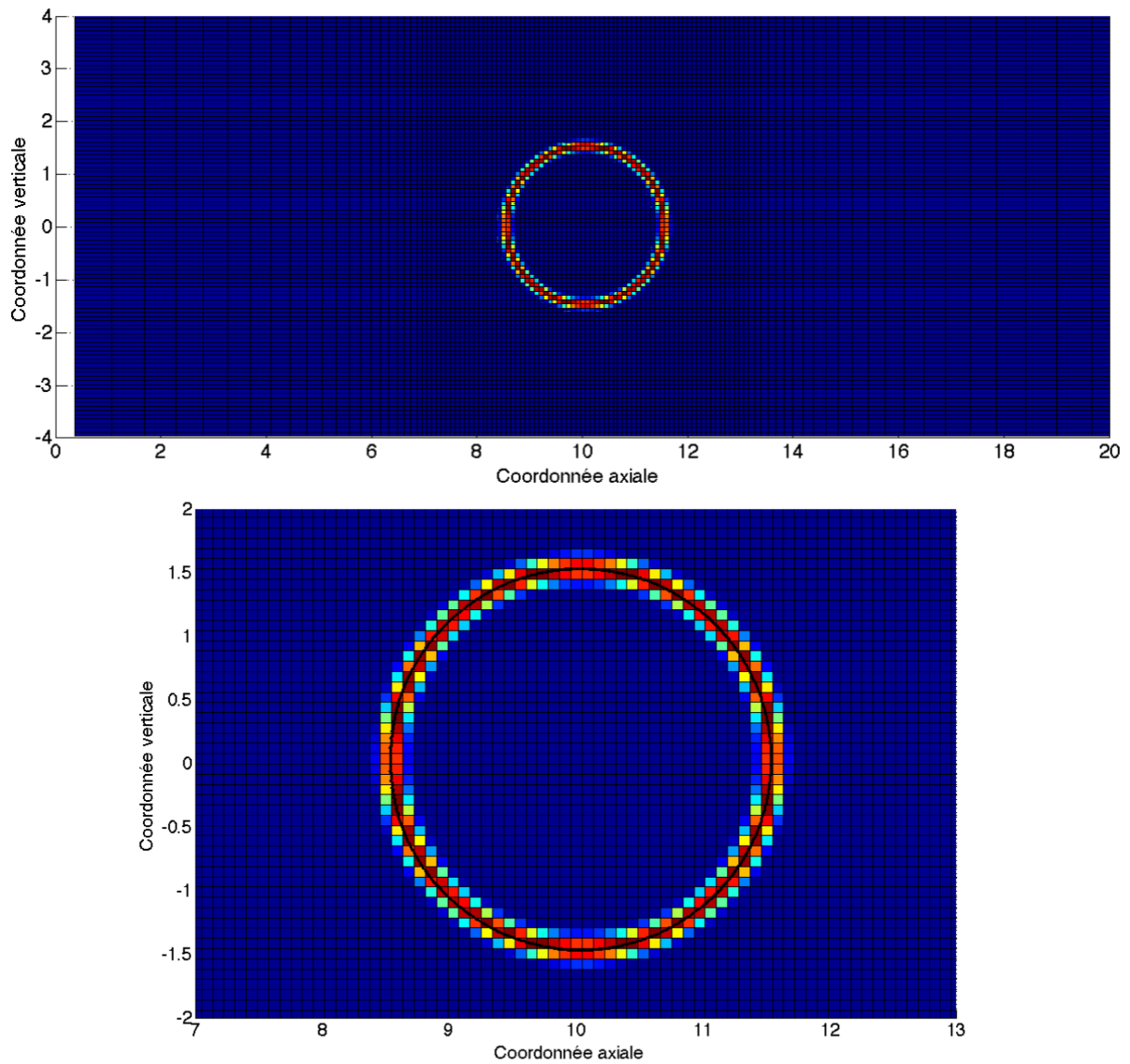


FIG. 6.7 – Distribution de la frontière immergée sur le domaine de calcul : vue générale (haut) et zoom (bas).

Ainsi, l'effet du corps est approché par une distribution surfacique sur un maillage cartésien. L'écoulement obtenu, en particulier proche des parois, sera donc une approximation de l'écoulement réel. Celle-ci sera plus ou moins grossière en fonction du maillage. C'est un fait que nous devons accepter pour appliquer cette méthode.

### 6.5.4 Calcul du terme source

Le terme source doit traduire l'influence du corps sur le fluide, c'est-à-dire modifier l'écoulement uniforme pour qu'il se comporte comme s'il rencontrait un corps. Pour notre application en non-visqueux, ceci signifie que le fluide doit respecter une condition d'imperméabilité, ou de glissement, aux parois fictives.

À la fin du chapitre 2, nous avons expliqué que nous supposerions la force des aubes connue sur base d'un calcul d'ordre supérieur effectué, par exemple, avec un code de calcul distinct. Cette hypothèse était faite afin de limiter les recherches, du moins temporairement, à la modélisation des tensions circonférentielles. Dans la suite, nous reprendrons cette même hypothèse, sous deux formes. La première consistera à reprendre la pression s'exerçant sur l'aube d'un calcul annexe et à en déduire le terme source de force. La deuxième reprendra la méthode de Mohd-Yusof exposée précédemment et nécessitera la distribution de vitesse sur l'aube. Les deux formes de dérivation du terme source sont expliquées ci-dessous.

#### Terme source pré-calculé

La première manière de procéder consiste à reprendre l'évolution de pression statique sur l'aube d'un calcul distinct. Cette pression statique doit ensuite être transformée en force volumique et distribuée sur le maillage cartésien. Cette procédure de distribution a déjà été détaillée. Il ne reste donc qu'à exprimer la force  $f_k$  s'appliquant sur chaque portion de courbe frontière de longueur  $dS_k$ . Cette force s'exprime par la relation (6.24), où  $p_k$  est la pression statique au point  $k$  de la paroi du corps,  $p_\infty$  étant la pression statique à une distance infinie du corps, à la frontière du domaine en pratique.

$$f_k = (p_k - p_\infty) dS_k \quad (6.24)$$

Les composantes axiale et verticale sont ensuite obtenues par projection sur la normale à l'aube ( $n_x, n_y$ ) et ajoutées aux équations de conservation de la quantité de mouvement. Elles sont illustrées à la figure 6.8.

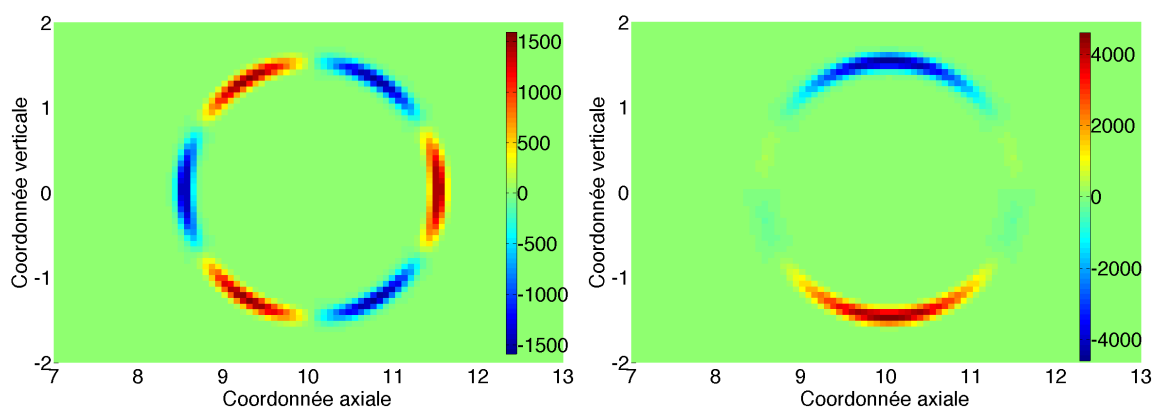


FIG. 6.8 – Composantes horizontale (gauche) et verticale (droite) du terme source de force.

### Terme source de type dynamique

La deuxième possibilité d'obtenir le terme source est de recourir à la formulation (6.19) de Mohd-Yusof. Celle-ci est légèrement modifiée pour s'adapter aux inconnues conservatives et est répartie par la fonction de distribution. Le fluide doit être arrêté à l'intérieur du corps pour obtenir un écoulement physique, ce qui est fait au moyen d'une deuxième fonction de distribution qui couvre l'intérieur du corps. Le terme source de force est exprimé par la relation (6.25), où  $\delta_{kl}(x, y)$  est la fonction d'influence déjà mentionnée et  $\delta_i(x, y)$  représente l'intérieur du corps, les supports de ces deux fonctions ne se chevauchant pas. Dans cette relation aussi,  $V_{xy}^k$  est la vitesse imposée à l'élément de paroi d'indice  $k$ ,  $dS^l$  la surface de la maille d'indice  $l$ .

$$F_{xy}^l = f_{xy}^l dS^l = - \left( \sum_k \delta_{kl} + \delta_i^l \right) R_{(\rho V)_{xy}}^l(\mathbf{U}) + \frac{dS^l}{\Delta t} \sum_k \delta_{kl} \left( \rho^l V_{xy}^k - (\rho V)_{xy}^l \right) + \frac{dS^l}{\Delta t} \delta_i^l \left( 0 - (\rho V)_{xy}^l \right) \quad (6.25)$$

Cette force agira donc comme un correcteur de vitesse proportionnel à la distribution du corps sur le maillage cartésien. Il s'agit ici d'un terme de force qui est calculé de manière itérative en cours de résolution, contrairement à la forme précédente qui était déterminée avant la résolution. Pour l'exemple présenté dans la suite, nous utiliserons cette deuxième forme des termes sources. Nous discuterons la première dans le chapitre suivant.

### 6.5.5 Outil de calcul

Le code de calcul utilisé pour cet exemple résout les équations d'Euler sur un maillage cartésien par la méthode classique des volumes finis. L'intégration pseudo-temporelle est réalisée par un schéma explicite de Runge-Kutta. Le schéma de Roe est utilisé pour la discrétisation des flux. Les termes sources sont quant à eux centrés.

La forme intégrale du système d'équations d'Euler sur un maillage cartésien est donnée par l'expression (6.26),  $\Delta S$  étant la surface d'un élément de maillage,  $P$  son périmètre. Les équations incluent un pseudo-temps  $\tau$ .

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \iint_{\Delta S} \mathbf{U} dS + \oint_P [\mathbf{F} dy + \mathbf{G} dx] = \iint_{\Delta S} \mathbf{f} dS \quad (6.26)$$

Les vecteurs des inconnues conservatives  $\mathbf{U}(x, y, \tau)$  et des flux  $\mathbf{F}(x, y, \tau)$  et  $\mathbf{G}(x, y, \tau)$  ainsi que le terme source de force  $\mathbf{f}(x, y, \tau)$  sont donnés par l'expression (6.27).

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho V_x \\ \rho V_y \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho V_x \\ \rho V_x^2 + p \\ \rho V_x V_y \\ \rho V_x H \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho V_y \\ \rho V_x V_y \\ \rho V_y^2 + p \\ \rho V_y H \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

Les conditions limites d'entrée du domaine de calcul sont la pression totale, la température totale et l'angle de l'écoulement. A la sortie, la pression statique est imposée. Dans le cas présent, les valeurs utilisées sont les suivantes.

---

Pression totale	$[Pa]$	101325
Température totale	$[K]$	300
Angle	$[deg]$	0
Pression statique	$[Pa]$	95200

Cet ensemble de conditions limites correspond à un nombre de Mach axial d'entrée de 0,3. Le maillage comprend un total de 22500 points sur le domaine  $[0, 20] \times [-4, 4]$ .

### 6.5.6 Résultats de calcul

Les résultats obtenus en terme de vitesse horizontale, vitesse verticale et pression statique sont illustrés respectivement aux figures 6.9, 6.10 et 6.11, chacune étant composé du résultat obtenu par la méthode de frontière immergée et du résultat obtenu par un code de calcul distinct opérant sur maillage conforme.

Pour chaque figure, une quinzaine de lignes d'iso-quantité sont superposées à l'écoulement. Celles-ci sont réparties uniformément sur l'intervalle correspondant à chaque grandeur, ces intervalles étant les mêmes pour les deux représentations. Une comparaison directe par la forme de ces courbes est donc possible.

Pour ce qui concerne les résultats obtenus par la méthode de frontière immergée, l'écoulement au sein du corps fictif n'a pas été représenté, un disque blanc représentant le corps.

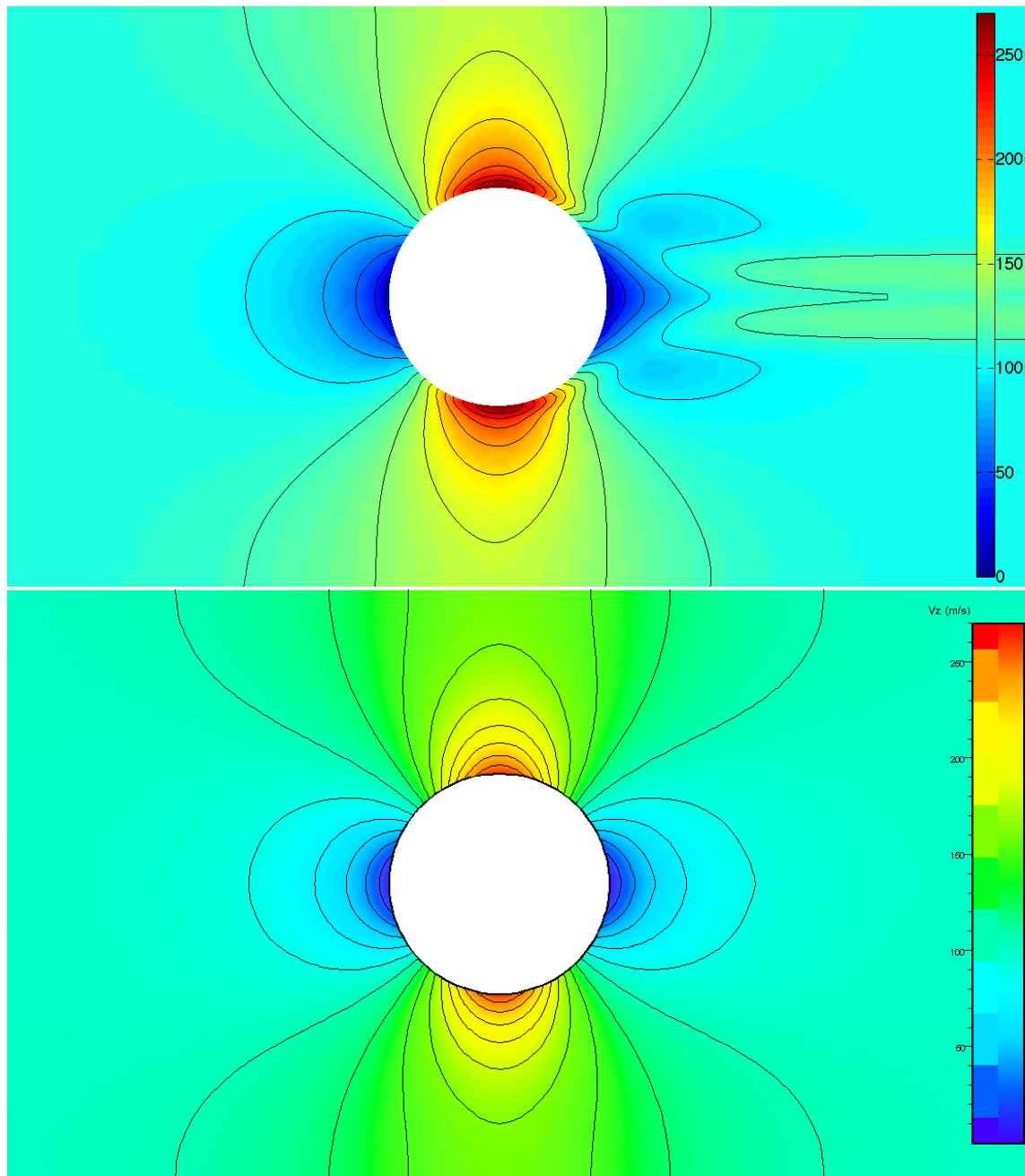


FIG. 6.9 – Comparaison de la vitesse horizontale exprimée en [m/s] obtenue par la méthode de frontière immergée (haut) et par une méthode de maillage conforme (bas).

La figure 6.9 représente la vitesse horizontale. Elle nous apprend que l'écoulement est bien reproduit sur la première moitié du corps, les lignes d'iso-valeur ayant des allures comparables dans les deux cas. Sur la deuxième partie par contre, l'écoulement n'est pas reproduit aussi fidèlement.

Il existe plusieurs sources d'erreurs qui peuvent être à la base de ces différences. La première est relative à la vitesse imposée elle-même. En effet, supposons que la distribution de vitesse exacte soit connue sur le corps et que la frontière de ce dernier peut être discrétisée de manière aussi fine que souhaité. Il ne peut par contre pas en être de même pour le maillage cartésien car



le temps de calcul deviendrait prohibitif. Une certaine taille de maille doit donc être fixée. Or, pour être ressenti par le maillage cartésien, et ce de manière progressive, chaque point de la frontière doit être associé à une fonction de distribution dont l'extension du support doit être en rapport avec la taille de maille cartésienne, afin que l'effet soit ressenti par plusieurs d'entre elles. Ainsi, chaque maille du domaine cartésien va ressentir l'influence de plusieurs points de la frontière, pondérée selon l'éloignement de ceux-ci, menant à un lissage de la distribution de vitesse imposée. Cette première source d'erreur explique probablement les légères différences observées sur la première partie de l'aube.

Une deuxième source d'erreur, semblable à la première, provient à nouveau de la discrétisation. En effet, la première source d'erreur résultait d'une transmission imprécise de l'information du corps au domaine fluide. Inversement, lors de l'application de la correction de Mohd-Yusof, des imprécisions naissent de l'estimation de la vitesse du fluide au droit du corps. Cette deuxième source d'erreur est indissociable de la première et explique également les imprécisions sur la partie amont de l'aube.

Ce qui précède ne peut cependant pas expliquer les différences sur la deuxième partie de l'aube. Il est difficile, à ce stade de développement, de situer de manière précise l'origine de ces observations. Il est connu, de manière générale, que la résolution d'un écoulement non-visqueux sur un cylindre est chose difficile. En effet, tout schéma numérique est une approximation de la physique. Il s'ensuit des pertes d'informations, qui peuvent être vues comme une dissipation d'ordre numérique. De là, l'écoulement en aval d'un corps aussi épais qu'un cylindre est soumis au décollement, menant à une description moins précise en aval qu'en amont du cylindre. Ainsi, nous reporterons ces différences sur le schéma numérique de résolution des équations. Nous ne pouvons en dire davantage à ce stade. Il sera intéressant à l'avenir de poursuivre cette investigation et d'améliorer la discrétisation.

La figure 6.10 illustre quant à elle la vitesse verticale. Les niveaux de vitesse obtenus sont comparables entre les deux méthodes. De même que précédemment, l'écoulement sur la deuxième partie de l'aube est reproduit moins fidèlement que sur la partie amont.

Les mêmes observations et conclusions sont valables également pour la figure 6.11 représentant le champ de pression statique.

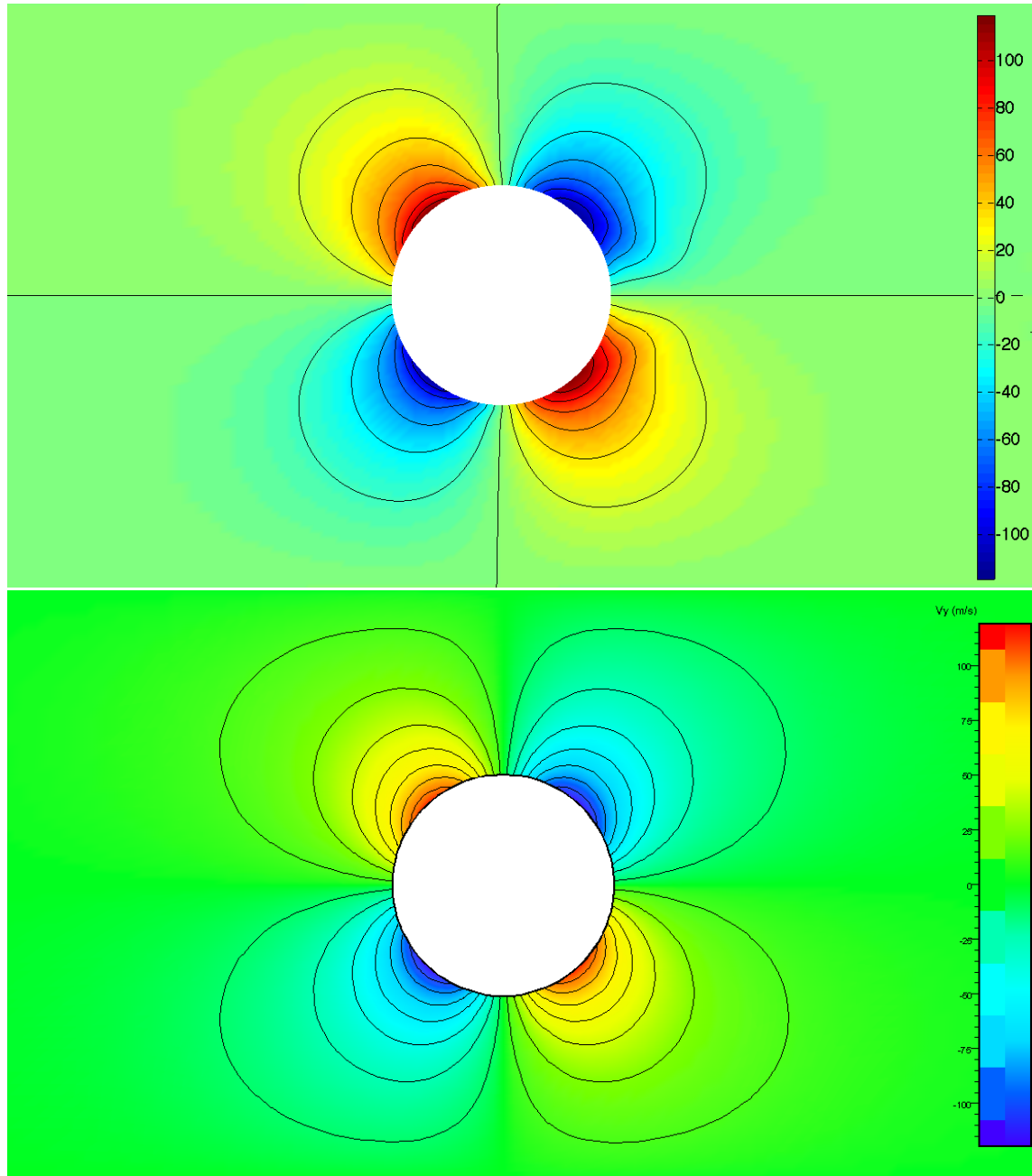


FIG. 6.10 – Comparaison de la vitesse verticale exprimée en [m/s] obtenue par la méthode de frontière immergée (haut) et par une méthode de maillage conforme (bas).

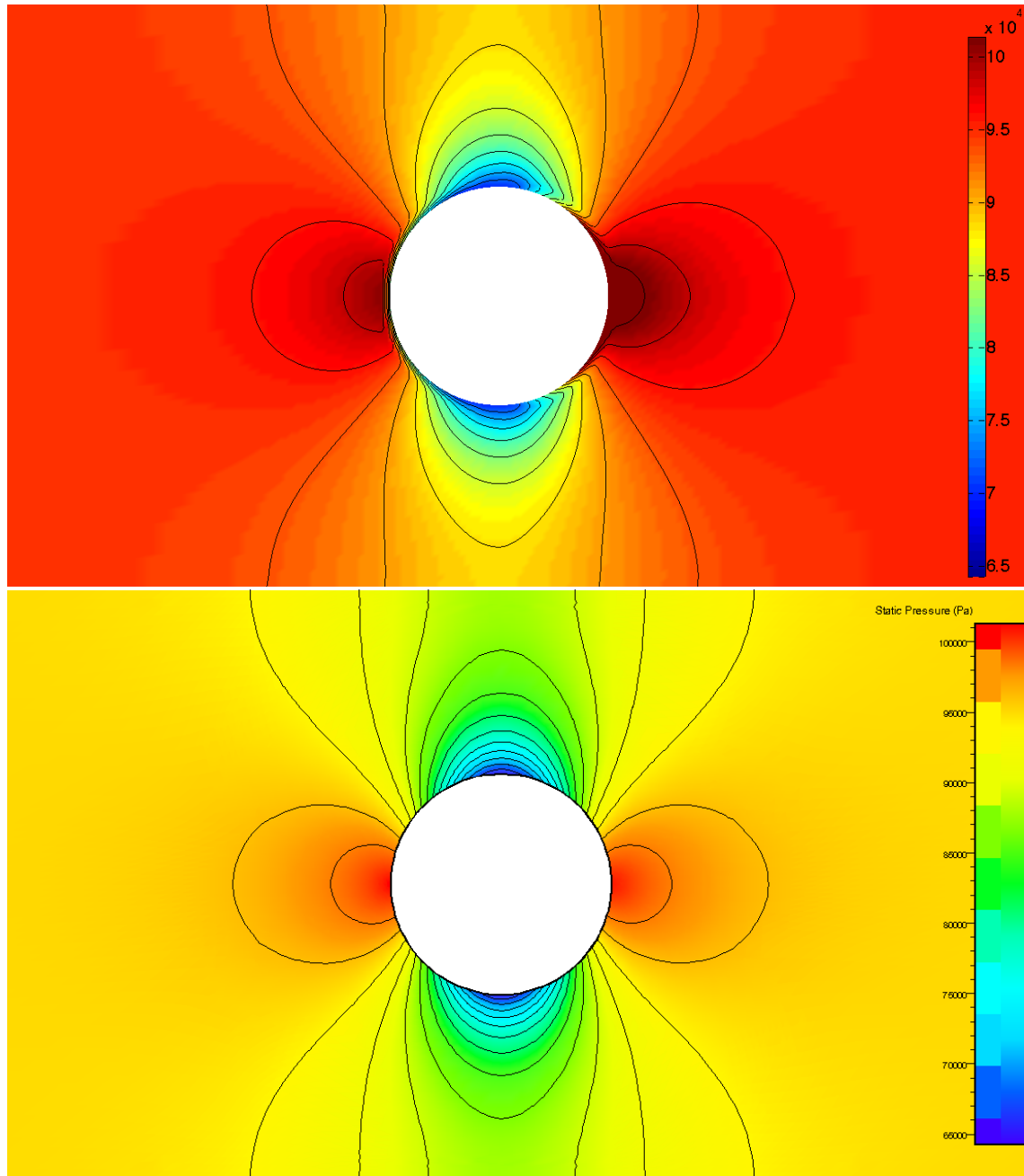


FIG. 6.11 – Comparaison de la pression statique exprimée en [Pa] obtenue par la méthode de frontière immergée (haut) et par une méthode de maillage conforme (bas).

### 6.5.7 Conclusion

Nous venons de montrer que la méthode de frontière immergée est capable de reproduire de manière approchée l'écoulement autour d'un corps. Nous arrêtons ici l'application de cette méthode concernant le calcul bidimensionnel, elle sera approfondie lors de son application à une résolution harmonique, qui fait l'objet du chapitre suivant.

## Chapitre 7

# Le méridien harmonique

La méthode de frontière immergée a été entr’aperçue au chapitre précédent. Les quelques résultats observés ont montré une habilité à reproduire l’écoulement, du moins une bonne approximation de celui-ci, dans un cas bidimensionnel. Nous allons, au cours de ce chapitre, poursuivre l’application de cette méthode au cas harmonique.

La résolution envisagée peut être approchée de deux manières. La première est une vision complète de l’écoulement. En effet, la méthode de frontière immergée reproduit l’effet du corps et génère donc un écoulement bidimensionnel dans le cas envisagé, tridimensionnel pour une aube générale. Il serait dès lors imaginable d’accéder à la force des aubes par cette méthode même. La deuxième manière d’approcher cette résolution est de la considérer comme une approximation de l’écoulement dont le seul objectif est de fournir une image des non-uniformités moyennes, lesquelles seraient alors utilisées pour améliorer la prédiction de l’écoulement réalisée par un code de calcul moyen. Dans ce qui suit, nous étendrons de manière générale la méthode de frontière immergée au cas harmonique, sans privilégier l’une des deux approches.

Nous poursuivrons avec le cas test utilisé précédemment. Cependant, il ne s’agira plus ici d’une étude bidimensionnelle complète, mais de la superposition de calculs unidimensionnelles dans l’espace fréquentiel, transposant la philosophie de He.

Dans ce chapitre, nous commencerons par exprimer le système à résoudre. Ensuite, nous expliquerons brièvement l’implémentation de la méthode harmonique. Pour terminer, nous discuterons les résultats obtenus.

Nous réitérons ici la remarque faite précédemment concernant le degré d’exploitation de la méthode de frontière immergée. En effet, ce qui suit doit être lu comme un premier contact avec cette méthode, particulièrement en ce qui concerne son application au cas harmonique. Une revue plus ample, ainsi que des améliorations devront être réalisées, lesquelles seront mentionnées.

### 7.1 Système d’équations harmoniques

Au chapitre précédent, nous avons détaillé le système bidimensionnel d’équations (6.26) à résoudre. Dans cette section, nous allons dériver de manière très brève les formes moyenne, aux perturbations, par analogie avec les développements réalisés au chapitre 5. La forme moyenne ne dépendra que de la coordonnée horizontale  $x$ , tandis que la composante fluctuante dépendra toujours des coordonnées  $(x, y)$ . La direction verticale sera donc l’analogie de la direction circonférentielle dans une turbomachine.

Le système d'équations peut se décomposer en une partie moyenne, unidimensionnelle, et une partie fluctuante, bidimensionnelle. Etant donné que l'écoulement est calculé sur un domaine recouvrant le corps, la valeur moyenne obtenue doit s'entendre comme une valeur moyenne non-physique, définie sur un domaine différent du domaine réel où s'écoule le fluide. Il en est de même pour les perturbations. Les valeurs réelles correspondant au domaine fluide seront ensuite obtenue par simple post-traitement des résultats de calcul.

La dérivation des systèmes moyen et aux perturbations est réalisée selon la philosophie de He, c'est-à-dire conserver une partie moyenne non-linéaire et linéariser la composante fluctuante pour la résoudre ensuite par superposition modale. Dans cette configuration, les interactions non-linéaires principales entre les deux systèmes sont reprises au travers des tensions circonférentielles<sup>1</sup>. Ainsi, dans un premier temps du moins, nous ferons l'hypothèse que les perturbations sont suffisamment faibles pour permettre une linéarisation. Nous savons d'ores et déjà que cette hypothèse est à mettre en doute. Une procédure incluant les termes non-linéaires au sein des équations aux perturbations représente une étape ultérieure à cette étude.

Aussi, nous supposons que le terme source de force intrinsèque à la méthode de frontière immergée est développable en série de Fourier. En réalité, nous supposons qu'il est représentable par une série tronquée, ce qui a été rendu possible par l'utilisation d'une fonction de distribution, comme mentionné au chapitre précédent. Ce terme source est pré-calculé selon l'expression (6.24) basée sur une connaissance de la distribution de pression sur le corps.

### 7.1.1 Le système moyen

Le système d'équations moyennes est repris ci-dessous, où  $\tau$  est un pseudo-temps.

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial x} = -\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{f}} \quad (7.1)$$

Les vecteurs des inconnues conservatives  $\bar{\mathbf{U}}(x, \tau)$  et des flux  $\bar{\mathbf{F}}(x, \tau)$  ainsi que les termes sources de force  $\bar{\mathbf{f}}(x, \tau)$  et de tensions circonférentielles  $\bar{\mathbf{S}}(x, \tau)$  sont donnés par l'expression (7.2).

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \tilde{V}_x \\ \bar{\rho} \tilde{V}_y \\ \bar{\rho} \tilde{E} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \tilde{V}_x \\ \bar{\rho} \tilde{V}_x \tilde{V}_x + \bar{p} \\ \bar{\rho} \tilde{V}_x \tilde{V}_y \\ \bar{\rho} \tilde{V}_x \tilde{H} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \rho \tilde{V}_x'' \tilde{V}_x''}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho \tilde{V}_x'' \tilde{V}_y''}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho \tilde{V}_x'' \tilde{H}''}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

### 7.1.2 Le système aux perturbations

Le système aux perturbations est repris ci-après.

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{U}'}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{U}'}{\partial y} = \mathbf{f}' \quad (7.3)$$

Les vecteurs  $\mathbf{U}'(x, y, \tau)$  des perturbations des inconnues conservatives et  $\mathbf{f}'(x, y, \tau)$  des termes sources de force ainsi que les matrices jacobiennes moyennes horizontale  $\tilde{\mathbf{F}}(x, \tau)$  et verticale  $\tilde{\mathbf{G}}(x, \tau)$  sont donnés par les expressions ci-dessous.

<sup>1</sup>Ce terme de tension circonférentielle doit être assimilé à un terme générique, exprimant dans ce cas-ci les non-uniformités moyennes dans la direction  $y$ .

$$\mathbf{U}' = \begin{bmatrix} (\rho)' \\ (\rho V_x)' \\ (\rho V_y)' \\ (\rho E)' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}' = \begin{bmatrix} 0 \\ f'_x \\ f'_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\gamma-3}{2}\right) \tilde{V}_x^2 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) \tilde{V}_y^2 & (3-\gamma) \tilde{V}_x & (1-\gamma) \tilde{V}_y & (\gamma-1) \\ -\tilde{V}_x \tilde{V}_y & \tilde{V}_y & \tilde{V}_x & 0 \\ -\gamma \tilde{V}_x \tilde{E} + (\gamma-1) \tilde{V}_x (\tilde{V}_x^2 + \tilde{V}_y^2 + \frac{k}{2}) & \gamma \tilde{E} - \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) (3\tilde{V}_x^2 + \tilde{V}_y^2 + k) & (1-\gamma) \tilde{V}_x \tilde{V}_y & \gamma \tilde{V}_x \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\tilde{V}_x \tilde{V}_y & \tilde{V}_y & \tilde{V}_x & 0 \\ \left(\frac{\gamma-3}{2}\right) \tilde{V}_y^2 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) \tilde{V}_x^2 & (1-\gamma) \tilde{V}_x & (3-\gamma) \tilde{V}_y & (\gamma-1) \\ -\gamma \tilde{V}_y \tilde{E} + (\gamma-1) \tilde{V}_y (\tilde{V}_x^2 + \tilde{V}_y^2 + \frac{k}{2}) & (1-\gamma) \tilde{V}_x \tilde{V}_y & \gamma \tilde{E} - \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) (3\tilde{V}_y^2 + \tilde{V}_x^2 + k) & \gamma \tilde{V}_y \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

$$k = \widetilde{V_i'' V_i''}$$

A la grande différence du système aux perturbations (5.23), celui présenté ci-dessus est défini sur un domaine périodique, n'incluant pas de corps. Ce dernier est ici modélisé par un terme source exprimable par une série de Fourier tronquée. Il n'existe donc plus aucun obstacle à une résolution par superposition modale, comme nous allons le montrer.

### 7.1.3 Système harmonique

Soit les développements en série de Fourier des inconnues conservatives et du terme source de force.

$$\mathbf{U}'(x, y) = \sum_{n=-N, n \neq 0}^N \mathbf{U}'_n(x) e^{i\omega_n y} \quad (7.7)$$

$$\mathbf{f}'(x, y) = \sum_{n=-N, n \neq 0}^N \mathbf{f}'_n(x) e^{i\omega_n y} \quad (7.8)$$

La somme s'étend sur  $2N$  modes complexes conjugués. Le mode d'indice 0 correspond à la valeur moyenne, laquelle est résolue par le système moyen (7.1)

Substituant (7.7) et (7.8) dans (7.3), l'expression suivante est obtenue.

$$\sum_{n=-N, n \neq 0}^N \left[ \frac{\partial \mathbf{U}'_n}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{U}'_n}{\partial x} + i\omega_n \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{U}'_n - \mathbf{f}'_n \right] e^{i\omega_n y} = 0 \quad (7.9)$$

Cette égalité étant valable pour toute coordonnée  $y$  et les fonctions de Fourier étant orthogonales, chaque mode d'indice  $n$  peut être résolu séparément par l'équation (7.10).

$$\frac{\partial \mathbf{U}'_n}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{U}'_n}{\partial x} + i\omega_n \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{U}'_n = \mathbf{f}'_n \quad (7.10)$$

Les coefficients de Fourier sont complexes et conjugués pour des valeurs opposées de l'indice modal. Décomposant chaque mode en parties réelle et imaginaire selon l'expression (7.11) et substituant dans (7.10), le système d'équations réelles (7.12) est obtenu, pour  $n$  allant de 1 à  $N$ .

$$\mathbf{U}'_n = \mathbf{U}'_n{}^{\mathcal{R}} + i\mathbf{U}'_n{}^{\mathcal{S}} \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}_n^{\mathcal{RS}}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}^{\mathcal{RS}} \mathbf{U}_n^{\mathcal{RS}}}{\partial x} + \omega_n \tilde{\mathbf{G}}^{\mathcal{RS}} \mathbf{U}_n^{\mathcal{RS}} = \mathbf{f}_n^{\mathcal{RS}} \quad (7.12)$$

Les nouveaux vecteurs d'inconnues conservatives  $\mathbf{U}_n^{\mathcal{RS}}$  et de terme source  $\mathbf{f}_n^{\mathcal{RS}}$  ainsi que les nouvelles matrices jacobiniennes  $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathcal{RS}}$  et  $\tilde{\mathbf{G}}^{\mathcal{RS}}$  sont exprimés ci-dessous.

$$\mathbf{U}_n^{\mathcal{RS}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}'_n{}^{\mathcal{R}} \\ \mathbf{U}'_n{}^{\mathcal{S}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_n^{\mathcal{RS}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}'_n{}^{\mathcal{R}} \\ \mathbf{f}'_n{}^{\mathcal{S}} \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^{\mathcal{RS}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{F}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{G}}^{\mathcal{RS}} = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{\mathbf{G}} \\ \tilde{\mathbf{G}} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

Il s'agit donc d'un système d'équations dépendant uniquement de la coordonnée  $x$ . Transposé au cas tridimensionnel, ceci signifie que ce système est maintenant résoluble par un code de calcul méridien. Pour notre application, l'analogie du code méridien est une résolution sur un maillage unidimensionnel.

Quant aux fréquences associées aux modes de Fourier, elles sont calculées selon l'intervalle de variation  $\Delta y$  de la coordonnée  $y$ , lequel serait l'extension azimutale du passage inter-aubes en turbomachines.

$$\omega_n = n \frac{2\pi}{\Delta y} \quad (7.15)$$

#### 7.1.4 Conditions limites

Le système d'équations (7.3) a pu être développé en série de Fourier parce qu'il est accompagné de conditions limites périodiques selon la direction  $y$ , grâce au principe de résolution par frontière immergée. Cette condition limite devient donc implicite au travers des fonctions périodiques de Fourier.

Il reste alors à exprimer les conditions limites en entrée et en sortie de domaine pour chaque mode à résoudre. Ceci peut se faire par un développement en série de Fourier de leurs évolutions circonférentielles, celles-ci étant périodiques. Ceci ne constitue pas une hypothèse supplémentaire, elle fait partie intégrante du niveau considéré de la cascade d'Adamczyk, où chaque canal inter-aubes d'une roue est identique. Chaque coefficient de Fourier de ces conditions limites peut alors être reporté sur chaque système d'équations correspondant.

Les valeurs imposées aux bornes du domaine de calcul sont la pression totale, la température totale, l'angle de l'écoulement et la pression statique. Les développements en série de Fourier correspondants sont exprimés ci-après.



$$\begin{aligned}
P(x, y) &= \sum_n P_n(x) e^{i\omega_n y} \\
T(x, y) &= \sum_n T_n(x) e^{i\omega_n y} \\
\alpha(x, y) &= \sum_n \alpha_n(x) e^{i\omega_n y} \\
p(x, y) &= \sum_n p_n(x) e^{i\omega_n y}
\end{aligned}$$

A ces valeurs correspond un certain ensemble d'inconnues conservatives, qui elles-mêmes agiront sur la résolution numérique. Pour être imposées à l'écoulement, ces valeurs doivent donc d'abord être exprimées en fonction des inconnues conservatives. Ainsi, afin d'être appliqué sur chaque inconnue  $\mathbf{U}_n^{\mathbb{R}\mathfrak{S}}$ , chaque ensemble de valeurs limites  $(P_n, T_n, \alpha_n, p_n)$  doit être lié aux inconnues par une relation linéaire. La relation exacte n'est pas linéaire et procéder à une linéarisation peut mener à des erreurs importantes en cas de variation circonférentielle significative. Dès lors, il est préférable de procéder à une évaluation dans l'espace physique par la suite d'une transformation de Fourier inverse des inconnues conservatives, puis de les reporter ensuite sur chaque mode de Fourier.

Nous venons de voir que, par l'utilisation de la méthode de frontière immergée, l'extension de la méthode de He au cas du modèle méridien est possible, l'aube étant devenue une information d'ordre supérieure, comme les roues voisines le sont pour le cas tridimensionnel stationnaire harmonique. Dans la suite, nous allons détailler quelques points importants de l'implémentation de la méthode.

## 7.2 Implémentation de la méthode

Le code de calcul utilisé pour cet exemple fonctionne de la manière déjà détaillée au chapitre précédent, la seule différence étant qu'il résout ici des équations sur un maillage unidimensionnel. Les formes intégrales des systèmes d'équations moyen et harmonique sont données par les expressions (7.16) et (7.17),  $\Delta X$  étant la longueur d'un élément de maillage. Les équations incluent un pseudo-temps  $\tau$ .

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\Delta X} \bar{\mathbf{U}} dX + \oint_P \bar{\mathbf{F}} = \int_{\Delta X} [\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{S}}] dX \quad (7.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\Delta X} \mathbf{U}_n^{\mathbb{R}\mathfrak{S}} dX + \oint_P \underline{\mathbf{F}}^{\mathbb{R}\mathfrak{S}} \mathbf{U}_n^{\mathbb{R}\mathfrak{S}} = \int_{\Delta X} [\mathbf{f}_n^{\mathbb{R}\mathfrak{S}} - \omega_n \underline{\mathbf{G}}^{\mathbb{R}\mathfrak{S}} \mathbf{U}_n^{\mathbb{R}\mathfrak{S}}] dX \quad (7.17)$$

Ces deux systèmes sont couplés non-linéairement au travers des matrices jacobienes  $\underline{\mathbf{F}}^{\mathbb{R}\mathfrak{S}}$  et  $\underline{\mathbf{G}}^{\mathbb{R}\mathfrak{S}}$  déterminées par le système moyen, et du terme source  $\bar{\mathbf{S}}$  résultant des fluctuations calculées. Selon He [20], la stabilité et la vitesse de convergence sont améliorées par une intégration pseudo-temporelle simultanée des deux systèmes. Un schéma expliquant le passage d'un pseudo-temps  $t$  au pseudo-temps suivant est présenté à la figure 7.1.

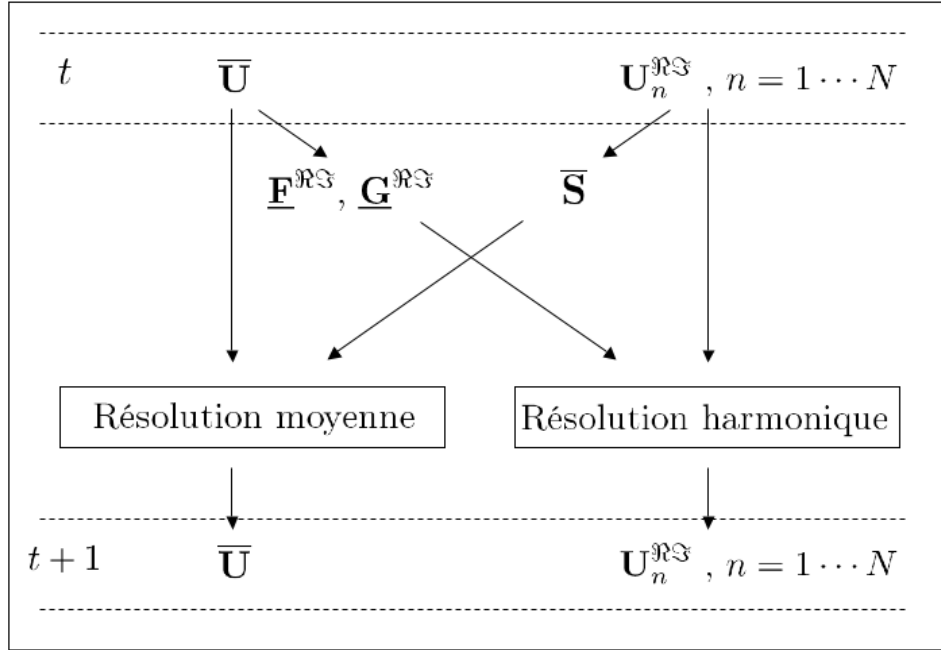


FIG. 7.1 – Couplage simultané entre les équations moyennes et harmoniques.

Le calcul des tensions circonférentielles est donc effectué à chaque itération. Il est opéré à l'aide de la relation de fermeture (4.17) déjà mentionnée et rappelée ci-dessous, laquelle est peu consommatrice en temps de calcul.

$$\overline{\rho V_i'' V_j''} = \bar{\rho} \sum_{n=1}^N 2 \left( V_{i_n}''^{\mathcal{R}} V_{j_n}''^{\mathcal{R}} + V_{i_n}''^{\mathcal{S}} V_{j_n}''^{\mathcal{S}} \right)$$

### 7.2.1 Calcul du terme source de force

Au chapitre précédent, nous avons vu que le calcul du terme source était la clé de voûte de la méthode de frontière immergée. Ce terme source de force peut être obtenu par différentes techniques. Lors de l'application présentée précédemment, nous avons utilisé la méthode de Mohd-Yusof. Si celle-ci convient bien sur un maillage bidimensionnel, il n'en est pas de même dans le cas harmonique. En effet, la formulation (6.25) inclut des produits de variables conservatives et de fonctions de distribution. Ainsi, dans le cas harmonique, elle inclut des produits de séries de Fourier, doublant le nombre d'harmoniques. Pour être utilisés dans la résolution de  $N$  systèmes harmoniques, ces produits de séries de Fourier doivent être tronqués. Ceci a mené à des résultats imprécis et a donc été abandonné. Une autre possibilité serait d'exprimer la relation (6.25) dans l'espace physique. Ceci implique des transformations de Fourier inverse et directe, lesquelles augmentent fortement le temps de calcul.

Nous nous tournons donc vers la deuxième technique de calcul du terme source présentée au chapitre précédent, basée sur une distribution connue de la pression sur le corps. Celle-ci est répartie sur le maillage et développée en série de Fourier. Chaque coefficient de Fourier est ensuite utilisé comme terme source dans l'équation correspondant à la même fréquence.

Ainsi, chaque mode de Fourier du terme source résultant de la reconstruction de la géométrie de l'aube va représenter le générateur de la non-uniformité modale correspondante. Ceci implique a priori que pour obtenir une prédiction précise de l'écoulement, sans même présager du contenu fréquentiel de celui-ci, il est nécessaire d'inclure suffisamment de modes dans la résolution pour reproduire le terme source. Le nombre de modes nécessaires pour reconstruire ce terme sera fonction notamment de la largeur  $\epsilon$  de la fonction de distribution, de la géométrie du corps et de la distribution de pression sur celui-ci. Nous n'examinerons que l'influence du premier, les deux autres nécessitant un deuxième cas test.

Comme nous l'avons déjà mentionné, le choix de la largeur  $\epsilon$  de la fonction de distribution va résulter d'un compromis entre la précision désirée, une largeur plus faible localisant mieux le corps, et de l'effort de calcul consenti, au travers du nombre  $N$  de modes de Fourier calculés. La figure 7.2 compare, en une section axiale, la fonction de distribution obtenue pour trois largeurs  $\epsilon$  égales à  $\Delta y/20$ ,  $\Delta y/30$  et  $\Delta y/40$ , ainsi que leur reconstruction harmonique pour 10, 20, 30 et 40 modes.

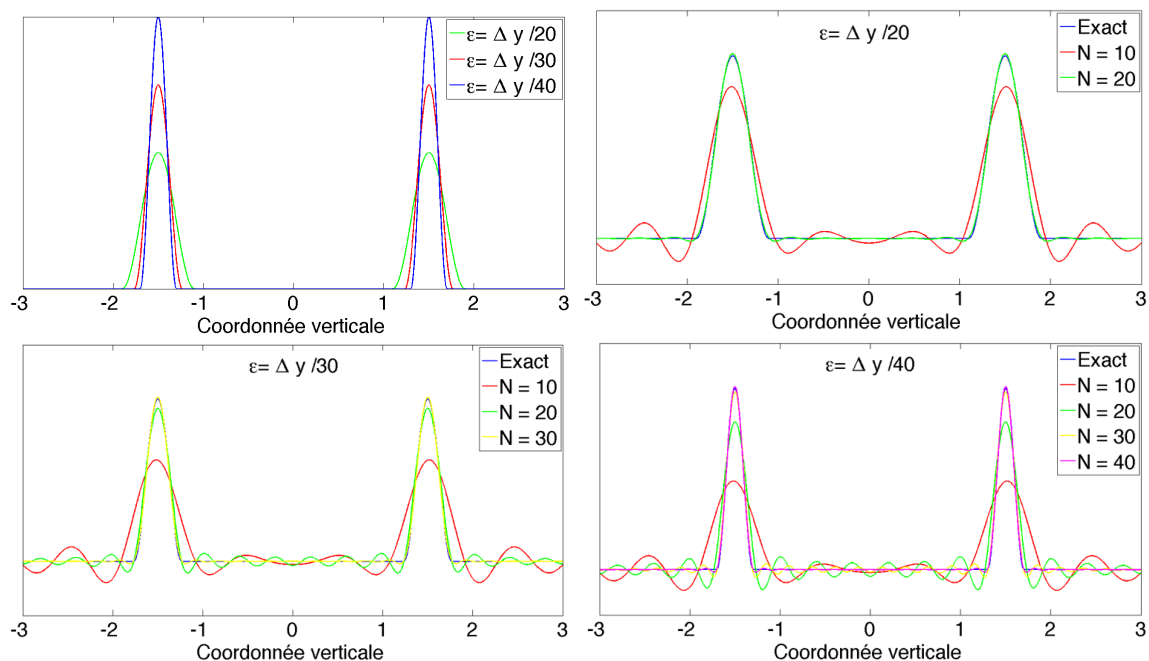


FIG. 7.2 – Fonction de distribution pour trois largeurs  $\epsilon$  et reconstruction harmonique associée.

Le compromis classique entre coût de calcul et précision apparaît clairement au travers de cette figure. Ainsi, à une valeur  $\epsilon$  donnée correspond un nombre de modes  $N$ .

### 7.2.2 Sources d'erreur

Toute résolution numérique et toute modélisation impliquent des approximations, lesquelles peuvent être plus ou moins importantes suivant les choix de l'utilisateur du code de calcul. Nous repérons, pour cette méthode de résolution harmonique, trois sources principales d'erreur : la linéarisation, l'étalement de l'effet du corps et la reconstruction harmonique.

Pour l'exemple présenté, nous avons procédé à une linéarisation du système aux perturbations. Celle-ci permet d'accéder à une résolution par superposition modale. Cependant, pour être valide, cette procédure nécessite l'hypothèse que les perturbations circonférentielles sont

faibles, ce qui n'est en général pas le cas. Nous pourrions dès lors inclure les termes non-linéaires dans le membre de droite du système à résoudre, comme termes sources d'une résolution itérative, et décomposer ces termes en série de Fourier sur base de l'itération précédente. Une évaluation complète ne peut se faire que dans le domaine physique, nécessitant des transformations de Fourier directe et inverse, ce qui rend le processus coûteux. Il existe des formes simplifiées de ces termes non-linéaires (Billson [6]), permettant une évaluation plus rapide mais incluant une part d'approximation. Nous n'avons pas testé ce genre d'apport non-linéaire dans notre application, ceci constitue une étape future. Les seules non-linéarités incluses dans la résolution harmonique apparaissant au travers du couplage entre les résolutions moyenne et harmonique, comme détaillé précédemment.

La méthode de frontière immergée, ensuite, est caractérisée par une approximation sur la localisation du corps. Cette localisation est étalée au moyen d'une fonction de distribution  $\delta_h$  dont l'objectif est double : transférer la force du corps au maillage cartésien et lisser cette force pour permettre une reconstruction harmonique fiable. Le degré d'approximation peut être contrôlé par le type de fonction de distribution et par la largeur d'étalement  $\epsilon$ . Pour notre application, nous utiliserons uniquement une fonction cosinusoidale, une évaluation de la capacité d'autres fonctions à reproduire le corps, et ce avec un spectre fréquentiel étroit, constitue elle aussi une étape future. En ce qui concerne la largeur de la zone d'influence de la frontière, le constat est clair : une valeur faible fournira une localisation précise de l'effet du corps mais nécessitera une discrétisation fine, tant du point de vue maillage cartésien que du point de vue harmonique. Il s'agit du compromis déjà évoqué. Dans la suite, nous fixerons la valeur  $\epsilon$  à  $\Delta y/30$  et nous étudierons l'influence de la discrétisation cartésienne.

La dernière source d'erreur majeure provient de la reconstruction harmonique. Nous l'avons vu au chapitre 2, la qualité de prédiction de l'écoulement s'améliore de manière monotone avec le nombre de modes inclus dans la résolution. Le nombre de modes idéal résultera lui aussi d'un compromis entre temps de calcul et qualité de prédiction. Nous allons étudier son influence dans la section suivante.

Pour toutes ces raisons, l'écoulement obtenu sera différent de l'écoulement réel, même si le terme source de force est calculé selon la distribution de pression exacte. De plus, il a été remarqué que l'arrêt du fluide au bord d'attaque du cylindre n'était pas atteint. Il est possible que ceci soit la conséquence d'une distribution de force inadaptée, ne respectant peut-être pas la condition de consistance nécessaire. Nous ne pouvons, à ce stade d'avancement, déterminer d'où vient cette erreur, même s'il est probable qu'elle résulte d'une reconstruction imprécise, conjonction de la distribution et de la décomposition harmonique. Aussi, pour poursuivre la démarche, avons-nous imposé un coefficient de recalage sur la distribution de pression afin de respecter la condition d'imperméabilité au bord d'attaque du cylindre. Ce coefficient de recalage est mis à jour au cours de la résolution itérative sur base de l'expression (7.18) (Léonard [33]), où  $p^{\text{rec}}$  est la nouvelle pression calculée,  $p^*$  la pression sur le corps avant recalage,  $\rho^*$  la densité sur le corps,  $a^*$  la vitesse sonique sur le corps et  $V_{\text{norm}}^*$  la vitesse normale à la frontière, positive si elle y rentre.

$$p^{\text{rec}} = p^* + \rho^* a^* V_{\text{norm}}^* \quad (7.18)$$

Notons aussi que nous avons tenté d'étendre cette procédure d'imposition d'imperméabilité par recalage à tout le corps. Cette extension n'a pas fourni de résultat satisfaisant, menant à un décollement du fluide sur la partie aval du corps, suite au gradient de pression adverse et à une dissipation sans doute trop forte du schéma numérique. Ce phénomène est caractéristique

de ce cas test et exprime la difficulté d'une résolution numérique non-visqueuse sur un cylindre. Dans la suite, tous les résultats présentés découlent du recalage de la distribution de pression basée sur un coefficient unique calculé au bord d'attaque.

## 7.3 Résultats et commentaires

### 7.3.1 Influence du nombre de modes de Fourier

Au cours de cette section, nous allons étudier l'effet du nombre de modes de Fourier inclus dans la simulation sur la prédiction de l'écoulement. Nous travaillerons donc à discrétisation cartésienne constante et fine de 400 points sur le domaine unidimensionnel<sup>2</sup>. La largeur de la fonction de distribution  $\epsilon$  est fixée à  $\Delta y/30$ .

Comme nous l'avons déjà mentionné, le terme source de force doit être décomposé en série de Fourier pour ensuite être reporté sur chaque système harmonique à résoudre. La figure 7.3 représente, pour chaque mode, la moyenne du coefficient de Fourier sur la zone  $x \in [8, 12]$  du domaine cartésien. Chaque composante modale a été normée par la moyenne maximale sur le domaine fréquentiel, afin de ne conserver que les allures générales des courbes, sans considérer les valeurs. Ceci ne constitue pas à proprement parler un spectre fréquentiel, mais nous renseigne tout de même sur l'importance de chaque composante harmonique.

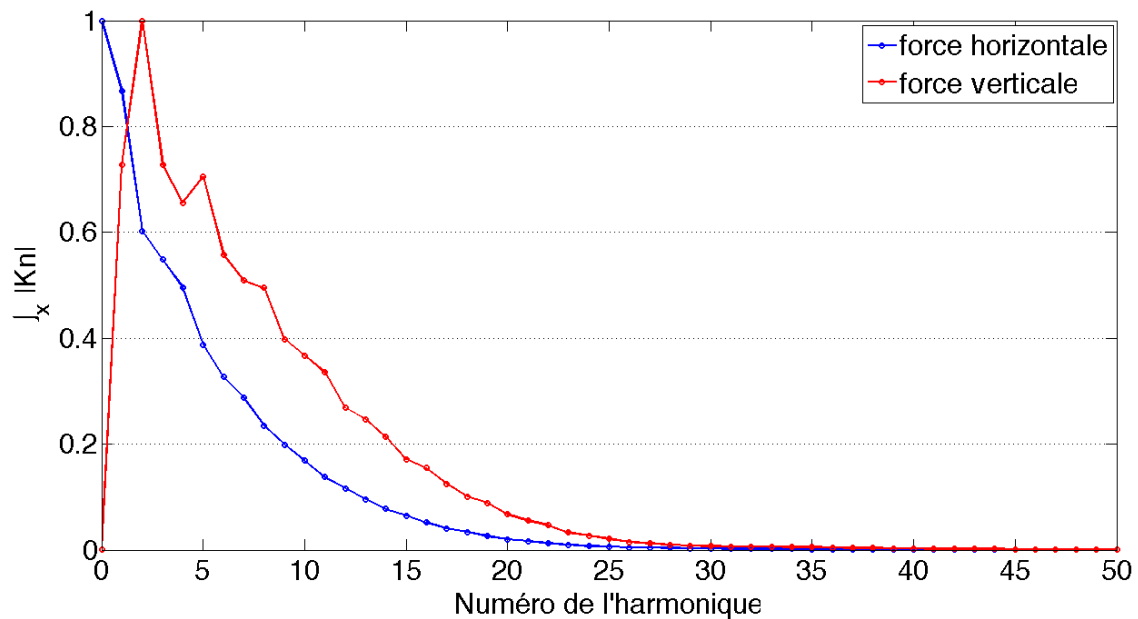


FIG. 7.3 – Moyenne sur le domaine associée à chaque mode des composantes du terme source de force.

D'après cette figure, une trentaine de modes permet de reconstruire précisément les deux composantes de la force du corps, confirmant la figure 7.2. Cela ne signifie pas pour autant que 30 modes sont nécessaires pour représenter l'écoulement. En effet, l'écoulement étant obtenu par la résolution d'équations non-linéaires, la bande-passante du spectre des inconnues conservatives peut différer. C'est ce qui est observé à la figure 7.4, montrant un spectre plus étroit pour les inconnues conservatives  $\rho V_x$  et  $\rho V_y$  que pour le terme source de force.

<sup>2</sup>Le cas test du chapitre précédent comprenait 160 points dans la direction horizontale.

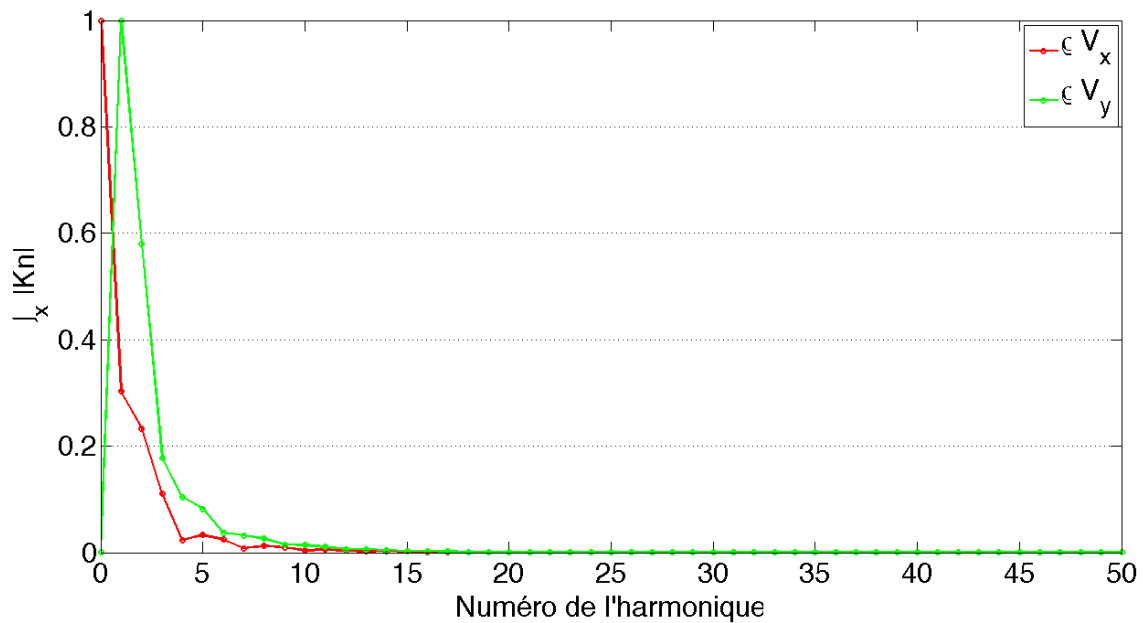


FIG. 7.4 – Moyenne sur le domaine associée à chaque mode des inconnues conservatives  $\rho V_x$  et  $\rho V_y$  pour une simulation incluant 50 modes.

Transposons le raisonnement au cas réel. Une simulation par la méthode de frontière immergée réalisée de manière consistante converge vers l'écoulement exact pour une distribution tendant vers une fonction de Dirac. Or, la décomposition en série de Fourier d'une telle distribution est une somme infinie incluant des coefficients de même amplitude. Cependant, un écoulement exact n'est pas caractérisé par un spectre infini, comme nous l'avons montré au chapitre 2. En effet, la présence de l'aube, à savoir la distribution de Dirac, étant ressentie sur une certaine distance, l'écoulement s'y adapte progressivement. Ceci signifierait donc que, parmi tous les modes nécessaires pour reconstruire la distribution de force, certains ne sont pas reportés sur l'écoulement.

Cependant, si certains des modes nécessaires pour reconstruire l'effet de l'aube sur le fluide ne sont pas utilisés ou moins influents, cela signifie aussi que la force n'est pas consistante, la série de Fourier étant tronquée. Ceci pourrait expliquer en partie la nécessité d'introduire un coefficient de recalage sur la distribution du terme source de force.

A titre indicatif, la figure 7.5 présente les moyennes des coefficients de Fourier des inconnues conservatives obtenues par simulation harmonique. Sont aussi représentées les inconnues conservatives reconstruites sur base du résultat obtenu par un code de calcul distinct opérant sur maillage conforme, soit notre résultat de référence. Il s'agit du même résultat que présenté à la figure 7.4. Chaque composante modale a été normée par la moyenne maximale sur le domaine fréquentiel. Cette opération a été effectuée afin de ne conserver que les allures générales des courbes, sans considérer les valeurs. En effet, une comparaison directe n'est pas possible car les deux développements en série correspondent à des domaines d'extension azimutale différente, l'un recouvrant le corps, l'autre pas. Néanmoins, il est intéressant de comparer le comportement d'ensemble des différentes inconnues.

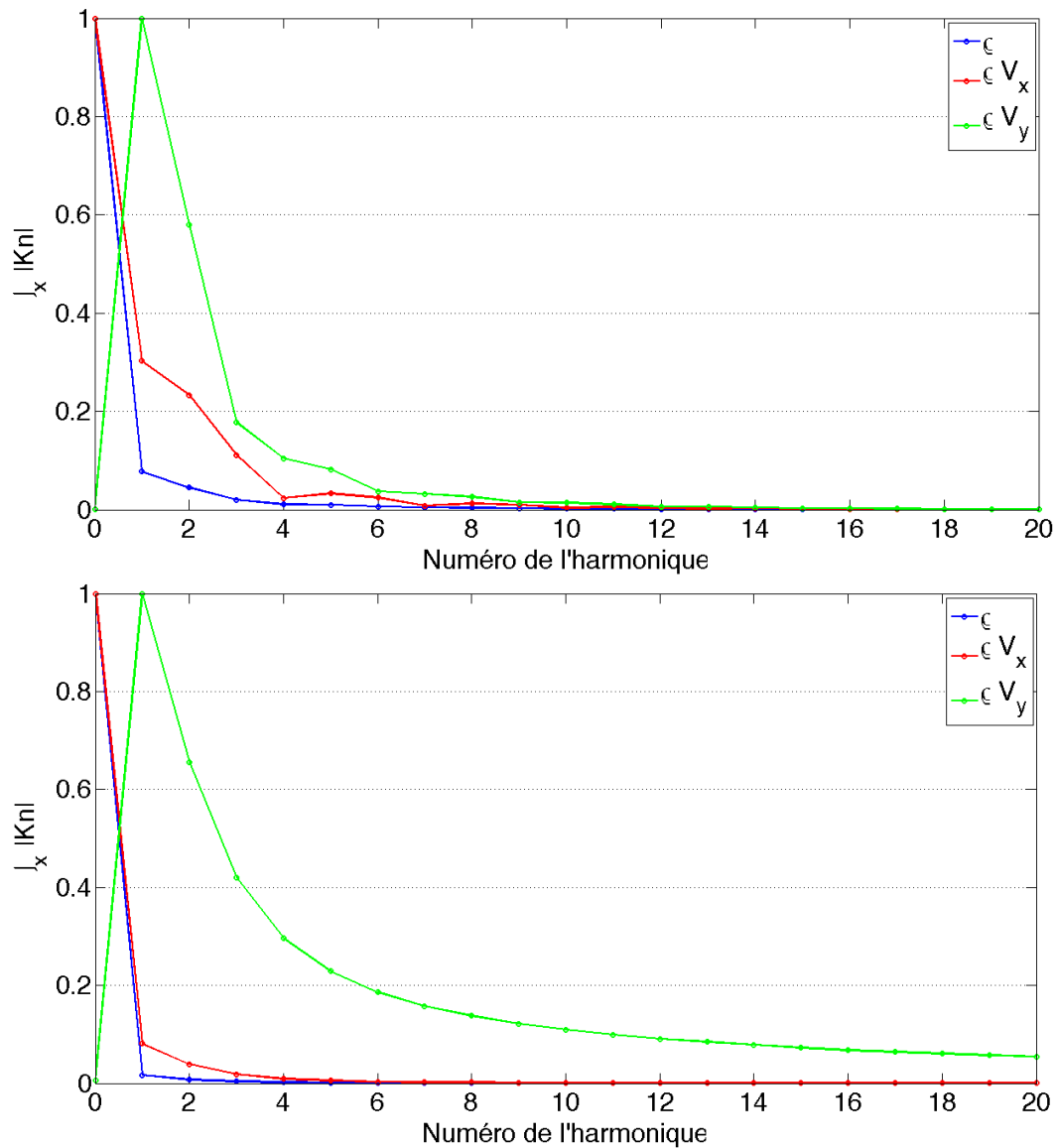


FIG. 7.5 – Moyenne sur le domaine associée à chaque mode des inconnues conservatives  $\rho$ ,  $\rho V_x$  et  $\rho V_y$  pour une simulation incluant 50 modes (haut) et pour une reconstruction harmonique de l'écoulement obtenu par un code de calcul distinct (bas).

Les allures générales des deux graphiques sont assez similaires. Pour la raison mentionnée, il est difficile de comparer ceux-ci de manière approfondie. Néanmoins, d'après la figure 7.5, le code de calcul harmonique semble à nouveau trop dissipatif, l'extension modale de l'inconnue  $\rho V_y$  étant inférieure à la réalité. Une étude plus poussée du schéma numérique constituera un passage obligé pour la suite.

Étudions à présent la variation de la qualité de prédiction de l'écoulement en fonction du nombre de modes inclus dans la simulation. La première conséquence attendue de l'augmentation du nombre de modes est la diminution de l'erreur de troncature des séries de Fourier, menant à une description plus précise de l'écoulement. C'est ce que nous vérifions à la figure 7.6 présentant l'évolution de la vitesse axiale  $V_x$  en une coupe en  $x = 10$  pour des simulations harmoniques incluant 3, 5, 10 et 20 modes.

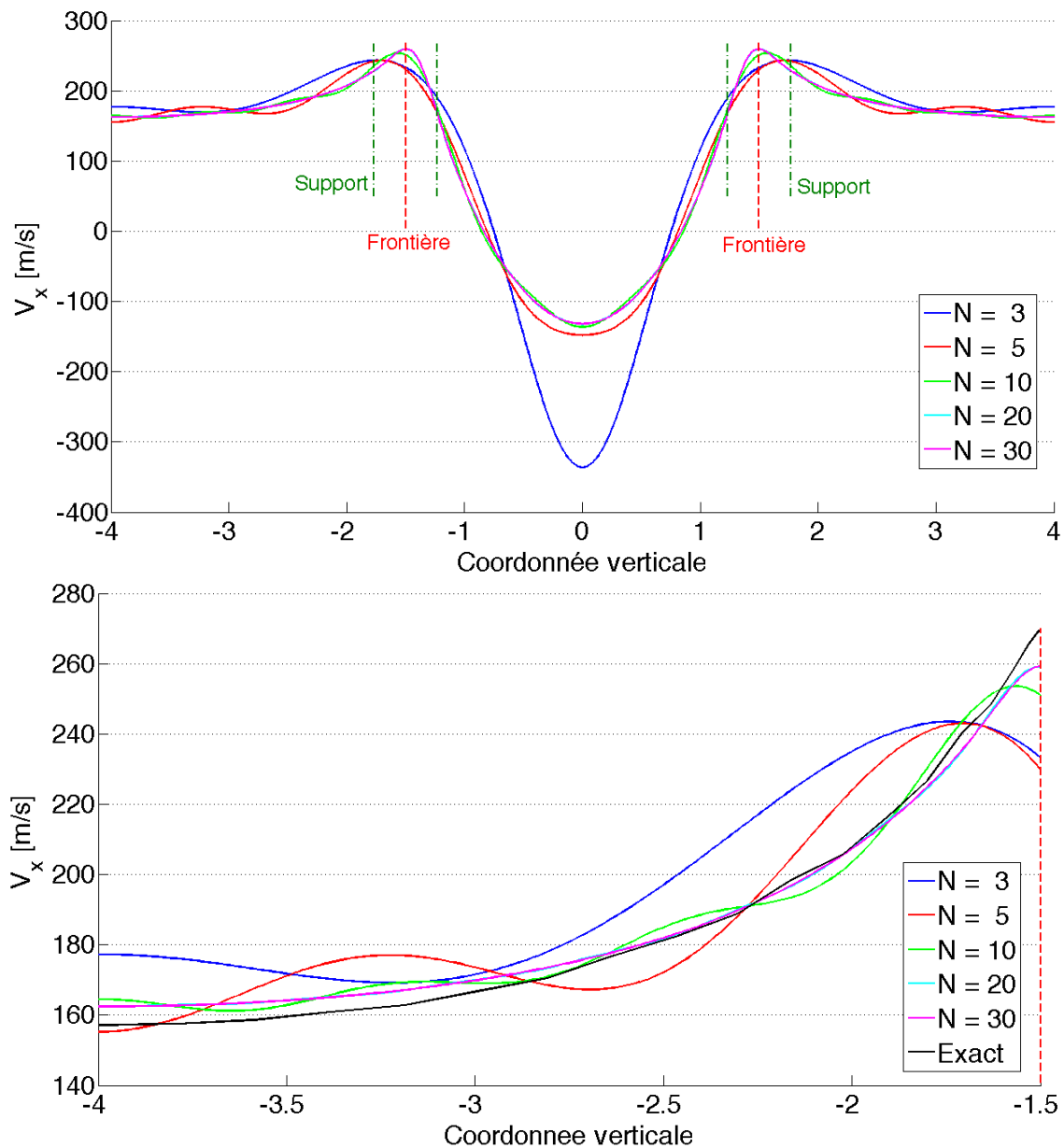


FIG. 7.6 – Evolution de la vitesse horizontale  $V_x$  en une coupe  $x = 10$  pour des simulations incluant 3, 5, 10 et 20 modes : vue générale (haut) et zoom sur le domaine fluide (bas).

Cette figure montre effectivement une convergence de l'écoulement vers l'évolution exacte indiquée également sur la figure. Cette observation est très importante puisqu'elle démontre l'implémentation correcte de la méthode et justifie l'étude réalisée au chapitre 2 qui indiquait notamment que chaque mode supplémentaire calculé était récompensé par un gain de précision.

Sur la figure 7.6 (haut), un écoulement fictif est observé à l'intérieur du corps, résultant du champ de force imposé. Il ne pose pas de problème puisqu'il est séparé de l'écoulement externe par un champ de force empêchant les interactions. Il est même préférable de ne pas l'annuler, car le conserver permet d'obtenir une évolution douce du signal. Les bornes du support de la fonction de distribution sont indiquées sur cette figure.



La figure 7.6 (bas) montre que les évolutions obtenues par des simulations incluant 20 et 30 modes se superposent, indiquant que la convergence spectrale est obtenue pour environ 20 modes. Cette figure indique également une différence entre l'écoulement exact et l'écoulement obtenu pour 30 modes. Cette différence est probablement à mettre en rapport avec la distribution de la force propre à la méthode de frontière immergée.

La deuxième conséquence attendue de l'augmentation du nombre de modes est une meilleure définition des coefficients de Fourier, grâce aux interactions non-linéaires enrichies entre l'écoulement aux perturbations et l'écoulement moyen. En effet, ce dernier dépend du nombre de modes au travers de l'énergie cinétique des perturbations. Quant aux différents coefficients de Fourier, ils interagissent entre eux au travers de l'écoulement moyen et donc de cette même énergie cinétique. L'évolution axiale du mode moyen (i.e. le mode de fréquence nulle) de la densité en fonction du nombre d'harmoniques inclus dans la simulation est présentée à la figure 7.7. Nous avons arrêté la représentation à 10 modes, le calcul de 20 modes offrant la même courbe, signifiant que l'énergie cinétique des perturbations atteint sa valeur de convergence pour 10 modes.

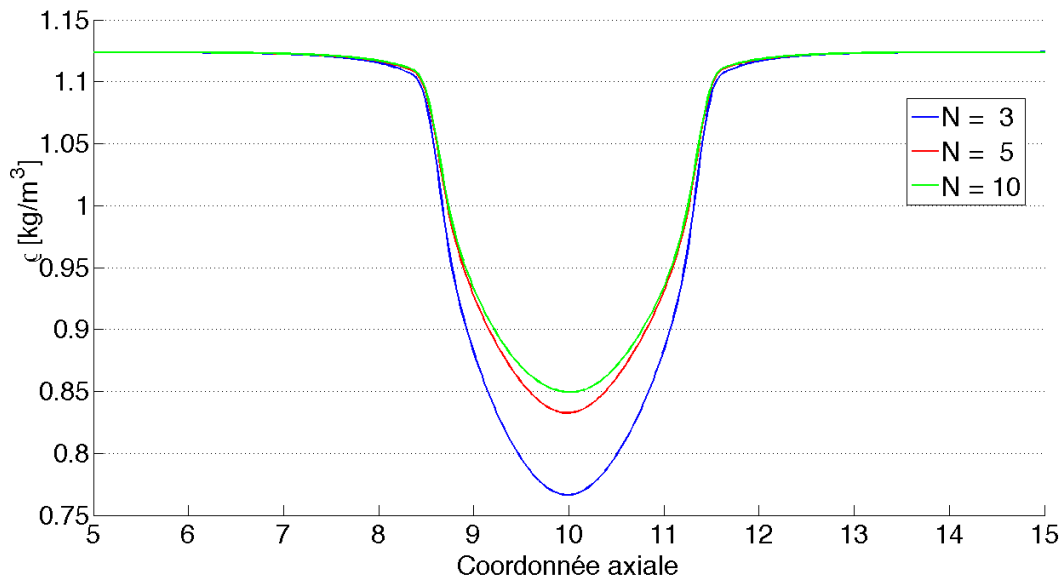


FIG. 7.7 – Evolution du mode moyen de la densité  $\rho$  sur le domaine pour des simulations incluant 3, 5, 10 modes.

Il est utile de préciser que la valeur moyenne représentée à la figure 7.7 ne correspond pas à la valeur moyenne réelle, cette dernière résultant de l'écoulement sur le domaine fluide uniquement et non sur un domaine de calcul recouvrant le corps. Pour obtenir la valeur moyenne physique à partir d'une simulation à frontière immergée, un post-traitement est nécessaire pour reconstruire les évolutions physiques des différentes grandeurs et prendre leur moyenne sur le domaine fluide. Le corollaire est que l'influence des modes de perturbation sur la moyenne physique ne se réduit pas à l'énergie cinétique des perturbations. Ceci signifie que les valeurs moyennes physiques dépendent de manière plus forte des différentes harmoniques, pouvant donc éventuellement nécessiter un calcul plus riche.

La moyenne physique de la vitesse absolue<sup>3</sup> est représentée à la figure 7.8 pour des simulations harmoniques incluant 3, 5, 10 et 20 modes. L'évolution correspondant à 30 modes n'est pas représentée, celle-ci se superposant à celle obtenue pour 20 modes. Il subsiste un léger décalage entre les courbes correspondant à 10 et 20 modes, indiquant une convergence plus lente de la moyenne physique que la moyenne sur le domaine recouvrant (i.e. le coefficient de Fourier de fréquence nulle). Nous ne représentons pas l'évolution de la densité, le résultat étant similaire.

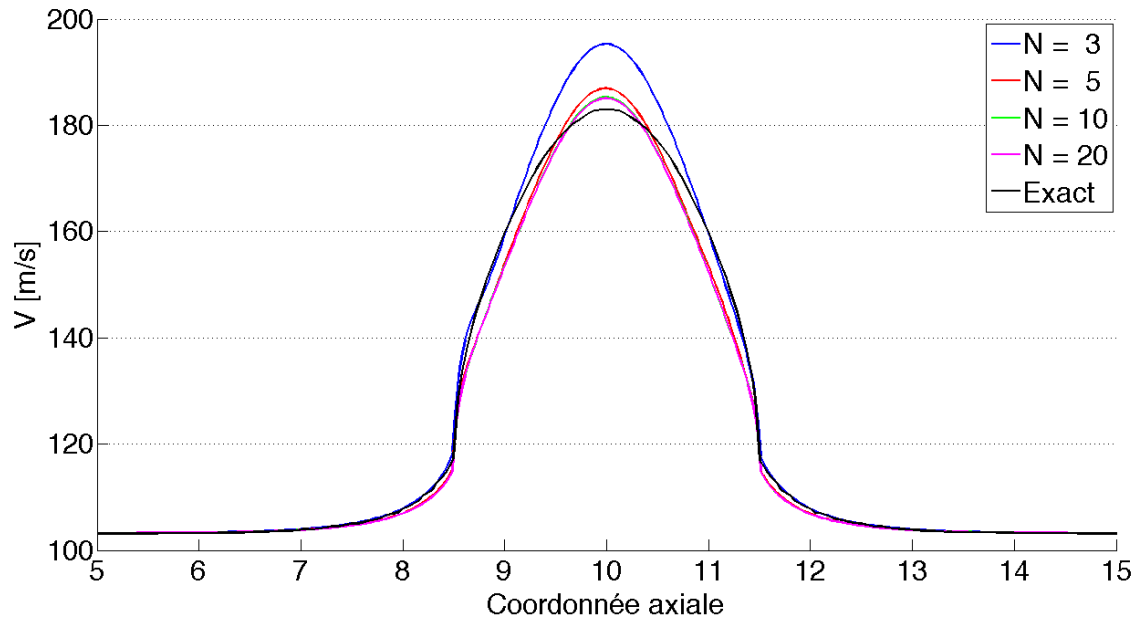


FIG. 7.8 – Evolution de la vitesse absolue sur le domaine pour des simulations incluant 3, 5, 10 et 20 modes.

L'écart entre la vitesse absolue calculée par la méthode harmonique et la valeur dite exacte est très probablement à mettre sur le compte de la distribution de la force du corps et de la linéarisation des équations aux perturbations. Ceci devra être investigué dans le futur.

### 7.3.2 Influence de la discrétisation méridienne

La résolution harmonique nécessite toujours un maillage, celui-ci étant bidimensionnel dans le cas méridien, unidimensionnel dans le cas de notre application. Le raffinement de ce maillage influence donc la qualité du résultat, comme pour toute simulation numérique. Cet effet est marqué dans notre cas, le cas test choisi étant difficile, comme mentionné précédemment. Les résultats présentés dans cette section concernent une simulation harmonique comprenant 10 modes.

La figure 7.9 représente l'évolution de la vitesse axiale en une coupe  $y = 0$  pour des maillages incluant 200, 300, 400, 475 et 550 points. Cette figure témoigne d'un passage plus ou moins sévère au travers du champ de force en fonction de la qualité de discrétisation. A ce stade, nous ne pouvons discuter de manière approfondie l'origine de cette discontinuité. L'amélioration de la discrétisation du champ de force constitue une étape future de nos développements.

<sup>3</sup>Nous illustrons ici la vitesse absolue et non la densité car elle est plus représentative de l'écoulement.

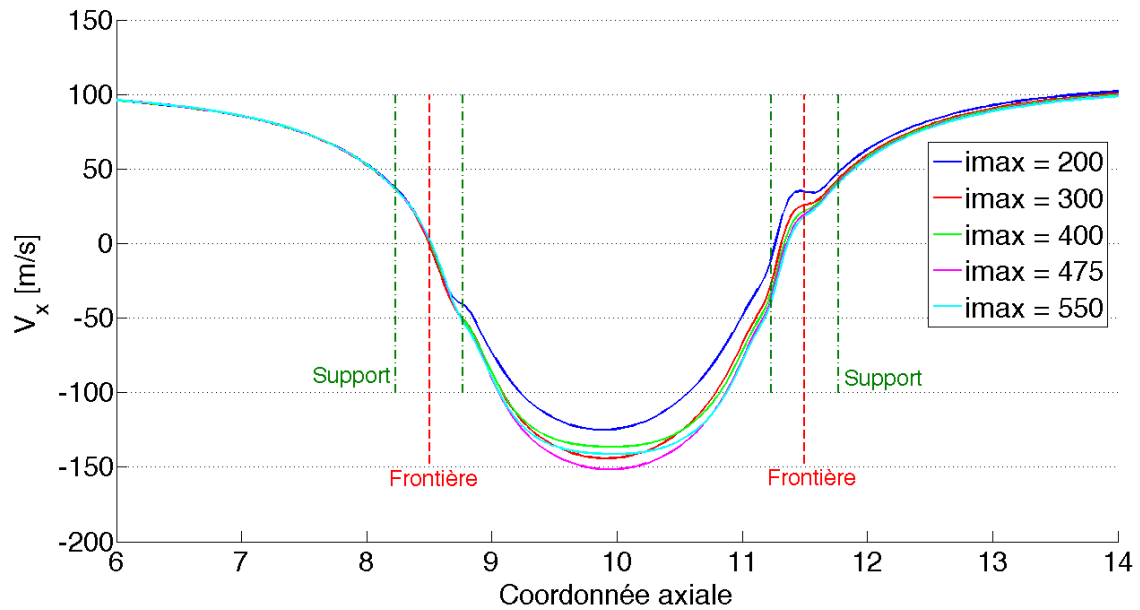


FIG. 7.9 – Evolution de la vitesse horizontale  $V_x$  en une coupe  $y = 10$  pour des maillages de 200, 300, 400, 475 et 550 points.

La figure 7.10 illustre l'évolution de l'énergie cinétique des perturbations obtenue pour différentes discrétisations, pour 10 modes calculés. L'évolution générale est assez comparable à la solution exacte. La hauteur du premier pic varie légèrement avec la qualité du maillage, le deuxième est par contre affecté plus sévèrement. Mentionnons aussi que l'évolution présentée dépend, au travers du champ de force, de la largeur de la fonction de distribution et de la procédure de recalage.

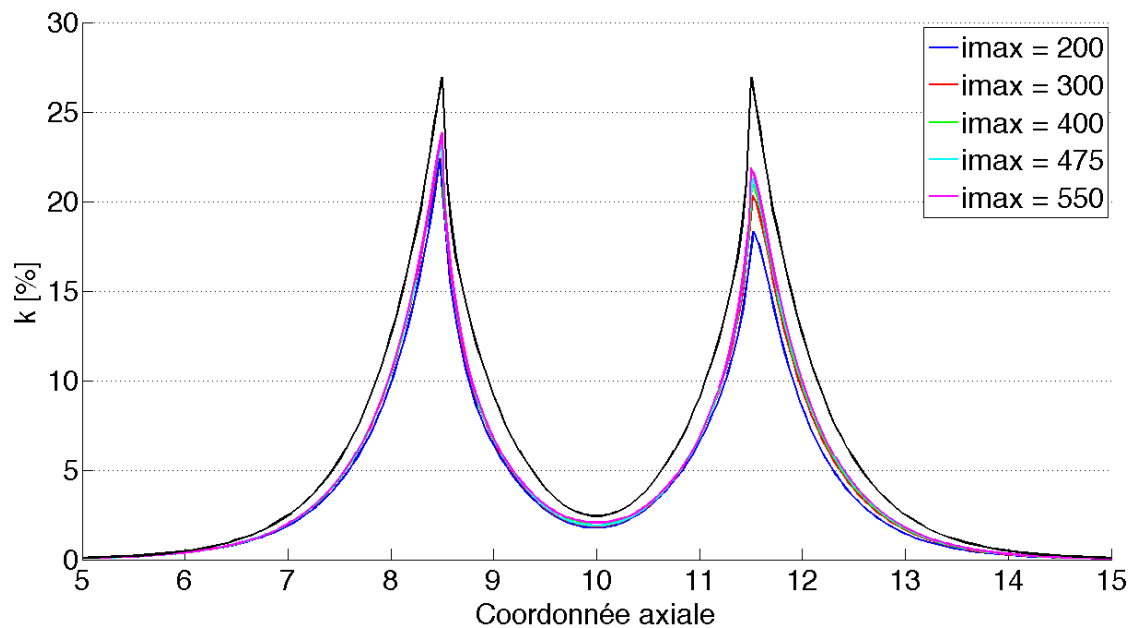


FIG. 7.10 – Evolution de l'énergie cinétique des perturbations pour des maillages de 200, 300, 400, 475 et 550 points.

L'étude de l'influence des discrétisations cartésienne et harmonique nous montre que toutes deux ont un impact important sur la qualité du résultat. En effet, pour obtenir une représentation précise de l'effet du corps immergé, le champ de force doit être ressenti avec une précision équivalente dans les directions méridiennes, au travers du maillage cartésien, et circconférentielle, au travers de la décomposition harmonique.

### 7.3.3 Les champs bidimensionnels

Pour conclure la présentation des résultats de simulation, les champs de vitesse horizontale, de vitesse verticale et de pression statique sont illustrés respectivement aux figures 7.11, 7.12 et 7.13, chacune étant composé du résultat obtenu par la méthode de frontière immergée sur maillage bidimensionnel, du résultat obtenu par un code de calcul distinct opérant sur maillage conforme et du résultat obtenu par la méthode harmonique comprenant 30 modes.

Pour chaque figure, une quinzaine de lignes d'iso-quantité sont superposées à l'écoulement. Celles-ci sont réparties uniformément sur l'intervalle correspondant à chaque grandeur, ces intervalles étant les mêmes pour les trois représentations. Une comparaison directe par la forme de ces courbes est donc possible.

En ce qui concerne les résultats obtenus par la méthode de frontière immergée, l'écoulement au sein du corps fictif n'a pas été représenté, un disque blanc représentant le corps. La largeur  $\epsilon$  du support de la fonction de distribution vaut  $\Delta y/30$ .

Pour les trois figures présentées, la symétrie entre les zones amont et aval du cylindre semble davantage respectée en simulation harmonique que dans le cas de frontière immergée sur un maillage bidimensionnel. Ceci pourrait provenir du fait que la dissipation numérique est moindre dans le cas harmonique, car le maillage utilisé comporte 400 points dans la direction horizontale alors qu'il n'en comprenait que 160 dans le cas précédent, les temps de calcul étant trop importants pour davantage de points. De plus, la qualité de la représentation circconférentielle s'améliore de façon plus importante par l'ajout de modes de Fourier que par l'ajout de mailles cartésiennes, exploitant les propriétés de convergence des séries de Fourier. Il s'agit là d'un avantage important de la méthode harmonique, qui augure des temps de calculs inférieurs aux simulations complètes sur maillage conforme. La quantification de ce gain de temps de restitution constituera une étude intéressante pour la suite.

Néanmoins, la qualité de prédiction générale de la méthode harmonique semble inférieure à celle de la méthode de frontière immergée sur maillage bidimensionnel. Nous voyons deux causes principales à cette observation. La première est la différence de méthode d'imposition indirecte de l'imperméabilité du corps. En effet, une force de pression pré-calculée a été utilisée dans le premier cas, la technique de Mohd-Yusof dans le second. La deuxième est la linéarisation qui a été opérée pour la méthode harmonique. La compréhension de ces deux points devra être approfondie à l'avenir.

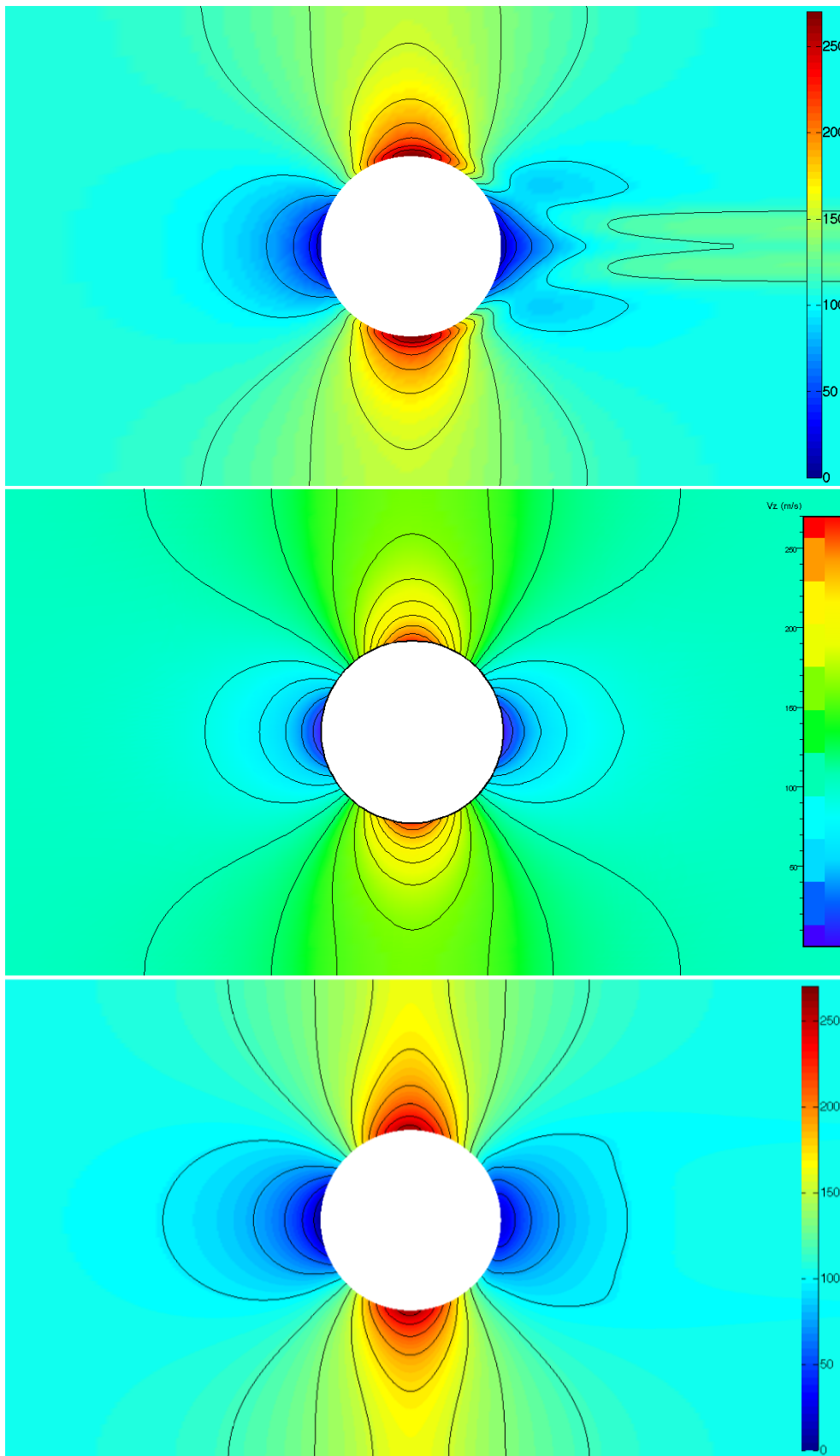


FIG. 7.11 – Comparaison de la vitesse horizontale exprimée en [m/s] obtenue par la méthode de frontière immergée (haut), par une méthode de maillage conforme (milieu) et par une méthode harmonique (bas).

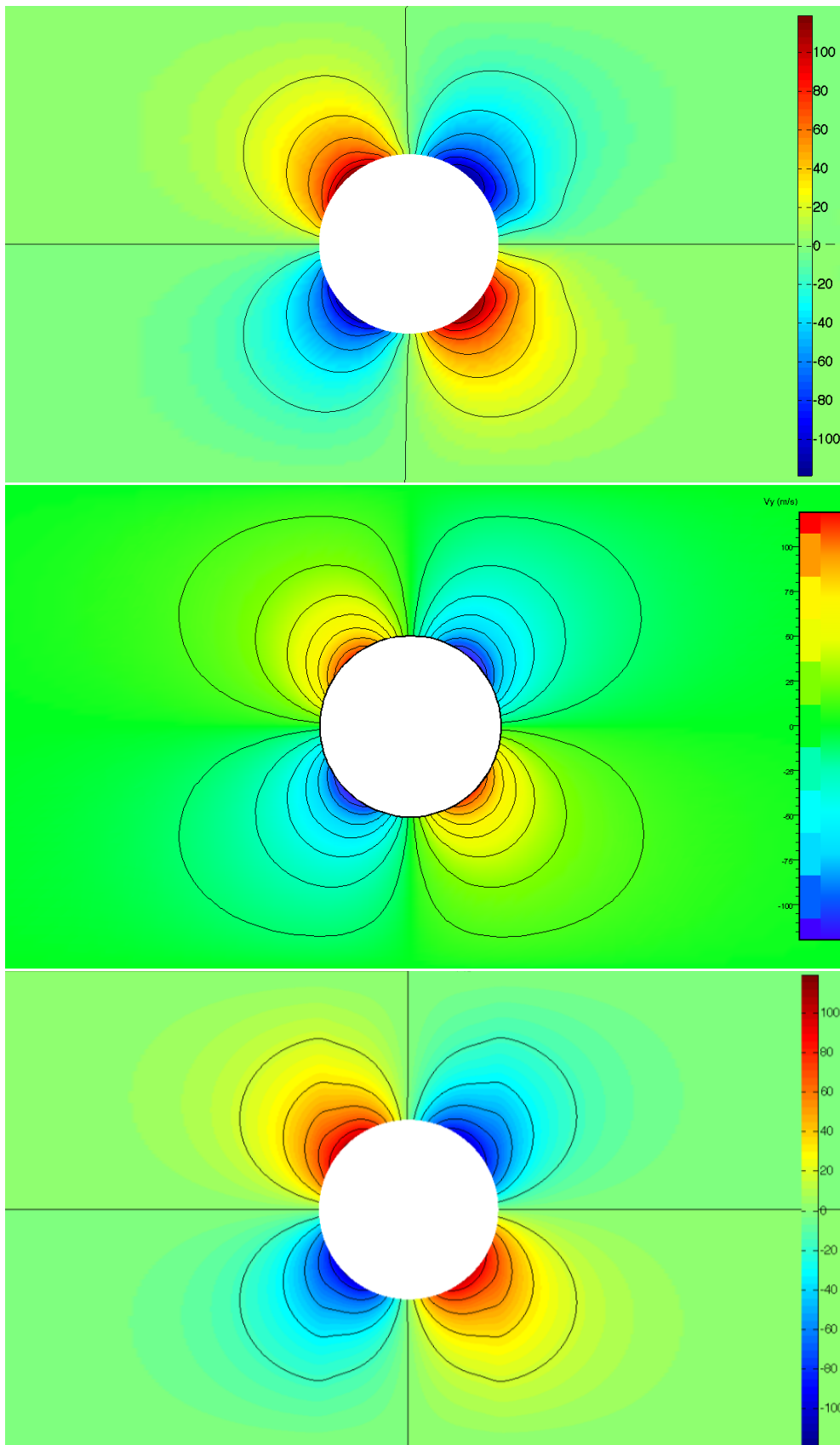


FIG. 7.12 – Comparaison de la vitesse verticale exprimée en [m/s] obtenue par la méthode de frontière immergée (haut), par une méthode de maillage conforme (milieu) et par une méthode harmonique (bas).

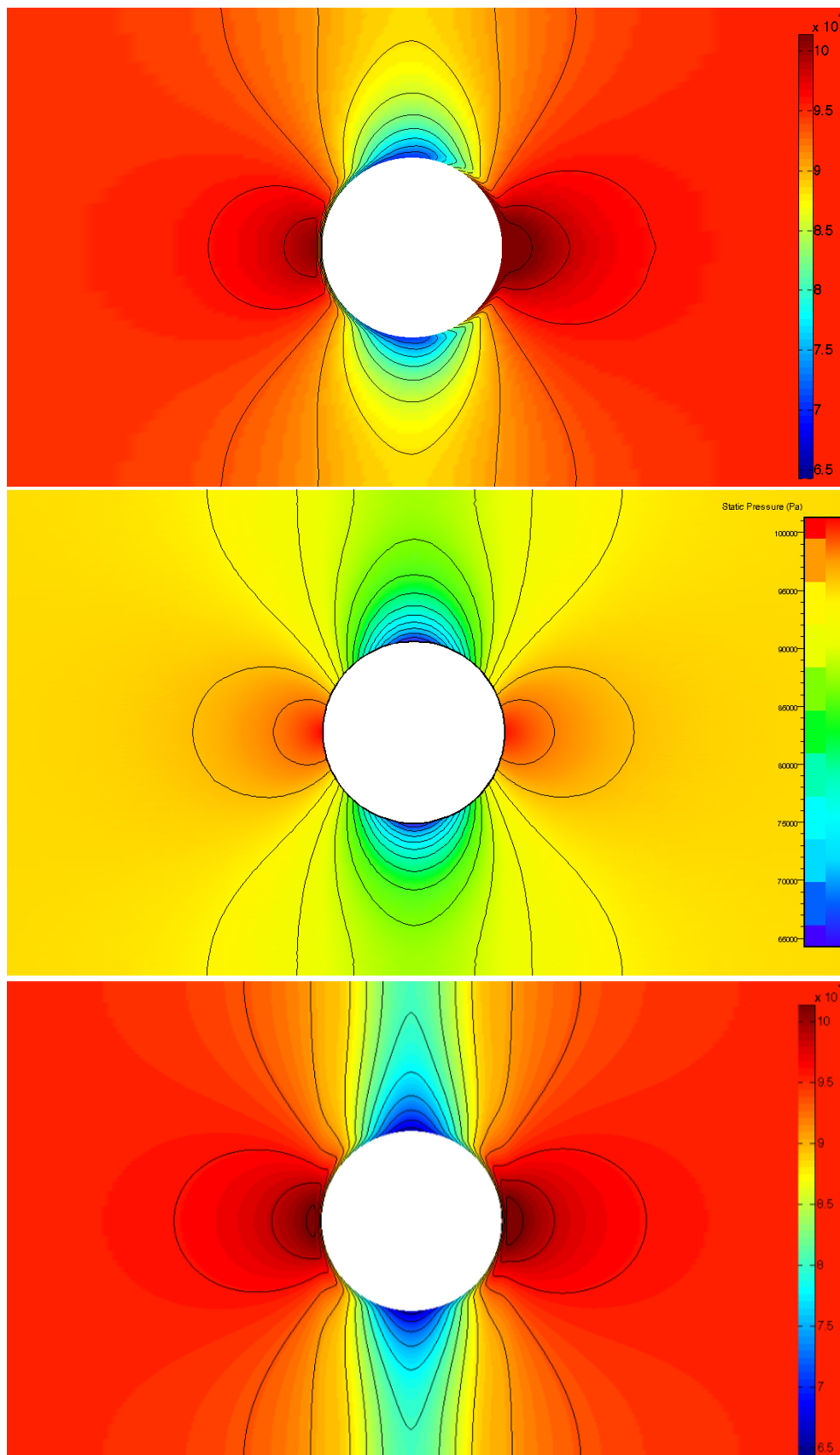


FIG. 7.13 – Comparaison de la pression statique exprimée en [Pa] obtenue par la méthode de frontière immergée (haut), par une méthode de maillage conforme (milieu) et par une méthode harmonique (bas).

## 7.4 Synthèse de la méthode harmonique

Au cours de ce chapitre, nous avons évalué les possibilités d'une méthode harmonique applicable au cas du modèle méridien. Celle-ci présente un potentiel certain, mais nécessite davantage de développement. Nous citons ci-dessous quelques points à améliorer pour rendre la méthode réellement efficace.

Dans l'exemple mis en œuvre, nous avons procédé à une linéarisation. Pour être valide, celle-ci requiert que les perturbations soient suffisamment inférieures à la valeur moyenne. Si c'est généralement le cas pour des perturbations instationnaires, l'hypothèse est douteuse pour les perturbations circonférentielles. Il nous faudra dès lors inclure les termes non-linéaires principaux au sein des équations harmoniques. Pour ce faire, nous envisagerons dans un premier temps les simplifications proposées par Billson [6].

La méthode harmonique a été appliquée avec un terme source de force basé sur une distribution connue de pression, même si celle-ci a été recalée. À l'avenir, il serait intéressant d'obtenir une modélisation harmonique d'un terme dynamique, calculé selon l'écoulement pour respecter l'imperméabilité du corps.

Une telle tentative a été entreprise dans le cas du cylindre, mais sans donner de résultat satisfaisant, l'écoulement décollant sur la deuxième partie du cylindre. Ceci et d'autres observations réalisées au cours du chapitre tendent à affirmer que le schéma numérique est trop dissipatif. Nous avons notamment relevé une dégradation de l'écoulement au niveau du champ de force représentant l'aube. Une analyse plus fine de ces difficultés numériques sera nécessaire.

La fonction de distribution décrit la manière dont l'effet des frontières immergées est reporté sur le domaine cartésien. Il s'agit donc d'un point très important de la méthode. Nous n'avons jusqu'ici appliqué qu'un seul type de fonction. Il s'agira à l'avenir d'en essayer d'autres. Nous devons aussi vérifier la consistance de cette distribution dans le cas harmonique.

Enfin, soulignons que la méthode harmonique a été testée à l'aide de Matlab. Cette option a été choisie pour des raisons de facilité de visualisation et de correction du code. L'efficacité d'un tel codage est loin d'atteindre celle d'un langage compilé. C'est pour cette raison que nous n'avons pas mentionné de temps de calcul lors de notre étude. La prochaine étape est la traduction du code dans un langage optimisé pour la simulation numérique. Ceci permettra d'aller plus avant dans la compréhension de la méthode. Cependant, nous pouvons nous attendre à ce que la méthode harmonique appliquée au cas méridien soit caractérisée par des temps de restitution inférieurs à une simulation tridimensionnelle. En effet, dans ce dernier cas, l'information doit se faire ressentir progressivement dans une direction supplémentaire, la direction circonférentielle, au travers des flux. Ceci n'est pas le cas dans la méthode harmonique, puisque la représentation fréquentielle de l'écoulement correspond à une distribution instantanée de l'information.

Si la méthode en est toujours à un stade de développement intermédiaire, elle a montré des perspectives intéressantes, permettant de reconstruire de manière approchée un écoulement d'un ordre supérieur par rapport au code de calcul utilisé. Il s'agit donc d'un pas important vers l'affranchissement vis-à-vis de l'empirisme en simulation méridienne.



# Conclusions et perspectives

Tout au long de ce travail, une idée commune s'est dégagée : la diminution de l'empirisme en simulation méridienne, lequel constitue le point faible des codes de calculs modernes. Il s'agit d'un objectif ambitieux et novateur. Ce travail constitue une première étape, le chemin vers une résolution numérique d'ordre supérieur efficace restant conséquent.

Nous avons débuté ce travail par la compréhension de la cascade d'Adamczyk, menant au système d'équations du canal moyenné. L'objectif de cet auteur était d'unifier, au travers d'un modèle général et rigoureux, les nombreux modèles d'écoulement en turbomachine, assimilant chacun d'eux à une particularisation du modèle général, par la suite d'hypothèses. Adamczyk a donc exprimé en langage mathématique les tentatives de reproduction de la physique entreprises par divers auteurs. C'est par l'analyse de ce modèle que nous avons pu mettre en évidence les nécessités d'apport externe d'un modèle méridien : à savoir la force des aubes, les termes sources d'énergie et les tensions circonférentielles. L'intérêt de ces dernières quant à la qualité de prédiction de l'écoulement a été précisé et illustré.

Ensuite, deux pistes de résolution de notre problème de fermeture ont été envisagées : les méthodes harmoniques de He et de Hall. Celles-ci ont en effet démontré leur efficacité et leur habilité à résoudre le problème de la fermeture du modèle stationnaire tridimensionnel. Par après, nous avons montré la difficulté d'appliquer ces méthodes au modèle méridien, la nature de ce dernier étant très différente du précédent. En effet, dans le cas méridien, le générateur de non-uniformité appartient au domaine de calcul utilisé pour résoudre le problème d'ordre supérieur, le rendant non périodique et non-uniforme dans la direction circonférentielle.

La condition sine qua non à l'extension d'une méthode harmonique efficace s'est donc imposée : faire apparaître l'aube comme une information externe au domaine de calcul. Nous avons donc dirigé nos développements vers la méthode de frontière immergée, qui traduit l'influence de l'aube au travers d'une distribution de force agissant sur un domaine uniforme. Utilisant ce principe, nous avons démontré la possibilité de recourir à une méthode de superposition modale de calculs méridiens pour reconstruire l'information d'ordre supérieur : l'écoulement tridimensionnel stationnaire. Cette technique a démontré un certain potentiel mais aussi certaines faiblesses qu'il faudra corriger. Parmi les points à améliorer figurent notamment la prise en compte des non-linéarités, l'amélioration de la consistance de la distribution de l'aube et de sa transposition numérique.

Ce stade de développement est à la croisée des chemins, il conviendra de définir une approche claire vis-à-vis de la simulation harmonique. En effet, une première vision des choses est de l'assimiler à un complément d'une simulation méridienne classique, donnant accès aux tensions circonférentielles. Une deuxième optique serait de l'utiliser de manière autonome, pour reproduire de manière approchée une image tridimensionnelle de l'écoulement, avec un temps de restitution inférieur à celui des codes tridimensionnels classiques. Dans ce dernier cas, il sera nécessaire de préciser le calcul de la distribution de pression sur le corps.

Nous concluons donc que, s'il reste des points à préciser et à améliorer, les perspectives de cette méthode sont très encourageantes. Voici notamment ce que nous proposons, dans le désordre, pour la suite du travail de thèse :

- application de la méthode sur une géométrie réelle d'aubage,
- test d'autres fonctions de distribution,
- amélioration du schéma numérique,
- résolution par intégration temporelle implicite,
- revue et test de différentes méthodes de calcul de la distribution de pression sur le corps,
- extension au cas bidimensionnel,
- généralisation au cas visqueux,
- application à un écoulement comprenant un choc.

# Bibliographie

- [1] Adamczyk, J.J., 1984, *Model Equation for Simulating Flows in Multistage Turbomachinery*, NASA-TM-86869.
- [2] Adamczyk, J.J., Mulac, R.A., Celestina, M. L., 1986, *A Model for Closing the Inviscid Form of the Average-Passage Equation System*, Transactions of the ASME Journal of Turbomachinery, vol. 108, pp. 180-186.
- [3] Adkins, G.G. Jr, Smith, L.H. Jr, 1982, *Spanwise Mixing in Axial-Flow Turbomachines*, Transactions of the ASME Journal of Engineering for Power, vol. 104, pp. 97-110.
- [4] S. Baralon, *On Multistage Analysis of Transonic Compressor : From Axisymmetric Throughflow Time Marching to Unsteady Three Dimensional Methods*, Ph.D thesis, Chalmers University of Technology, 2000.
- [5] Bardoux, F., 2000, *Modélisation des interactions instationnaires rotor-stator en turbomachine multi-étages*, Ph.D thesis, Ecole centrale de Lyon.
- [6] Billson, M., Eriksson, L.E., Davidson, L., 2005, *Acoustic Terms for the Linearized Euler Equations in Conservative Form*, AIAA Journal, vol. 43, pp. 752-759.
- [7] Boyd, J.P., 2001, *Chebyshev and Fourier spectral methods*, 2nd edition, Dover, New-York.
- [8] Callot, S., 2002, *Analyse des mécanismes macroscopiques produits par les interactions rotor/stator dans les turbomachines*, Ph.D thesis, Ecole centrale de Lyon.
- [9] Çetin, M., Üçer, A.Ş., Hirsch, C., Serovy, G.K., 1987, *Application of Modified Loss and Deviation Correlations to Transonic Axial Compressors*, AGARD R-745.
- [10] Charbonnier, D., Leboeuf, F., 2003, *Development of a model for the deterministic stresses in a transonic turbine stage*, Proceedings of the 5th European Conference on Turbomachinery, pp. 1197-1206.
- [11] Charbonnier, D., Leboeuf, F., Trébinjac, I., 2004, *Steady Simulation of Rotor-Stator Interactions With a New Unsteady Flow Model - Application to a Transonic Centrifugal Compressor Stage and an Axial Turbine Stage*, ASME Paper GT2004-53724.
- [12] Chen, T., Vasanthakumar, P., He, L., 2001, *Analysis of Unsteady Blade Row Interaction Using Nonlinear Harmonic Approach*, AIAA journal of Propulsion and Power, vol. 17, pp. 651-658.
- [13] Dawes, W.N., 1992, *Toward Improved Throughflow Capability : The Use of Three-Dimensional Viscous Flow Solvers in a Multistage Environment*, Transactions of the ASME Journal of Turbomachinery, vol. 114, pp. 8-17.

- [14] Gallimore, S.J., Cumpsty, N.A., 1986, *Spanwise Mixing in Multistage Axial Flow Compressors : Part I - Experimental Investigation*, Transactions of the ASME Journal of Turbomachinery, vol. 108, pp. 2-9.
- [15] Gallimore, S.J., 1986, *Spanwise Mixing in Multistage Axial Flow Compressors : Part II - Throughflow Calculations Including Mixing*, Transactions of the ASME Journal of Turbomachinery, vol. 108, pp. 10-16.
- [16] Godard, B., 2006, *Analyse de signaux vibratoires par ondelettes*, Licenciate Thesis, Université de Liège.
- [17] Goldstein, D., Handler, R., Sirovich, L., 1993, *Modeling a No-Slip Flow Boundary with an External Force Field*, Journal of Computational Physics, vol. 3105, pp. 354-366.
- [18] Hall, K.C., Crawley, E.F., 2002, *Calculation of Unsteady Flows in Turbomachinery Using the Linearized Euler Equations*, AIAA Journal, vol. 27, pp. 777-787.
- [19] Hall, K.C., Thomas, J.P., Clark, W.S., 2002, *Computation of Unsteady Nonlinear Flows in Cascades Using a Harmonic Balance Technique*, AIAA Journal, vol. 40, pp. 879-886.
- [20] He, L., Ning, W., 1998, *Efficient Approach for Analysis of Unsteady Viscous Flows in Turbomachines*, AIAA journal, vol. 36, pp. 2005-2012.
- [21] He, L., 1999, *Nonlinear Time-Domain Aerodynamic Solutions*, VKI Lecture Series.
- [22] He, L., 1999, *Nonlinear Harmonic Aerodynamic Modelling*, VKI Lecture Series.
- [23] He, L., Chen, T., Wells, R.G., Li, Y.S., Ning, W., 2002, *Analysis of Rotor-Rotor and Stator-Stator Interferences in Multi-Stage Turbomachines*, Transactions of the ASME Journal of Turbomachinery, vol. 124, pp. 564-571.
- [24] He, L., 2006, *Fourier Modeling of Steady and Unsteady Nonaxisymmetrical Flows*, Journal of Propulsion and Power, vol. 22, pp. 197-201.
- [25] Hiernaux, S., Lebas, C., Brouckaert, J.F., Lepot, I., 2007, *The Next Generation Booster*, Proceedings of the 18th ISABE Conference.
- [26] Hirsch, C., Dring, R.P., 1987, *Through-Flow Models for Mass and Momentum-Averaged Variables*, Transactions of the ASME Journal of Turbomachinery, vol. 109, pp. 362-370.
- [27] Howard, M.A., Gallimore, S.J., 1993, *Viscous Throughflow Modeling for Multistage Compressor Design*, Transactions of the ASME Journal of Turbomachinery, vol. 115, pp. 296-304.
- [28] Jennions, I.K., Stow, P., 1986, *The Importance of Circumferential Non-uniformities in a Passage-Averaged Quasi-Three-Dimensional Turbomachinery Design System*, Transactions of the ASME Journal of Engineering for Power, vol. 108, pp. 240-245.
- [29] Johnson, R.W., Adamczyk, J.J., 1989, *Kinetic Energy Equations for the Average-Passage Equation System*, Journal of Propulsion and Power, vol. 5, pp. 252-254.
- [30] Khadra, K., Angot, P., Parneix, S., Caltagirone, J.P., 2000, *Fictitious domain approach for numerical modelling of Navier-Stokes equations*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 34, pp. 651-684.
- [31] Lacor, C., 2004, *Solution of Time Dependent Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations with the Finite Volume Method*, GraSMcC course, Vrije Universiteit Brussel.

- [32] Lai, M.C., Peskin, C.S., 2000, *An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity*, Journal of Computational Physics, vol. 160, pp. 705-719.
- [33] Léonard, O., 1992, *Conception et développement d'une méthode inverse de type Euler et application à la génération de grilles d'aubes transsoniques.*, Ph.D thesis, Faculté Polytechnique de Mons et Institut von Karman.
- [34] Maple, R.C., King, P.I., Oxley, M.E., 2003, *Adaptative Harmonic Balance Solutions to Euler's Equation*, AIAA journal, vol. 41, pp. 1705-1714.
- [35] McMullen, M., Jameson, A., Alonso, J., 2006, *Demonstration of Nonlinear Frequency Domain Methods*, AIAA journal, vol. 44, pp. 1428-1435.
- [36] Mittal, R., Iaccarino, G., 2005, *Immersed Boundary Methods*, Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 37, pp. 239-261.
- [37] Mohd-Yusof, J., 1998, *Development of immersed boundary methods for complex geometries*, CTR Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research ; NASA Ames/Stanford Univ., pp. 325-336.
- [38] Ning, W., He, L., 1998, *Computation of Unsteady Flows Around Oscillating Blades Using Linear and Nonlinear Harmonic Euler Methods.*, Transactions of the ASME Journal of Turbomachinery, Vol. 120, pp. 508-514.
- [39] Orszag, S.A., Israeli, M., 1974, Annual Review of Fluid Mechanics, 6, 281.
- [40] Perrin, G., Leboeuf, F., 1995, *Investigation of Throughflow Hypothesis in a Turbine Cascade Using a Three-Dimensional Navier-Stokes Computation*, Transactions of the ASME Journal of Turbomachinery, vol. 117, pp. 126-132.
- [41] Perrin, G., Leboeuf, F., 1995, *Modèles pour le calcul de fluctuations spatiales tridimensionnelles dans le cadre d'une approche méridienne en turbomachine*, Paper presented at the AGARD PEP 85th Symposium on "Loss Mechanisms and Unsteady Flows in Turbomachines", held in Derby, United Kingdom.
- [42] Peskin, C.S., 2002, *The immersed boundary method*, Acta Numerica, 11, pp. 1 ? 39.
- [43] Rhie, C.M., Gleixner, A.J., Spear, D.A., Fischberg, C.J., Zacharias, R.M., 1995, *Development and Application of a Multistage Navier-STokes Solver, Part I : Multistage Modelling Using Bodyforces and Deterministic Stresses*, ASME Paper 95-GT-342.
- [44] Roberts, W.B., Serovy, G.K., Sandercock, D.M., 1986, *Modeling the 3-D Flow Effects on Deviation Angle for Axial Compressor Middle Stages*, Transactions of the ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol. 108, pp. 131-137.
- [45] Roberts, W.B., Serovy, G.K., Sandercock, D.M., 1988, *MDesign Point Variation of 3D Loss and Deviation for Axial Compressor Middle Stages*, ASME Paper 88-GT-57.
- [46] Sehra, A.K., Kerrebrock, J.L., 1979, *Blade-to-Blade Effects on Mean Flow in Transonic Compressors*, AIAA Journal, vol. 19, No. 4, pp. 476-483.
- [47] Smith, L.H., 1966, *The Radial-Equilibrium Equation of Turbomachinery*, Transactions of the ASME Journal of Engineering for Power, Series A, Vol. 88, pp. 1-12.
- [48] Simon, J.F., 2007, *Contribution to Throughflow Modelling for Axial Flow Turbomachines*, Ph.D thesis, University of Liège.

- 
- [49] Stridh, M., Eriksson, L.E., Hall, U., 2003, *Transfer of Unsteady and Non-Axisymmetric Effects in Throughflow Calculations*, Proceedings of the 16th ISABE Conference.
  - [50] Stridh, M., Eriksson, L.E., 2005, *Modeling Unsteady Flow Effects in a 3D Transonic Compressor*, ASME Paper GT2005-68149.
  - [51] Stridh, M., Eriksson, L.E., 2006, *Solving Harmonic Linear Problems in Unsteady Turbomachinery Flows Using a Preconditioned GMRES Solver*, ECOMAS.
  - [52] Sturmayer, A., 2004, *Evolution of a 3D Structured Navier-Stokes Solver Towards Advanced Turbomachinery Applications*, Ph.D thesis, Vrije Universiteit Brussel.
  - [53] Thomas, J.P., Léonard, O., 2008, *Investigating Circumferential Non-Uniformities in Throughflow Calculations Using an Harmonic Reconstruction*, ASME Paper GT2008-50328.
  - [54] Vander Meulen, R., 2006, *The Immersed Boundary Method for the (2D) Incompressible Navier-Stokes Equations*, Master of Science Thesis, Delft University of Technology.
  - [55] Vilmin, S., Lorrain, S., Hirsch, C., Swoboda, S., 2006, *Unsteady Flow Modeling Across The Rotor/Stator Interface Using The Nonlinear Harmonic Method*, ASME Paper GT2006-90210.

## Annexe A

# Formulation des termes additionnels

La force des aubes, composante non-visqueuse, est calculée par extraction de la pression s'exerçant sur les aubes d'une roue en comportant un nombre N.

$$f_{bz} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi b} \left[ p \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]_p^s$$

$$f_{br} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi b} \left[ p \frac{\partial \theta}{\partial r} \right]_p^s$$

$$f_{b\theta} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi b} \left[ -\frac{p}{r} \right]_p^s$$

La force des aubes, composante visqueuse, est calculée par extraction des tensions visqueuses s'exerçant sur les aubes d'une roue en comportant un nombre N.

$$f_{vz} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi b} \left[ -\tau_{zz} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \tau_{rz} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\tau_{\theta z}}{r} \right]_p^s$$

$$f_{vr} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi b} \left[ -\tau_{zr} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \tau_{rr} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\tau_{\theta r}}{r} \right]_p^s$$

$$f_{v\theta} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi b} \left[ -\tau_{z\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \tau_{r\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right]_p^s$$

Les termes sources d'énergie sont calculés par extraction du flux de chaleur s'exerçant sur l'aube.

$$e_v = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi b} \left[ -q_z \frac{\partial \theta}{\partial z} - q_r \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{q_\theta}{r} \right]_p^s$$

La composante non-visqueuse apparaît dans une roue mobile de vitesse de rotation  $\omega$ .

$$e_b = \omega r f_{b\theta}$$



## Annexe B

# Le système d'équations de Navier-Stokes 3D instationnaires

Le système d'équations de Navier-Stokes 3D instationnaire est présenté aux équations (B.1) à (B.5), dans un repère cylindrique  $(r, \theta, z)$ . Ces équations sont décrites en fonction des grandeurs relatives,  $\omega$  étant la vitesse de rotation.

**Equation de conservation de la masse**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{B.1})$$

**Equations de conservation de la quantité de mouvement**

**Composante axiale**

$$\frac{\partial \rho V_z}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V_z V_z + p)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r V_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_\theta V_z}{\partial \theta} = \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} \quad (\text{B.2})$$

**Composante circonférentielle**

$$\frac{\partial \rho V_\theta}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_z V_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_\theta V_\theta + p)}{\partial \theta} = \frac{\tau_{r\theta} - \rho V_r V_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} - 2\rho\omega V_r \quad (\text{B.3})$$

**Composante radiale**

$$\frac{\partial \rho V_r}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_z V_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r (\rho V_r V_r + p)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_\theta V_r}{\partial \theta} = \frac{\rho V_\theta^2 + p - \tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \rho\omega^2 r + 2\rho\omega V_\theta \quad (\text{B.4})$$

**Equation de conservation de l'énergie**

$$\frac{\partial \rho e^0}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_z H}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho V_r H}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_\theta H}{\partial \theta} = \frac{\partial V_j \tau_{zj}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r V_j \tau_{rj}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_j \tau_{\theta j}}{\partial \theta} - \left( \frac{\partial q_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} \right) + \rho\omega^2 r V_r \quad (\text{B.5})$$

