I. 3.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES

DE

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

CHEZ LE MÊME LIBRAIRE

Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre, 7e édition.
— **de Géométrie,** 7e édition.
— **de Trigonométrie et de Géométrie descriptive,** 7e édition.
— **de Cosmographie,** 6e édition.
— **de Mécanique,** 8e édition.

Éléments de Géométrie, 2e édition.

Traité élémentaire de Géométrie descriptive, 4e édition.

Manuel des candidats à l'École polytechnique.

Traité élémentaire des Séries.

Cours d'analyse de l'Université de Liége.

Mélanges mathématiques.

1188 — ABBEVILLE. — IMP. BRIEZ, C. PAILLART ET RETAUX.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES

DE

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

PAR

EUGÈNE CATALAN

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTÉCHNIQUE,
DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR D'ANALYSE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE
ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE DE BELGIQUE, MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATIQUE DE PARIS
ET DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÉGE CORRESPONDANT
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE TOULOUSE, DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES
DE LILLE, DE L'INSTITUT NATIONAL GENEVOIS ET DE LA SOCIÉTÉ
D'AGRICULTURE DE LA MARNE.

CINQUIÈME ÉDITION, REVUE

PARIS
DUNOD, ÉDITEUR
SUCCESSEUR DE VICTOR DALMONT
Précédemment Carilian-Gœury, et Vor Dalmont
LIBRAIRE DES CORPS DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES
Quai des Augustins 49

1872

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE I.

LIVRE II.

LIVRE III.

LIVRE IV.

LIVRE V.

LIVRE VI.

LIVRE VII.

****

LIVRE VIII.

APPENDICE.

DES POLYÈDRES SEMI-RÉGULIERS.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

1188. — Abbeville — Imp. Briez, C. Paillart et Reteux.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES

DE

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

LIVRE I.

Théorème I.

Les hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.

Soit ABC un triangle quelconque, ayant pour hauteurs AM, BN, CP. Menons, par les sommets, des parallèles aux côtés opposés : nous formons ainsi un triangle A′B′C′ dont les côtés sont doubles de ceux du triangle ABC. FIG. 1.

En effet, les parallélogrammes AC′BC, ABCB′ donnent

$$AC' = BC = AB' ;$$

puis

$$B'C' = 2BC ;$$

etc.

Les droites AM, BN, CP peuvent donc être regardées comme perpendiculaires aux milieux des côtés du triangle A′B′C′; conséquemment elles se coupent en un même point, centre du cercle circonscrit à ce triangle. G., 107. G., 159.

* Cette notation indique un renvoi aux *Éléments de Géométrie*, deuxième édition (Liége 1866).

Théorème II.

Les médianes d'un triangle se coupent en un même point situé au tiers de chacune, à partir du côté correspondant.

FIG. 3. Après avoir mené les médianes BB′, CC′, qui se coupent en un point O, prenons les milieux D, E des droites OB, OC, et menons DE, B′C′. D'après un théorème
G., 133. connu, chacune de ces droites est parallèle au côté BC et égale à la moitié de BC ; donc B′C′DE est un parallé-
G., 125. logramme ; et, par suite,

$$OB' = OD = \frac{1}{2} OB = \frac{1}{3} BB'.$$

De même,

$$OC' = \frac{1}{3} CC'.$$

Deux quelconques des médianes se coupant en un point situé au tiers de chacune, à partir du côté correspondant, les trois médianes se coupent en un même point.

Remarque. Pour des raisons que nous indiquerons plus loin, le point de rencontre des médianes est appelé *centre des moyennes distances* ou *centre de gravité du triangle*.

Théorème III.

Dans tout triangle, la somme des médianes est comprise entre le périmètre du triangle et les trois quarts de ce périmètre.

FIG. 10. 1° Prenons, sur la médiane CC′ prolongée, C′D = C′C, et menons AD, BD. Le quadrilatère ACBD, dans lequel les diagonales se coupent en leur milieu commun C′, est un
G., 128. parallélogramme; donc AD = BC. Actuellement, dans le triangle CAD, on a

$$CD < AC + AD,$$

ou

$$2CC' < AC + BC.$$

De même,

$$2BB' < AB + BC,$$
$$2AA' < AB + AC;$$

donc

$$AA' + BB' + CC' < AB + BC + AC.$$

2° Le triangle AGB donne

$$AB < AG + BG;$$

ou (Th. II),

$$AB < \frac{2}{3}(AA' + BB').$$

De même,

$$BC < \frac{2}{3}(BB' + CC'),$$
$$CA < \frac{2}{3}(CC' + AA');$$

donc

$$AB + BC + CA < \frac{4}{3}(AA' + BB' + CC');$$

ou

$$AA' + BB' + CC' > \frac{3}{4}(AB + BC + CA).$$

Théorème IV.

Dans tout triangle, à un plus grand côté correspond une plus petite médiane.

Soit, dans le triangle ABC, FIG. 3.

$$AC > AB;$$

je dis que l'on aura

$$BB' < CC'.$$

En effet, la première inégalité donne, par un théorème connu,

$$\text{angle } AA'C > \text{angle } AA'B\,;$$

et, conséquemment,

$$OC > OB.$$

Mais (Th. II)

$$OC = \frac{2}{3}\,CC', \qquad OB = \frac{2}{3}\,BB'\,;$$

donc

$$CC' > BB'.$$

COROLLAIRE. *A des médianes égales sont opposés des côtés égaux.*

Théorème V.

Dans tout triangle ABC, une bissectrice intérieure quelconque CD ne surpasse pas la médiane correspondante.

Si les angles A, B étaient égaux, la bissectrice CD coïnciderait avec la médiane et avec la hauteur CP : supposons donc $A > B$, et démontrons que la bissectrice CD est comprise entre les deux autres droites. A cet effet, nous établirons d'abord deux lemmes préliminaires.

1° *La bissectrice de l'angle* C *est située dans l'angle* BCP *formé par le côté* BC *et la hauteur* CP.

Lorsque l'angle A est obtus ou droit, cette proposition est évidente; et, s'il est aigu, elle équivaut à l'inégalité

$$\frac{1}{2}\,C > 1^{d} - A.$$

Or, à cause de

$$A + B + C = 2^{d}, \qquad A > B,$$

on a

$$2A + C > 2^{d},$$

ou

$$A + \frac{1}{2} C > 1^d;$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} C > 1^d - A.$$

2° *Le segment* BD, *adjacent au plus petit des deux angles* A, B, *surpasse l'autre segment* AD.

Prenons, sur le côté CB, $CA' = CA$, et menons la droite DA' : elle est égale à DA. Dans le triangle BA'D, l'angle A', supplément de A, est plus grand que B; donc $BD > DA'$, ou

$$BD > AD.$$

Soit maintenant CC' la médiane partant du sommet C. A cause de $AD < BD$, la projection PC' de la médiane surpasse la projection PD de la bissectrice ; donc FIG. 8. G., 66.

$$CD < CC'.$$

Théorème VI.

Dans tout triangle, la somme des bissectrices est comprise entre le périmètre et le demi-périmètre.

D'après le Théorème V, la somme des bissectrices ne surpasse pas la somme des médianes; donc (Th. III), la première somme est moindre que le périmètre.

En second lieu, si l'on considère le triangle ABC, on a FIG. 24.

$$\begin{aligned} AO + OC' &> AC', \\ BO + OC' &> BC', \\ BO + OA' &> BA', \\ CO + OA' &> CA', \\ CO + OB' &> CB', \\ AO + OB' &> AB'; \end{aligned}$$

d'où

$$2(AA' + BB' + CC') > AB + BC + CA;$$

etc.

Théorème VII.

Dans tout triangle, à un plus grand côté est opposée une plus petite bissectrice.

FIG. 365. Soit le triangle ABC, dans lequel le côté BC est plus grand que AC ; je dis que la bissectrice BE de l'angle B surpasse la bissectrice AD de l'angle A.

O étant le point de rencontre des bissectrices, il faut démontrer la relation

$$BO + OE > AO + OD. \quad (1)$$

A cause de $BO > AO$, cette inégalité serait évidente si l'on avait $OE > OD$: supposons donc que le contraire ait lieu.

FIG. 366. Sur les côtés d'un angle $xO'y$ égal à BOD, prenons

$$O'A' = OA,\ O'B' = OB,\ O'D' = OD,\ O'E' = OE;$$

et menons les droites A'E', B'D'.

Les angles $A'E'y$, $B'D'y$, respectivement égaux à BEC, ADC, ont pour valeurs :

$$A'E'y = A + \frac{1}{2}B, \qquad B'D'y = B + \frac{1}{2}A;$$

donc

$$A'E'y > B'D'y. \quad (2)$$

D'un autre côté, à cause de

$$2^d > A + B,$$

on a

$$2^d - B - \frac{1}{2}A > \frac{1}{2}A;$$

et, à plus forte raison,

$$2^d - B - \frac{1}{2}A > \frac{1}{2}B.$$

Conséquemment,

$$O'B' > O'D'. \qquad (3)$$

Menons A'F parallèle à B'D' : l'inégalité (2) prouve que le point F est situé entre les points O' et E' ; mais, à cause de l'inégalité (3), on a aussi, comme il est aisé de le reconnaître,

$$A'B' > FD' ;$$

donc, à plus forte raison,

$$A'B' > D'E',$$

ou

$$O'B - O'A' > O'D' - O'E' ;$$

ce qui équivaut à l'inégalité (1).

Corollaire. *A des bissectrices égales sont opposés des côtés égaux.*

Théorème VIII.

Parmi tous les triangles formés avec un angle donné A, compris entre deux côtés dont la somme est constante, le triangle isoscèle ABC a le plus petit périmètre.

Si l'on prend arbitrairement $CC' = BB'$, et que l'on mène B'C', on aura Fig. 2

$$AB' + AC' = AB + AC.$$

Par conséquent, il suffit de vérifier l'inégalité

$$B'C' > BC.$$

Soit la droite C'D égale et parallèle à B'B : la figure B'C'DB est un parallélogramme ; donc $BD = B'C'$. Mais, à cause des parallèles AB, C'D, les angles BAC, AC'D sont supplémentaires. Par suite, à cause des triangles isoscèles

BAC, DC′C, les angles ACB, DCC′ sont complémentaires. Donc CD est perpendiculaire à BC ; donc BD $>$ BC, ou

$$B'C' > BC.$$

Théorème IX.

Dans tout quadrilatère, les milieux des côtés sont les sommets d'un parallélogramme.

FIG. 5. Menons les diagonales AC, BD. Dans le triangle ABD, la droite MN est parallèle à BD et égale à la moitié de BD. De là il résulte que les droites MN, PQ sont égales et parallèles. De même, MP, NQ sont égales et parallèles ; donc MNPQ est un parallélogramme.

Théorème X.

Dans tout quadrilatère, le point de rencontre des droites qui joignent les milieux des côtés opposés est situé au milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales.

FIG. 6. Soient, dans le quadrilatère ABCD, PR et QS les droites qui joignent les milieux des côtés opposés, et MN la droite qui joint les milieux des diagonales. Menons PQ, QR, RS, SP, PM, MR, RN et NR. La figure PQRS est un parallélogramme (Th. IX) ; donc PR, QS se coupent en deux parties égales au point O. PMRN est aussi un parallélogramme ; car PM, NR sont parallèles à AB, et PN, MR sont parallèles à DC ; ainsi PR, MN se coupent en deux parties égales au même point O. Le point O, milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales, se confond donc avec le point de rencontre des droites qui joignent les milieux des côtés opposés du quadrilatère.

Théorème XI.

Deux polygones convexes, d'un nombre impair de côtés, sont égaux lorsque leurs côtés ont mêmes points milieux.

L'énoncé revient à celui-ci : *Un polygone convexe, d'un nombre impair de côtés, est déterminé par les milieux de ses côtés.* FIG. 20.

1° Cette dernière proposition est vraie dans le cas où le nombre des côtés se réduit à *trois;* car L, M, V étant les points milieux donnés, le triangle ABC a ses côtés respectivement parallèles aux droites MV, VL, LM.

2° Soit, pour fixer les idées, un heptagone convexe AB... FG, dont les côtés aient, pour milieux respectifs, les points L, M,... R, S. En considérant trois côtés consécutifs quelconques GF, FE, ED, puis les côtés adjacents à GF et ED, nous décomposerons l'heptagone en deux quadrilatères GFED, AGDC, et en un triangle ABC. Le milieu U de GD est déterminé par les points P, Q, R, attendu que UPQR est un parallélogramme (Th. IX). De même, le milieu V de AC est déterminé par les points N, U, S. Le triangle ABC est donc déterminé (1°); etc.

Problème I.

Par un point O, situé dans l'angle donné A, mener une droite BC qui soit divisée en deux parties égales par ce point.

Soit D le milieu du segment inconnu AB : la droite OD sera parallèle à AC. FIG. 21. G., 133.

Conséquemment, pour résoudre le problème, on mène OD parallèle au côté AC de l'angle donné; on prend DB = AD, et l'on joint le point B au point donné O.

Problème II.

Trouver, sur l'un des côtés d'un angle ABC, un point O également distant du second côté et d'un point D, situé sur le premier côté.

FIG. 18. Supposons le problème résolu : abaissons OE, DF perpendiculaires sur AB, et tirons DE. Dans le triangle isoscèle OED, les angles OED, ODE sont égaux. Mais, à cause des parallèles OE, DF, les angles OED, EDF sont égaux,
G., 91. comme alternes internes; donc OED $=$ EDF; donc DE est la bissectrice de l'angle BDF.

Ainsi, pour résoudre le problème, il faut mener DF perpendiculaire sur AB, tracer la bissectrice DE de l'angle BDF, et mener EO parallèle à DF.

Problème III.

Construire un triangle, connaissant deux côtés et une médiane.

FIG. 10. Soit ABC le triangle cherché, et soit CC′ la médiane donnée. Parmi les deux côtés connus, il y en a nécessairement un, au moins, qui aboutit au sommet C : supposons que ce soit le côté AC. Si le second côté donné est AB, le problème se réduit à la construction du triangle ACC′, dans lequel on connaît les trois côtés, attendu que AC′ $= \frac{1}{2}$ AB.

Si le second côté donné est CB, prenons, sur le prolongement de CC′, C′D $=$ C′C, et menons DB. Nous connaîtrons, dans le triangle CBD, le côté CB, puis BD $=$ AC, et enfin CD $=$ 2CC′. La question est donc résolue.

Problème IV.

Construire un triangle, connaissant un côté et deux médianes.

Soit O le point d'intersection des médianes données AA', BB'. On a (Th. II) FIG. 24.

$$OA' = \frac{1}{3} AA', \quad OB' = \frac{1}{3} BB'.$$

Par suite, la construction du triangle ABC se réduit, quel que soit le côté donné, à la construction d'un des triangles AOB, AOB', BOA', dans lequel les trois côtés sont connus.

Problème V.

Construire un triangle, connaissant les trois médianes.

Soit O le point d'intersection des médianes. A cause de FIG. 24.

$$BO = \frac{2}{3} BB', \quad AO = \frac{2}{3} AA', \quad OC' = \frac{1}{3} CC',$$

on connaît, dans le triangle AOB, les deux côtés BO, AO et la médiane OC'. La question est donc ramenée au Problème III.

Problème VI.

Construire un triangle ABC, connaissant le périmètre et deux angles.

Prolongeons, de part et d'autre, le côté BC. Prenons FIG. 25.
BD = BA, CE = CA, et menons AD, AE. Dans le triangle isoscèle ABD, l'angle D, égal à BAD, est la moitié de l'angle donné B. De même, $E = \frac{1}{2} C$. D'ailleurs, DE égale le périmètre donné.

On peut donc construire le triangle DAE et déterminer ensuite les points B, C, au moyen des perpendiculaires FB, GC.

Problème VII.

Construire un parallélogramme, connaissant les diagonales et un côté.

FIG. 16. Soit ABCD le parallélogramme demandé, dans lequel les diagonales AC, BD et le côté AB sont donnés.

Dans le triangle AOB on connaît

$$AO = \frac{1}{2} AC, \quad BO = \frac{1}{2} BD$$

et AB, qui est donné. Ce triangle étant construit, le problème peut être regardé comme résolu.

Problème VIII.

Construire un quadrilatère, connaissant les quatre côtés et l'une des deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

FIG. 29. Soit ABCD le quadrilatère cherché, dans lequel, indépendamment des côtés, on connaît la droite EG, qui passe par les milieux des côtés AB, CD. Soient H, F les milieux des diagonales du quadrilatère. Si nous menons HE, GF, ces deux droites seront égales et parallèles, car chacune d'elles est parallèle à AD, et égale à la moitié de cette droite. De même, les droites GH, EF sont parallèles, et chacune d'elles est égale à la moitié de BC. La figure EFGH est donc un parallélogramme, dans lequel on connaît les côtés et l'une des diagonales. On peut construire ce parallélogramme, et déterminer la seconde diagonale FH.

Actuellement, soient M, N les milieux des côtés AD, BC du quadrilatère. La figure MHNF est aussi un parallélogramme, dont la diagonale FH et les côtés sont connus. Les deux parallélogrammes étant construits, le quadrilatère ABCD sera déterminé (Th. XI).

Problème IX.

Sur les prolongements des côtés AB, AC d'un triangle ABC, on prend les distances BD, CE, de manière que leur somme soit égale au troisième côté du triangle, et l'on mène DE. Dans quel cas cette droite est-elle un minimum ?

D'après la construction, FIG. 4.

$$AD + AE = AB + AC + BC.$$

Dans tous les triangles tels que DAE, la somme des côtés AD, AE étant constante, le minimum du troisième côté DE répond au cas où le triangle est isoscèle (Th. VIII) Il faut donc, pour résoudre le problème, prendre

$$AD = AE = \frac{1}{2}(AB + AC + BC).$$

Remarques. I. Les sommets D, E du triangle DAE sont les points de contact des droites AD, AE avec le cercle O, *ex-inscrit* au triangle donné ABC. G., 161.

II. Si l'on représente par a, b, c, $2p$ les côtés et le périmètre du triangle ABC, on trouve

$$DE = 2p\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

Problème X.

Trouver, sur une droite donnée AB, un point M tel, que la somme de ses distances à deux points donnés C, D, situés d'un même côté de AB, soit un minimum.

Abaissons CEC′ perpendiculaire sur AB, et prenons EC′ = EC : le point C′ sera *symétrique* du point C, par rapport à AB; donc FIG. 11.

$$CM' = CM, \quad DM + MD = C'M + MD.$$

Or cette dernière somme est la plus petite possible, lorsque les trois points D, M, C′ sont en ligne droite.

Il suffit donc, pour résoudre le problème proposé, de joindre le point donné D au point C′, symétrique de l'autre point donné C, par une droite DMC′ : le point M, où cette ligne rencontre la droite donnée AB, satisfait à la question.

Remarques. I. AB et DMC′ étant des droites, les angles DMB, AMC′ sont égaux, comme opposés au sommet ; d'ailleurs AMC′ = AMC, attendu que AB est perpendiculaire au milieu de CC′ ; donc *les angles* DMB, AMC *sont égaux entre eux.*

II. Cette propriété peut être énoncée autrement : supposons, conformément au *principe* de *la moindre action*, que CMD soit le chemin suivi par un *corps élastique* qui, parti du point C, soit arrivé en D, après s'être *réfléchi* sur la droite AB. Menons MN perpendiculaire ou *normale* à AB : les angles NMC, NMB sont appelés, respectivement, *angle d'incidence* et *angle de réflexion.* D'ailleurs ces angles, compléments d'angles égaux, sont égaux. Ainsi, la réflexion des corps élastiques, de la lumière, par exemple, se fait de manière que *l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.* Cette conclusion est confirmée par l'expérience.

III. Si la droite AB représente la surface d'un miroir plan, le point C′ prend le nom d'*image* du point C ; c'est le lieu que paraît occuper ce point, pour un œil placé en D (*)

Problème XI.

A un angle donné, xAy, inscrire un triangle MNP, de périmètre minimum, et dont l'un des sommets soit un point donné P, situé entre les côtés de l'angle.

FIG. 35. Soient P′, P″ les *images* de P, relativement aux deux côtés de l'angle. Si la droite P′P″ coupe Ax en M et Ay en N, PMN sera le triangle demandé.

(*) Cette explication, pour être complétée, exigerait des notions empruntées à la Géométrie de l'espace et à l'Optique.

En effet, PM'N' étant un autre triangle quelconque, inscrit à l'angle donné, et dont l'un des sommets soit P, menons P'M' et P''N'. Nous aurons

$$P'P'' < P'M' + M'N' + N'P'',$$

ou

$$P'M + MN + NP'' < P'M' + M'N' + N'P''.$$

Mais

$$P'M = PM,\ NP'' = NP,\ P'M' = M'P,\ N'P'' = N'P;$$

donc, etc.

Remarque. La solution devient illusoire, lorsque la droite P'P'', au lieu de couper Ax et Ay, rencontre les prolongements de ces droites. S'il en est ainsi, la somme des angles PAP', PAP'' surpasse évidemment 2 angles droits. Mais Fig. 42.

$$PAP' = 2PAx,\ PAP'' = 2PAy;$$

donc *le problème est impossible lorsque l'angle donné est droit ou obtus.* Dans ce cas, *le triangle* PMN *est remplacé par le système de la droite* PA *et de la droite égale et contraire* AP.

On a en effet, en considérant le triangle quelconque PM'N',

$$P'A + AP'' < P'M' + M'N' + N'P'',$$

ou

$$2AP < PM' + M'N' + N'P.$$

Problème XII.

A un triangle ABC, inscrire un triangle MNP de périmètre minimum.

Supposons d'abord que le triangle soit acutangle. Si le point P est pris arbitrairement sur le côté AB, le triangle PMN sera déterminé par la construction employée dans Fig. 9.

le problème précédent. Remarquons maintenant que les points Q, R, images du point P, sont situés sur les droites BA′, AB′, symétriques de AB, par rapport à BC, AC. D'ailleurs

$$AR + BQ = AP + BP = AB.$$

Ainsi, dans tous les triangles tels que C′QR, la somme des deux côtés C′Q, C′R est constante. Par conséquent, pour résoudre le problème proposé, on doit (Prob. IX) prendre

$$C'Q = C'R = \frac{1}{2}(AB + BC' + AC'),$$

mener la droite RNMQ, et prendre enfin $AP = AR$.

Si le triangle ABC est rectangle ou obtusangle, il résulte, de la remarque faite à la fin du Problème XI, que *le triangle* MNP *est remplacé par le système de la hauteur correspondant au plus grand angle, et d'une droite égale et contraire à cette hauteur.*

Corollaire. *Si un triangle est inscrit à un triangle rectangle ou obtusangle, le périmètre du premier surpasse le double de la plus petite hauteur du second.*

Problème XIII.

Quelle route doit suivre une bille M pour rencontrer une autre bille N, après avoir touché les quatre bandes du billard ?

Fig. 12. Soit MPQRSN la route inconnue que doit suivre la bille M sur le billard rectangulaire ABCD. Construisons le point M′ symétrique de M par rapport à AB, et le point M″ symétrique de M′ par rapport à BC. Soient N′, N″ les points que l'on déduit de N par une construction analogue. D'après le Problème X, les lignes M′PQ, M″QR, N′SR, N″RQ sont droites; donc M″QRN″ est une ligne droite :

elle détermine les points R, Q, puis les points P, S.

Remarques. I. Le *plus court chemin* MPQRSN est égal, en longueur, à la droite M″N″.

II. Les angles aigus P, R, compléments d'angles égaux, sont égaux ; donc les droites PQ, RS sont parallèles. De même MP, NS sont parallèles à RQ.

Problème XIV.

Quelle route doit suivre une bille pour revenir au point de départ, après avoir touché les quatre bandes du billard ?

Pour résoudre cette question, il suffit de supposer, dans le Problème XIII, que les points M, N se confondent; alors, d'après la dernière remarque, la figure MQRSM devient un parallélogramme. FIG. 13.

De plus, les côtés de ce parallélogramme sont parallèles aux diagonales AC, BD du rectangle.

En effet, si nous prolongeons DA jusqu'à sa rencontre en T avec PM′, nous aurons $AT = AS = CQ$; donc le quadrilatère ATQC, dans lequel deux côtés sont égaux et parallèles, est un parallélogramme; donc PQ est parallèle à AC.

Remarque. A cause de $TP = PS$, on a

$$PQ + PS = QT = AC :$$

le plus court chemin MPQRS *est égal à la somme des diagonales* AC, BD. Cette longueur est donc indépendante de la position du point M.

Problème XIV.

A un quadrilatère convexe ABCD, inscrire un quadrilatère MNPQ dont le périmètre soit minimum.

Si l'on fixe les sommets Q, N, on devra, pour satisfaire à la condition proposée, rendre les angles AMQ, BMN FIG. 15.

égaux entre eux (Prob. X). Pour la même raison, les angles BNM, CNP doivent être égaux entre eux ; et ainsi de suite. Conséquemment, *la ligne* MNPQ *est celle que décrirait une bille qui repasserait indéfiniment par sa position initiale, après avoir touché toutes les bandes du billard quadrangulaire* ABCD.

Cela posé, en prenant pour unité l'angle droit, nous aurons, dans les triangles AMQ, BNM, CPN, DQP :

$$A + M + Q = 2, \qquad (1)$$
$$B + N + M = 2, \qquad (2)$$
$$C + P + N = 2, \qquad (3)$$
$$D + Q + P = 2. \qquad (4)$$

On conclut, de ces égalités :

$$M + N + P + Q = 4 - (A + C),$$
$$M + N + P + Q = 4 - (B + D).$$

Par conséquent, *le problème est indéterminé si, dans le quadrilatère donné, les angles opposés sont supplémentaires* (*) ; *il est impossible dans le cas contraire* (**).

Remarques. I. Dans le cas où le problème est possible, on peut prendre arbitrairement le sommet M, et la construction indiquée sur la figure 185 donne le polygone cherché MNPQ.

II. La même construction montre clairement à quoi tient l'indétermination du problème. En effet, soient O le point où les deux droites symétriques BM′, B′M‴ rencontrent le prolongement du côté CD, et O′ le point de concours des

(*) C'est-à-dire si le quadrilatère est *inscriptible*.

(**) En général, si l'on veut *inscrire, à un polygone donné, un polygone de périmètre minimum*, le problème est *impossible* ou *indéterminé*, quand le polygone donné a un nombre *pair* de côtés.

droites AM″, CD. Dans les triangles BCO, ADO′,

$$\textit{angle}\ \mathrm{O} = \textit{angle}\ \mathrm{DCB} - \textit{angle}\ \mathrm{CBM'},$$
$$\textit{angle}\ \mathrm{O'} = \textit{angle}\ \mathrm{ADC} - \textit{angle}\ \mathrm{M''AD};$$

ou

$$\mathrm{O} = \mathrm{C} - \mathrm{B}, \qquad \mathrm{O'} = \mathrm{D} - \mathrm{A}.$$

Mais

$$\mathrm{A} + \mathrm{C} = \mathrm{B} + \mathrm{D};$$

donc

$$\mathrm{O} = \mathrm{O'};$$

donc les droites M‴B′, AM″ sont parallèles. On conclut aisément de là que, si le sommet M parcourt AB, la droite M″M‴ se déplace, en conservant même grandeur et même direction, etc.

III. Lorsque le quadrilatère ABCD ne satisfait pas à la condition

$$\mathrm{A} + \mathrm{C} = \mathrm{B} + \mathrm{D},$$

le quadrilatère MNPQ est remplacé, soit par un triangle, soit par deux droites confondues en une seule. Par exemple, dans le cas très simple où ABCD est un trapèze ayant deux angles droits, on reconnaît sans peine que MNPQ se réduit à *deux fois* la plus petite des deux diagonales du trapèze.

Problème XVI.

Trouver, sur une droite donnée AB, un point M tel, que la différence de ses distances à deux points donnés C, D, situés de part et d'autre de AB, soit un maximum.

Prenant, comme dans le Problème X, le point C′ symétrique du point C, puis menant C′DM et MC, on a FIG. 14.

$$\mathrm{CM} - \mathrm{MD} = \mathrm{C'M} - \mathrm{MD}.$$

Or, cette dernière différence est la plus grande possible lorsque les points C′, D, M sont en ligne droite.

En effet, si nous prenons sur AB un point quelconque

M', nous aurons, dans le triangle C'M'D :

$$C'M' - M'D < C'D.$$

Remarque. Lorsque les points C, D sont également distants de AB, le point M n'existe plus; et, lorsque le point M' s'éloigne indéfiniment du milieu de EF, la différence CM' — M'D, d'abord nulle, croît sans cesse, en restant toujours moindre que EF ou C'D.

Problème XVII.

Trouver, sur le côté AB d'un triangle, un point tel, que la somme de ses distances aux deux autres côtés soit un minimum.

FIG. 31. Prenons, sur AB, deux points quelconques M, M'; puis abaissons MP, M'P' perpendiculaires sur AC, et MQ, M'Q' perpendiculaires sur BC. Afin de savoir laquelle est la plus grande des deux sommes MP + MQ, M'P' + M'Q', posons

$$MP + MQ \gtrless M'P' + M'Q'.$$

Menons MR parallèle à AC, M'S parallèle à BC : l'inégalité devient

$$MP + MS + SQ \gtrless M'R + RP' + M'Q';$$

d'où, à cause de $MP = RP'$, $SQ = M'Q'$:

$$MS \lessgtr M'R.$$

Or, les triangles rectangles MRM', MSM' ont l'hypoténuse commune. Si donc, comme cela a lieu dans la figure, l'angle A est supposé plus grand que l'angle B, nous aurons $MM'S < M'MS$. On conclut aisément de là $MS < M'R$.

Par suite,

$$MP + MQ < M'P' + P'Q'.$$

Ainsi, la somme des distances du point M aux deux côtés AC, BC diminue à mesure que ce point se rapproche du sommet A ; elle est donc la plus petite possible quand le point M se confond avec ce sommet ; et le minimum cherché est égal à la hauteur AD.

Remarque. Si les angles A, B sont égaux, il n'y a plus de minimum, car

$$MP + MQ = AD,$$

quelle que soit la position du point M.

Problème XVIII.

Trouver, dans le plan d'un triangle, un point tel, que la somme de ses distances aux côtés du triangle soit un minimum.

Par un point quelconque M, intérieur ou extérieur au triangle, menons DE parallèle au côté AB ; soit F le point où cette droite rencontre le côté AC, adjacent au plus grand des deux angles A, B. D'après le problème précédent, nous aurons FIG. 32

$$FH < MQ + MR,$$

ou

$$FH + FG < MP + MQ + MR.$$

Il ne s'agit donc plus que de comparer le point F avec les autres points du côté AC. Or, d'après le même problème, on a

$$CI < FH + FG.$$

Ainsi, *le point cherché est le sommet du plus grand des trois angles du triangle.* En même temps, *le minimum de* MP + MQ + MR *est la plus petite hauteur du triangle.*

Problème XIX.

Trouver le lieu des points tels, que la somme des distances de chacun, à deux droites données, soit égale à une longueur donnée.

Il y a plusieurs cas à distinguer :

FIG. 26. 1° Les droites AB, CD sont parallèles, et leur distance est moindre que la longueur donnée.

Le lieu géométrique se compose évidemment du système de deux droites MN, PQ, parallèles aux droites données. Pour trouver ces parallèles, on mène une perpendiculaire commune et l'on prend

$$FG = HE = \frac{1}{2}(L - EF),$$

L étant la longueur donnée.

2° Les droites données sont parallèles, et leur distance est égale à la longueur donnée L.

Dans ce cas, *tout point de la bande* comprise entre les parallèles AB, CD satisfait à la question.

3° Les droites données sont encore parallèles, et leur distance est plus grande que L.

Le problème est évidemment impossible.

FIG. 27. 4° Les deux droites sont concourantes.

Menons EF parallèle à la droite donnée AB, de manière que la distance entre ces droites soit égale à L. Prenons, à partir du point de concours O, $OG = OE$.

D'après la remarque faite ci-dessus (Pr. XVII), tous les points de la base AE du triangle isoscèle AOE satisfont
FIG. 28. à la question. Mais cette base ne constitue pas tout le lieu géométrique cherché : en effet, si nous prenons $OH = OI = OE$, tous les points situés sur le péri-

mètre du rectangle EGHI sont tels, que la somme des distances de chacun aux droites données, égale L.

Remarque. Si, dans le cas des droites concourantes, on demandait que la *différence* des distances du point cherché aux deux droites fût égale à L, on trouverait, pour le lieu géométrique, les *prolongements* des côtés du rectangle. C'est ce qu'il est aisé de reconnaître.

Le cas des droites parallèles donnerait lieu à une discussion semblable à celle qui précède.

LIVRE II.

Théorème I.

Les hauteurs d'un triangle sont les bissectrices des angles du triangle ayant pour sommets les pieds de ces droites.

Fig. 34. Soient AM, BN, CP les hauteurs du triangle quelconque ABC, lesquelles se coupent en un point O. A cause des angles droits en M, N, P, les circonférences décrites sur G., 189. les droites OA, OB, OC, prises comme diamètres, passent par les points M, N, P.

Cela posé, les angles OMP, OBP sont égaux, parce qu'ils ont pour mesure la moitié de l'arc OP ; de même, les angles OMN, OCN sont égaux, comme ayant pour mesure la moitié de l'arc ON. Mais les angles OBP, OCN, compléments de l'angle A, sont égaux ; donc OMP = OMN; donc la hauteur AM divise l'angle PMN en deux parties égales. On prouverait, de la même manière, que les hauteurs BN, CP sont les bissectrices des angles MNP, NPM.

Remarques. I. A cause de

$$\mathrm{OMP} = \mathrm{OMN} = 1^{d} - \mathrm{A},$$

on a

$$\mathrm{PMN} = 2^{d} - 2\mathrm{A}.$$

Ainsi, *les angles du triangle* MNP *sont les suppléments respectifs des doubles des angles du triangle* ABC.

II. Le point O, où se coupent les hauteurs du triangle ABC, est le centre du cercle inscrit au triangle formé par les pieds de ces droites.

III. Les sommets A, B, C du premier triangle sont les centres des cercles ex-inscrits au second.

IV. Le triangle MNP est, parmi tous les triangles inscrits à ABC, celui dont le périmètre est minimum. (I, Prob. XII) On a ainsi une nouvelle solution de ce problème.

Théorème II.

Les circonférences qui passent par deux des sommets d'un triangle ABC et par le point de concours H des hauteurs sont égales à la circonférence circonscrite au triangle.

Les angles BAC, BHC sont supplémentaires, comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires ; donc l'arc BDC est *capable* d'un angle égal à BAC ; donc il est égal à l'arc BAC ; etc. FIG. 367. G., 188.

Remarques. I. Chacune des circonférences BHCD, CHAE, AHBF est symétrique de la circonférence ABC, relativement à l'un des côtés du triangle.

II. Les parallèles aux côtés AB, AC, menées par les sommets C, B, se coupent sur la circonférence BHC, parce que l'angle de ces deux droites est le supplément de BAC. De là résulte que le triangle DEF, dont les côtés sont parallèles à ceux du triangle donné, a ses sommets sur les circonférences BCD, ACE, ABF.

III. L'angle HCD étant droit, HD est un diamètre de la circonférence circonscrite au triangle DEF (Liv. I, Th. I) ; donc cette circonférence DEF, qui a pour centre le point H, est circonscrite au système des circonférences BCD, CAE, ABF.

IV. La diagonale AD du parallélogramme ABDC, la droite OO′ qui joint les centres des circonférences symétriques ABC, BDC, et le côté BC, se coupent en leur milieu commun G : donc $GO'=GO=\frac{1}{2}AH$; c'est-à-dire que, *dans* *tout triangle, la distance d'un sommet au point de concours des hauteurs est double de la distance du côté opposé, au centre du cercle circonscrit.*

V. Si le triangle ABC est rectangle en A, le point H coïncide avec A, les circonférences BAC, BCD se confondent, etc.

Théorème III.

Si, sur les côtés d'un triangle quelconque ABC, on construit, extérieurement, des triangles équilatéraux ABC′, BCA′, CAB′, et si l'on mène les droites AA′, BB′, CC′ : 1° ces trois lignes sont égales ; 2° elles se coupent en un même point O ; 3° les côtés du triangle donné ABC sont vus, de ce point, sous des angles égaux.

FIG. 46. 1° Dans les triangles BAB′, CAC′, $AB = AC'$, $AB' = AC$. De plus, les angles BAB′, CAC′ sont égaux, comme se composant d'une partie commune BAC et de deux angles égaux, CAB′, BAC′. Donc les deux triangles BAB′, CAC′ sont égaux entre eux ; et

$$BB' = CC' = AA'.$$

2° Circonscrivons des circonférences aux triangles ABC′, BCA′, CAB′. Il est facile de voir que ces trois lignes se coupent en un même point O. Joignons ce point aux points A, B, C, A′, B′, C′. Il résulte, de cette construction, six angles AOB′, B′OC..., égaux chacun à $\frac{2^d}{3}$. Par suite,

$$AOB' + B'OB + BOA' = 2^d ;$$

donc AOA′ est une ligne droite.

3° Chacun des angles AOB, BOC, COA est égal à $\frac{4^d}{3}$.

C'est ce qu'on exprime en disant que les *côtés* AB, BC, CA *sont vus, du point* O, *sous des angles égaux.*

Théorème IV.

Les bissectrices des angles intérieurs d'un qnadrilatère forment un quadrilatère inscriptible.

Soit MNPQ le quadrilatère formé par les bissectrices des angles du quadrilatère quelconque ABCD. Il suffit, pour démontrer le théorème, de prouver que les angles M, P sont supplémentaires. Or, dans le triangle ABM, on a FIG. 38. G., 194.

$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + M = 2^d\,;$$

dans le triangle CPD,

$$\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D + P = 2^d\,;$$

ainsi

$$\frac{1}{2}(A+B+C+D)+M+P=4^d.$$

Mais

$$\frac{1}{2}(A+B+C+D) = 2^d\,;$$

donc

$$M + P = 2^d.$$

Remarques. I. Si ABCD est un parallélogramme, le quadrilatère MNPQ devient un rectangle, dans lequel les diagonales sont parallèles aux côtés du parallélogramme.

II. Les bissectrices des angles extérieurs d'un quadrilatère jouissent des mêmes propriétés.

Théorème V.

Les bissectrices EP, FN, des angles formés par les côtés opposés d'un quadrilatère inscriptible ABCD, sont perpendiculaires entre elles.

EP étant la bissectrice de l'angle AED, on a FIG. 39.

$$AP - BM = DP - CM.$$

De même,

$$AN - DQ = BN - CQ.$$

Ajoutant ces deux égalités, on obtient

$$PN - BM - DQ = DP + BN - MQ,$$

ou

$$PN + QM = PQ + MN.$$

Par suite, les angles PON, MON sont égaux, comme ayant même mesure; donc les droites EP, FN sont perpendiculaires l'une à l'autre.

Théorème VI.

Les circonférences qui ont pour cordes les côtés d'un quadrilatère inscriptible ABCD donnent lieu, par leurs secondes intersections, à un quadrilatère inscriptible A'B'C'D'.

FIG. 40. Les trois angles en C' donnent

$$D'C'B' + B'C'C + D'C'C = 4^d.$$

Mais

$$B'C'C + B'BC = 2^d,$$
$$D'C'C + D'DC = 2^d;$$

donc

$$D'C'B' = B'BC + D'DC.$$

On prouverait de même que

$$D'A'B' = B'BA + D'DA.$$

Ajoutant ces deux égalités, on obtient

$$D'C'B' + D'A'B' = CBA + CDA = 2^d;$$

donc le quadrilatère A'B'C'D' est inscriptible.

Théorème VII.

Les points de concours O, O′, O″, O‴ des hauteurs des triangles déterminés par les sommets d'un quadrilatère inscriptible ABCD, sont les sommets d'un quadrilatère égal au premier.

Soient O″, O′ les points de concours relatifs aux triangles ABD, ACD. D'après le Théorème II (*Rem.* IV), les droites BO″, C′O sont égales et parallèles ; donc O′O″ est égale et parallèle à BC. FIG. 360.

On démontrerait, de la même manière, que les autres côtés du quadrilatère OO‴O′O″ sont, respectivement, égaux et parallèles à ceux du quadrilatère donné. Ces deux figures sont donc égales.

Remarques. I. Les deux quadrilatères et les circonférences qui les contiennent sont, deux à deux, symétriques par rapport au point M, centre du parallélogramme BCO′O″.

II. La démonstration précédente repose, essentiellement, sur la Remarque I (Th. II). Cette remarque peut être énoncée ainsi : *Lorsque des triangles ont même base et même angle au sommet, le lieu des points de concours des hauteurs de chacun d'eux est l'arc symétrique, par rapport à la base, de l'arc qui contient le sommet variable.* On en conclut alors la propriété suivante :

Théorème VIII.

Un polygone inscrit, de n côtés, étant décomposé en triangles au moyen de diagonales, les points de concours des hauteurs de ces triangles sont situés, $n-2$ à $n-2$, sur $\frac{n(n-1)}{2}$ circonférences, symétriques de la circonférence donnée par rapport aux côtés ou aux diagonales du polygone (*).

(*) Le nombre total des points de rencontre est $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$.

IX.

Les pieds M, N, P des perpendiculaires abaissées, d'un point O d'une circonférence, sur les côtés d'un triangle inscrit ABC, sont situés sur une même droite (*).

FIG. 41. Menons MN et NP : le théorème sera démontré si nous prouvons que les angles BNM, CNP sont égaux.

Sur OB, comme diamètre, décrivons une circonférence : elle passe par les points M, N, parce que les angles BMO, BNO sont droits. Décrivons, de même, une circonférence sur OC comme diamètre : elle passera par les points N, P. Cela posé, l'angle MBO, supplément de l'angle ACO, est égal à l'angle OCP, lequel est aussi le supplément de ACO ; donc BOM = COP. Mais ces derniers angles sont respectivement égaux, l'un à BNM, l'autre à CNP ; donc BNM est égal à CNP.

Théorème X.

D'un point M, appartenant à une circonférence O, l'on mène trois cordes MA, MB, MC ; sur ces droites, prises comme diamètres, on décrit trois circonférences : les points P, Q, R, où ces lignes se coupent deux à deux, sont situés sur une même droite.

FIG. 368. Menons les cordes AR, BR, BP, CP, CQ, AQ, MR, MP, MQ. Les angles MRA, MRB, inscrits à des demi-cercles, sont droits ; donc ARB est une ligne droite. Pour la même raison, BCP et CQA sont des lignes droites. De là résulte que ABC est un triangle inscrit à la circonférence O. Donc, d'après le Théorème de Simson, les points P, Q, R sont en ligne droite.

(*) Théorème de Simson.

Théorème XI.

Si, par le point de contact O de deux circonférences, on mène deux cordes communes AB, CD, les droites AD, BC, qui joignent les extrémités de ces cordes, sont parallèles.

FIG. 36.

Si nous menons la tangente commune EF, les angles OAB, BOF seront égaux, comme ayant pour mesure $\frac{1}{2}$ OB; G., 186. de même, ODC = EOC. Mais les angles BOF, EOC sont égaux comme opposés par le sommet ; donc OAB = ODC ; donc les droites AB, CD sont parallèles, comme faisant avec AD des angles alternes internes égaux.

Théorème XII.

Si, par le point d'intersection A de deux circonférences O, O′, on mène deux cordes communes CD, EF, les droites CE, DF, qui joignent les extrémités de ces cordes, font entre elles un angle constant.

Menons, par le point A, les droites GAH, G′A′H′, FIG. 37 respectivement tangentes aux deux circonférences. Nous aurons

$$ADF = H'AE, \quad ACE = HAE;$$

d'où

$$ACE - ADF = HAE - H'AE;$$

ou encore

$$ACE - ADF = HAH'.$$

Ainsi, la différence des angles formés par les droites EC, DF avec la corde commune CD, est constante et égale à l'angle des deux tangentes. De là résulte que si nous prolongeons EC, DF jusqu'à leur rencontre en M, l'angle CMF sera égal à HAH′.

Remarque. Si la corde CD reste fixe, et que la corde EF tourne autour du point A, le point M varie de position,

mais de telle sorte que l'angle M est constant. Donc ce point M décrit un arc capable de l'angle HAH′, passant
G., 192. par les points C, D.

Théorème XIII.

Si, à un cercle I, inscrit à un angle O, on mène des tangentes *intérieures* ou *extérieures :* 1° les tangentes intérieures AB déterminent des triangles ayant même périmètre ; 2° les tangentes extérieures CD déterminent des triangles dans lesquels l'excès du demi-périmètre sur le côté CD est constant ; 3° en joignant le centre aux extrémités des tangentes extérieures ou intérieures, on forme des angles constants pour chaque espèce de tangente ; 4° les angles au centre, pour la tangente extérieure et pour la tangente intérieure, sont supplémentaires.

FIG. 44. 1° Dans le triangle OAB,

$$AP = AN, \quad BP = BM ;$$

G., 195. donc

$$OA + OB + AB = ON + OM = 2OM.$$

2° Dans le triangle OCD,

$$CQ = CN, \quad DQ = DM ;$$

donc

$$OC + OD - CD = ON + OM = 2OM ;$$

ou

$$\frac{OC + OD + CD}{2} - CD = OM.$$

3° L'angle AIB est constant, car il est égal à la moitié de l'angle NIM, supplément de l'angle donné O.

De même, l'angle CID, égal à la demi-somme des angles NIQ, MIQ, est constant.

4° La somme des angles NIM, NIQ, MIQ est égale à 4 angles droits ; donc les angles AIB, CID sont supplémentaires.

Remarque. La première partie du théorème a déjà été indiquée (I, Prob. IX).

Théorème XIV.

1° Les segments déterminés, sur les côtés d'un triangle, par les points de contact du cercle inscrit et d'un des cercles ex-inscrits sont égaux, chacun, au demi-périmètre moins un côté; 2° la somme de ces segments est égale au demi-périmètre.

Considérons, sur le côté AB, les segments AD, DB, BH, déterminés par le point de contact D du cercle inscrit O et par le point de contact H du cercle ex-inscrit O′. Nous aurons, en représentant par a, b, c les trois côtés du triangle, et par $2p$ le périmètre : FIG. 45.

1° $2p = AB + BG + AC + CG = AB + BH + AC + CI = AH + AI = 2AH$;

donc

$$p = AH.$$

2° $$2p = 2AD + 2BF + 2CF = 2AD + 2BC;$$

ou

$$AD = p - a.$$

3° $$2p = 2BD + 2AE + 2CE = 2BD + 2AC;$$

puis

$$BD = p - b.$$

4° $$BH = p - c.$$

Remarques. I. A cause de $p = AH = AD + BD + CF$, on conclut

$$BH = AF,$$

ou

$$BG = CF.$$

Ainsi, *sur chaque côté d'un triangle quelconque, le segment compris entre un sommet et le point de contact du cercle inscrit est égal au segment compris entre l'autre sommet et le point de con tact du cercle ex-inscrit.*

II. Soient D′, D″ les points de contact du côté BC avec les cercles ex-inscrits I′, I″. On vient de voir que FIG. 61.

$$CD' = AE, \quad BD'' = AD;$$

donc

$$CD' = BD''.$$

Ainsi, *les segments déterminés sur un côté, par les sommets, et par les points de contact de deux des cercles ex-inscrits, sont égaux entre eux.*

III. A cause de

$$BF = CG = p - b, \; CD' = BD'' = p - a,$$

on trouve aisément

$$D'D'' = b + c, FG = c - b, GD' = FD'' = c, FD' = GD'' = b;$$

c'est-à-dire que

1° *La distance des points de contact situés sur les prolongements d'un côté est égale à la somme des deux autres côtés; 2° la distance des points de contact situés sur un côté est égale à la différence des deux autres côtés,* etc.

Théorème XV.

Dans tout triangle ABC : 1° La circonférence qui passe par le centre I du cercle inscrit, par les extrémités B, C d'un côté et par le centre I′ du cercle ex-inscrit tangent à ce côté, a son centre sur la circonférence circonscrite; 2° la circonférence qui passe par les extrémités B, C d'un côté et par les centres I″, I‴ des cercles ex-inscrits, tangents aux prolongements de ce côté, a son centre sur la circonférence circonscrite.

FIG. 369.

1° Les angles IBI′, ICI′ étant droits, la circonférence décrite sur II′, comme diamètre, passe par les sommets B, C; le centre de cette circonférence, point milieu de II′, est situé sur le diamètre A′A″ perpendiculaire à BC; et, comme la bissectrice II′ de l'angle A passe par le milieu A′ de l'arc BC, ce point A′ est le centre dont il s'agit.

2° Les angles I‴BI″, I‴CI″ étant droits, la circonférence décrite sur I‴I″, comme diamètre, passe par les sommets B, C; le centre de cette circonférence, point milieu de I‴I″, est situé sur A′A″; d'ailleurs I″I‴ passe par le milieu A″ de l'arc BAC, etc.

Théorème XVI.

Dans tout triangle, la somme des rayons des cercles ex-inscrits est égale au rayon du cercle inscrit, augmenté de quatre fois le rayon du cercle circonscrit.

Désignons par R ce dernier rayon, par r le rayon du cercle inscrit, et par α, β, γ les rayons des cercles ex-inscrits I′, I″, I‴. FIG. 369.

Le point A′ étant le milieu de II′, il en résulte, par la propriété du trapèze, G.. 133.

$$A'P = \frac{\alpha - r}{2}.$$

Pour la même raison,

$$A''P = \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Conséquemment,

$$A'A'' = 2R = \frac{\alpha + \beta + \gamma - r}{2};$$

etc. (*).

Théorème XVII.

Dans tout triangle, la somme des rayons du cercle inscrit et du cercle circonscrit est égale à la somme des distances des côtés au centre du cercle circonscrit.

Soient a_1, b_1, c_1 les distances des côtés BC, CA, AB au centre O. La valeur précédente de A′P donne FIG. 369.

$$a_1 = R - \frac{\alpha - r}{2},$$

ou

$$2a_1 = 2R + r - \alpha.$$

(*) Cette démonstration très-simple a été, ainsi que celle qui suit, donnée par M. Mention (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. X).

De même

$$2b_1 = 2R + r - \beta,$$
$$2c_1 = 2R + r - \gamma.$$

Donc

$$2(a_1 + b_1 + c_1) = 6R + 3r - (\alpha + \beta + \gamma);$$

c'est-à-dire, à cause de

$$\alpha + \beta + \gamma = 4R + r :$$
$$a_1 + b_1 + c_1 = R + r.$$

Remarque. Dans l'application de ce théorème, une distance doit être considérée comme *négative* lorsqu'elle est *extérieure* au triangle.

Théorème XVIII.

Si, par le centre O d'un cercle, on élève une perpendiculaire OC au rayon OA, égale à la corde AB d'un arc ABD; l'arc décrit du point C comme centre, avec une ouverture de compas égale au rayon du cercle, divise en deux parties égales l'arc donné.

FIG. 370. Les triangles isoscèles AOB, ODC sont égaux, comme ayant les côtés égaux, chacun à chacun ; donc

$$COD = OAB.$$

Les compléments de ces deux angles sont, respectivement, AOD et $\frac{1}{2}$ AOB; donc enfin

$$AOD = \frac{1}{2} AOB.$$

Théorème XIX.

Étant donnés une circonférence O et un rayon prolongé OA ; si au point A on mène une perpendiculaire AB à ce rayon, et une sécante ADE à la circonférence, puis que, par les points d'intersection D, E, on mène des tangentes DC, EB, ces droites déterminent, par leurs intersections avec la perpendiculaire, deux distances égales AB, AC.

FIG. 47. Tirons les droites OB, OC et les rayons OD, OE. Si OC = OB, les distances AB, AC seront égales, et le théorème sera démontré.

Décrivons sur OB, comme diamètre, une circonférence : elle passe par les points E, A, parce que les angles OEB, OAB sont droits. De même, la circonférence décrite sur OC, comme diamètre, passe par les points D, A. Cela posé, les angles OAE, OBE sont égaux, comme inscrits au même segment OE; semblablement, les angles OAD, OCD sont égaux; donc les angles OBE, OCD sont égaux. Par conséquent, les triangles rectangles OBE, OCD sont égaux; et

$$OB = OC.$$

Problème I.

Trouver la bissectrice de l'angle de deux droites MP, NQ qu'on ne peut prolonger.

Coupons, par deux droites quelconques MN, PQ, les droites données. Menons les bissectrices MO, NO des angles M, N : le point O appartient à la droite cherchée, parce que les bissectrices des trois angles d'un triangle concourent en un même point. De même, si nous menons les bissectrices PO′, QO′ des angles P, Q, nous obtiendrons un second point O′ de la bissectrice demandée; donc cette droite est OO′. FIG. 48. G., 110.

Problème II.

Deux circonférences qui se coupent étant données, mener, par l'un des points d'intersection, une sécante commune qui ait une longueur donnée L.

Supposons le problème résolu, et soit BAC la sécante commune demandée. Des centres O, O′, abaissons OM, O′M′ perpendiculaires sur BC; puis menons O′F parallèle à BC. Nous formons ainsi un triangle rectangle OO′F, dont l'hypoténuse OO′ est la distance des centres, et dans lequel FIG. 49.

$$O'F = MM' = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} L.$$

Si donc l'on décrit une circonférence sur OO′ comme diamètre, et que du centre O′, avec $\frac{1}{2}$L pour rayon, on trace un arc coupant cette circonférence en deux points F, G, il suffira de mener, par chacun des points d'intersection A ou A′, deux parallèles aux droites OF, OG : on obtient ainsi les droites BC, B′C′, DE, D′E′, qui satisfont à la question.

Problème III.

Inscrire, entre deux circonférences données, une droite parallèle à une droite donnée AB et qui ait une longueur donnée L.

FIG. 50. Le problème étant supposé résolu, soit CD la droite cherchée : si, par le centre O, on mène OE parallèle à AB, et égale à L, et que l'on tire OC et ED, la figure OCDE est un parallélogramme, dans lequel DE = OC.

Si donc, du point E comme centre, avec OC pour rayon, on décrit une circonférence qui coupe la circonférence O′ en D et D′, et que par ces points on mène des parallèles DC, D′C′ à AB, elles répondent à la question.

Problème IV.

Par deux points A, B, donnés sur une circonférence, mener deux cordes parallèles AC, BD, dont la somme soit donnee.

FIG. 52. Soit EF la droite qui joindrait les milieux de la corde AB et de la corde inconnue CD.

Dans le trapèze ABCD, la droite EF est égale à la demi-somme des bases : donc le point F se trouve sur une circonférence décrite du point E comme centre, avec un rayon
G., 169, égal à la moitié de la somme donnée. D'un autre côté, les
162. cordes AB, CD, égales entre elles, sont également éloi-

gnées du centre ; donc le point F se trouve sur une autre circonférence, décrite du point O comme centre, avec OE pour rayon. De plus, la droite CD est tangente à cette circonférence. Nous pouvons donc regarder la question comme résolue. G., 168.

Remarque. Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que la somme donnée soit inférieure à 4OE. Dans ce cas, il admet deux solutions.

Problème V.

Construire un triangle, connaissant les pieds M, N, P des trois hauteurs.

Les hauteurs AM, BN, CP sont les bissectrices des angles du triangle MNP (Th. I). Si donc nous menons, par les points donnés M, N, P, des perpendiculaires à ces trois bissectrices, elles formeront le triangle demandé ABC. Fig. 34.

Problème VI.

Construire un triangle ABC, connaissant la base, la hauteur et l'angle au sommet.

Sur une droite indéfinie XY, prenons une distance AB égale à la base, et décrivons, sur AB, un arc ABD capable de l'angle donné. Au point A, élevons AD perpendiculaire à AB et égale à la hauteur donnée ; menons par le point D une parallèle à AB. En général, cette parallèle coupe l'arc ADB en deux points C, C'; et les triangles CAB, C'AB répondent à la question. Fig. 53.

Problème VII.

Construire un triangle ABC, connaissant un angle A, la hauteur correspondante et le rayon du cercle inscrit.

Construisons le cercle inscrit O, et décrivons du point A comme centre, avec un rayon égal à la hauteur donnée, Fig. 54.

une circonférence DEF. Si nous menons à ces cercles des tangentes communes extérieures BC, B′C′, nous obtiendrons deux triangles ABC, AB′C′, qui satisferont à l'énoncé.

Problème VIII.

Construire un triangle ABC, connaissant la base AB, la somme des deux autres côtés AC, CB, et un angle A à la base.

FIG. 55. On connaît l'angle A et la base AB; donc la direction du côté AC est déterminée. Si l'on prend AD égale à la somme donnée, et qu'on élève une perpendiculaire EC au milieu de BD, cette droite rencontre AD au sommet cherché C. En effet, CB = CD; donc

$$AC + CB = AD.$$

Problème IX.

Construire un triangle ABC, connaissant la base AB, la différence des deux autres côtés AC, CB, et un angle A à la base.

Ce problème se résout comme celui qui précède.

FIG. 56.

Problème X.

Construire un triangle ABC, connaissant un angle B à la base, la hauteur h, et le périmètre $2p$.

FIG. 57. Si, après avoir fait l'angle XBY égal à l'angle donné, on mène une parallèle à BX, qui en soit distante de h, on connaît le sommet A, et l'on est ramené au Problème VIII. En effet, la somme des côtés inconnus AC, BC est égale à $2p$ — AB.

Problème XI.

Construire un triangle ABC, connaissant la base AB, l'angle opposé C et la somme des deux derniers côtés AC, BC.

Prenons, sur le prolongement de AC, CD = CB, et menons DB. Le triangle BCD étant isoscèle, nous aurons FIG. 58.

$D = \frac{1}{2}$ ACB ; donc l'angle D est connu.

De là résulte la construction suivante :

On prend, sur une droite indéfinie, AD égale à la somme donnée. Au point D, on fait, avec AD pour côté, un angle ADB, moitié de l'angle donné C. Du point A comme centre, avec un rayon égal à la base donnée, on décrit une circonférence qui coupe DB au sommet B. Enfin, au milieu de BD, on élève la perpendiculaire EC, laquelle détermine le dernier sommet C.

Problème XII.

Construire un triangle ABC, connaissant la base AB, l'angle opposé C, et la différence des deux derniers côtés AC, BC.

L'analyse de ce problème est la même que celle du Problème XI. Elle conduit à la construction suivante: FIG. 59.

On prend, sur une droite indéfinie, AD égale à la différence donnée. Au point D, on fait, avec AD pour côté, un angle ADB, double de l'angle donné C. Du point A comme centre, avec un rayon égal à la base donnée, on décrit une circonférence qui coupe DB au sommet B. Enfin, au milieu de DB on élève la perpendiculaire EC : on trouve ainsi le dernier sommet C.

Problème XIII.

Construire un triangle ABC, connaissant la base AB et le cercle inscrit O.

FIG. 60. Si, par les extrémités A, B de la base, on mène des tangentes au cercle O, on aura le triangle cherché.

Remarque. Quand l'angle AOB est droit, les tangentes deviennent parallèles entre elles, et le problème est impossible.

Problème XIV.

Construire un triangle, connaissant le cercle inscrit, et l'un des trois cercles ex-inscrits.

FIG. 61. En menant aux cercles O, I une tangente commune intérieure CB, et deux tangentes communes extérieures AB,
G., 57. AC, on obtient le triangle demandé ABC.

Problème XV.

Construire un triangle, connaissant deux des trois cercles ex-inscrits.

FIG. 61. En menant aux circonférences I, I′ deux tangentes communes intérieures BC, AC, et une tangente commune extérieure AB, on forme le triangle demandé ABC.

Problème XVI.

Construire un triangle, connaissant les centres I, I′, I″ des trois cercles ex-inscrits.

FIG. 61. D'après le Théorème I, les sommets du triangle cherché ABC sont les pieds des hauteurs du triangle II′I″.

Remarque. Si, au lieu des trois centres I, I′, I″, on en donnait deux, I, I′, avec le centre O du cercle inscrit, on obtiendrait le triangle ABC en menant les droites IBI″, I′AI″, OC respectivement perpendiculaires à OI′, OI, II′.

Problème XVII.

Construire un triangle ABC, connaissant la base BC, l'angle opposé A et le rayon du cercle inscrit.

Le rayon du cercle inscrit étant connu, on peut facilement tracer ce cercle O. Soient D, E les points où il touche les côtés de l'angle donné A. Si l'on prend DH = EI = BC, et que l'on décrive le cercle O' qui touche AB en H et AC en I, ce cercle sera ex-inscrit au triangle ABC. Fig. 45.

En effet, d'après le Théorème XIV,

$$BD + BH = BF + CF = BC.$$

Il suffit donc, pour déterminer le triangle ABC, de mener une tangente commune aux cercles O, O'.

Problème XVIII.

Construire un triangle ABC, connaissant la base BC, la somme des deux autres côtés et le rayon du cercle inscrit.

A cause de $BM + CN = BC$ (Pr. XVII), Fig. 62.

$$AB + AC - BC = AM + AN = 2AM.$$

Par conséquent, AM est connu ; OM l'est également. Donc, si l'on construit un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit AM et OM, on connaîtra l'angle MAO, puis l'angle MAN, double de MAO. Ainsi, le problème est ramené à celui qui précède.

Problème XIX.

Construire un triangle ABC, connaissant la base BC, la différence des deux autres côtés et le rayon du cercle inscrit.

A cause de AM = AN, la différence des segments CN, BM est égale à la différence des côtés AC, AB. Mais Fig. 62.

$$CN = CP, \qquad BM = BP \,;$$

donc

$$CP - BP = CN - BM = AC - AB.$$

Par conséquent, si l'on porte, de C en D, la différence donnée, et qu'on élève une perpendiculaire au milieu de BD, égale au rayon du cercle inscrit, on pourra tracer ce cercle. Donc les tangentes menées des extrémités de la base détermineront le triangle ABC.

Problème XX.

Construire un triangle ABC, connaissant le périmètre, l'angle A et le rayon du cercle inscrit.

FIG. 45. Soient, comme dans le Problème XVII, O, O′ le cercle inscrit et l'un des cercles ex-inscrits. On aura (Th. XIV) $AH = AI = p$. Et comme les droites AH, AI comprennent entre elles l'angle donné A, on peut construire le cercle ex-inscrit, puis le cercle inscrit, dont le rayon est l'une des données de la question. Il ne s'agira donc plus, pour déterminer le triangle ABC, que de mener la tangente commune BC.

Problème XXI.

Construire un triangle ABC, connaissant le périmètre $2p$, un angle A, et la hauteur h abaissée du sommet de cet angle sur le côté opposé.

FIG. 88. Des propriétés démontrées ci-dessus (Th. XIII et XIV) on conclut immédiatement la construction suivante :

Sur les côtés Ax, Ay de l'angle donné A, prenez $AE = AF = p$; élevez EO, FO, respectivement perpendiculaires à Ax, Ay; du point O, comme centre, avec EO pour rayon, tracez une circonférence : elle touche les côtés de l'angle aux points E, O. Du point A, comme centre, avec un rayon égal à la hauteur donnée, tracez une circonférence DD′. Enfin menez, à ces circonférences, une tangente intérieure DG. Elle coupe les côtés de l'angle donné en deux points B, C, derniers sommets du triangle demandé.

Remarques. I. Le problème admet, en général, une seconde solution AB′C′, qui ne diffère pas essentiellement de la première.

II. Pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait

$$h \leqq AO - OE.$$

III. Si $h = AO - OE$, les circonférences sont tangentes; et les deux triangles ABC, AB′C′ se confondent en un triangle isoscèle. Alors, la hauteur h est un *maximum*.

IV. Si l'angle A est droit, la figure AEOF devient un carré; et la condition ci-dessus se réduit à

$$h \leqq AO - p.$$

Problème XXII.

Construire un triangle ABC, connaissant les longueurs de la médiane AP, de la bissectrice AQ et de la hauteur AR issues d'un même sommet A.

La droite AQ passe par le milieu A′ de l'arc BA′C du cercle circonscrit au triangle : il est visible, d'après cela, que *la bissectrice* AQ *divise, en deux parties égales, l'angle* OAR *formé par le rayon* OA *du cercle circonscrit et par la hauteur* AR. FIG. 371.

Cette remarque (*) donne immédiatement la solution

(*) Faite par M. Mention (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. IX).

du problème proposé. En effet, l'hypoténuse AQ et le côté AR déterminent le triangle ARQ ; puis, la longueur de la médiane détermine le point P et la perpendiculaire PO au côté inconnu BC ; enfin, si l'on construit l'angle QAO égal à QAR, on a un nouveau lieu géométrique du centre O ; etc.

Remarque. La longueur de la bissectrice est comprise entre les longueurs de la médiane et de la hauteur (*voyez* Th. V, Liv. I).

Problème XXIII.

Construire un triangle ABC, connaissant les longueurs de la bissectrice AO et de la hauteur AR issues d'un même sommet A, ainsi que le rayon du cercle circonscrit.

Ce problème se résout avec la même facilité que le précédent. Il en est de même pour d'autres questions que l'on peut également déduire du Problème XXII, par de légères modifications dans les données.

Problème XXIV.

Construire un triangle équilatéral ayant les sommets sur trois parallèles données X, Y, Z.

Supposons le problème résolu, et soit ABC le triangle
Fig. 67. équilatéral demandé. Faisons passer une circonférence par les trois sommets A, B, C ; elle coupe la parallèle X en un point O. Menons OB, OC : les angles BOC, BAC seront égaux, comme inscrits au même segment CBD ; donc

$$BOC = \frac{2^d}{3}.$$

De même,

$$OBD = AOB = ACB = \frac{2^d}{3}.$$

De là, résulte la construction suivante :

En un point O quelconque de la parallèle X, on mène deux droites OC, OB, inclinées à 60° sur les trois parallèles. Ces droites coupent Y, Z en deux points C, B. On mène BC ; on circonscrit, au triangle BOC, une circonférence qui coupe la parallèle X en A ; on joint ce point aux points B et C ; et ABC est le triangle équilatéral demandé.

Problème XXV.

A un triangle donné MNP, circonscrire un triangle ABC égal à un triangle donné A′B′C′.

Le point B se trouve sur l'arc capable de l'angle B′, décrit sur MN comme corde; et le point C, sur l'arc capable de l'angle C′, décrit sur MP comme corde. FIG. 69.

Maintenant, si l'on mène par le point M une sécante BC telle, que la partie comprise dans les deux segments soit égale à B′C′ (Pr. II), et que l'on tire BN et CP, on aura le triangle demandé ABC.

Remarque. Si le côté donné B′C′ n'est ni trop grand ni trop petit, le problème sera susceptible d'une seconde solution ; car on peut, en général, mener par le point M deux sécantes BC, DE égales à B′C′.

Problème XXVI.

A un triangle donné ABC, circonscrire un triangle équilatéral maximum.

Du Problème XXV, on conclut la construction suivante : FIG. 89.

Sur les côtés du triangle ABC, on décrit trois arcs capables de $\frac{2}{3}$ d'angle droit; par le sommet B du plus petit des trois angles, on mène une sécante MP terminée aux arcs BPA, BMC, et parallèle à la ligne des centres. On mène les droites PA, MC, lesquelles, se coupant en un point N situé sur l'arc AC, forment le triangle équilatéral maximum MNP.

Problème XXVII.

Par un point donné A, mener une sécante ABC qui forme, avec les deux côtés d'un angle donné O, un triangle OBC, dont le périmètre soit donné.

FIG. 63.

Si l'on considère le cercle I, ex-inscrit à ce triangle, on a (Th. XIV) $ON = OP = p$.

De cette remarque résulte la construction suivante :

On prend, sur les côtés de l'angle O, des distances ON, OP égales à la moitié du périmètre donné; aux points N, P on élève, aux côtés de l'angle, des perpendiculaires qui se coupent en I. Du point I, avec IN pour rayon, on décrit une circonférence, à laquelle on mène, par le point A, une tangente ABMC : cette droite est la sécante demandée.

Problème XXVIII.

Étant donnés un triangle ABC et un point O, mener par ce point une sécante OMN telle, que le segment MN compris dans l'angle A soit égal à la somme des deux segments BM, CN.

FIG. 64.

A cause de $MN = MB + CN$, le périmètre du triangle AMN est égal à la somme des côtés AB, AC du triangle donné. La question se réduit donc à mener, par le point O, une sécante qui détermine, dans l'angle A, un triangle AMN ayant un périmètre donné. C'est le problème que nous venons de résoudre.

Problème XXIX.

Construire un quadrilatère ABCD, connaissant deux angles opposés B, D, les diagonales et leur angle O.

On décrit sur AC deux arcs, l'un capable de l'angle B, l'autre capable de l'angle D ; on trace ensuite une droite MN faisant avec AC un angle égal à O, puis une droite BD parallèle à MN, et telle, que la partie comprise entre les deux arcs soit de longueur donnée (Prob. III) : ABCD est le quadrilatère demandé. FIG. 51.

Problème XXX.

Inscrire, à un carré donné, un autre carré donné.

Soit MNPQ un carré inscrit à ABCD. Les triangles AMQ, BNM, CPN, DQP sont égaux ; car ils ont les hypoténuses égales et les angles aigus égaux. De plus, si l'on mène les diagonales AC, MP, on forme deux triangles AOM, COP égaux entre eux, comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun. Par conséquent FIG. 17.

$$OA = OC, \qquad OM = ON;$$

c'est-à-dire que les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales.

On déterminera donc les sommets M, N, P, Q en décrivant, du point O comme centre, un arc de cercle ayant pour rayon la moitié de la diagonale du carré à inscrire.

Remarque. Le problème est impossible si la diagonale du second carré est plus petite que le côté du premier.

Problème XXXI.

Placer, dans l'angle A d'un triangle donné ABC, une droite DE de longueur donnée L, qui soit égale à la somme des segments BD, EC.

Fig. 66. Des deux problèmes précédents, et du Théorème XIV, on tire la construction suivante :

Prenez, sur les côtés de l'angle A,

$$AF = AG = \frac{1}{2}(AB + AC + BC),$$

et décrivez le cercle O', qui touche en F, G les côtés de l'angle. Prenez ensuite FI = GK = L, et décrivez le cercle O. Menez enfin, à ces deux cercles, une tangente commune intérieure DE.

Problème XXXII.

Étant donnés un point A et deux circonférences, mener une droite MN terminée aux circonférences et divisée en deux parties égales par le point.

Fig. 78. Soit C la circonférence *symétrique* de O par rapport au point donné ; soient M, M' les points où cette circonférence auxiliaire coupe la circonférence O'. Si l'on mène les droites MAN, M'AN', elles satisfont à l'énoncé.

Remarque. Pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait

$$CO' < R + R', \quad CO' > R - R' ;$$

R, R' étant les rayons des cercles donnés.

Problème XXXIII.

Mener, dans un triangle ABC, une transversale MNP telle, que les segments MP, NP, déterminés par les côtés du triangle, soient égaux à des droites données m, n.

Ce problème peut être regardé comme un cas particulier du Problème XXV : celui où le triangle donné MNP se réduirait à une ligne droite. FIG. 70.

Problème XXXIV.

Des sommets d'un triangle ABC, comme centres, décrire trois circonférences qui se touchent mutuellement.

Soient M, N, P les points de contact cherchés. La tangente commune aux cercles C, A, et la tangente commune aux cercles A, B, se rencontrent en un point situé sur la bissectrice de l'angle A. De même, la tangente commune en P et la tangente commune en M se rencontrent sur la bissectrice de l'angle B. Or, les bissectrices des trois angles du triangle ABC se coupent en un point unique O, centre du cercle inscrit à ce triangle. Donc les tangentes communes en M, N, P sont les rayons menés aux points de contact du cercle O avec les trois côtés du triangle ABC. FIG. 28. G., 74, 195.

Il faut donc, pour trouver les rayons AP, BM, CN :

1° Chercher le centre du cercle O inscrit au triangle donné;

2° Abaisser OM, ON, OP perpendiculaires sur les côtés du triangle donné.

Remarques. I. Si l'on désigne par a, b, c les côtés du triangle, et par $2p$ le périmètre, il résulte, du Théorème XIV, que

$$AP = p - a, \quad BM = p - b, \quad CN = p - c.$$

II. Ce problème équivaut à la *résolution géométrique* des équations

$$y + z = a, \quad z + x = b, \quad x + y = c.$$

Problème XXXV.

Étant donnés, sur une circonférence O, deux points C, D, situés d'un même côté par rapport à un diamètre donné AB, trouver sur la circonférence, de l'autre côté de ce diamètre, un point M tel, qu'en le joignant aux deux points donnés, les segments OE, OF du diamètre, compris entre le centre et les droites de jonction, soient égaux entre eux.

Fig. 68. Menons le diamètre COG ; joignons le point G aux points inconnus M, F, par les droites GM, GFH, et menons la corde HC.

Les triangles OEC, OFG sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ; donc les angles OCE, OGF sont égaux. De là résulte que les triangles CMG, CHG, évidemment rectangles, sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un angle aigu égal. Donc la figure CMGH est un rectangle. Actuellement, dans le triangle MGF, l'angle G est droit, et l'angle M est connu, car il est égal à DCG. Si donc nous décrivons, sur la corde GD, un arc capable d'un angle égal à $1^d + DCG$, cet arc coupera le diamètre AB au point cherché F.

Remarque. Si, aux points D, G, on mène des tangentes, et que du point I, où elles se coupent, on décrive une circonférence, son intersection avec AB donne le point F.

Problème XXXVI.

Mener à deux circonférences données O, O', deux tangentes égales AT, AT', faisant entre elles un angle donné.

Joignons les points de contact T, T', aux deux centres, par les droites TO, T'O', et prolongeons ces lignes jusqu'à leur rencontre en B. Nous formerons ainsi un quadrilatère dans lequel les angles B, A sont supplémentaires, attendu que les angles T, T' sont droits. De plus, $BT = BT'$: c'est ce qu'il est facile de voir en menant la diagonale AB. De là résulte que, dans le triangle OBO', nous connaissons la base OO', l'angle opposé B, et la différence des deux derniers côtés ; car, de FIG. 71.

$$BT = OB + OT, BT' = O'B + O'T',$$

on déduit, à cause de $BT = BT'$:

$$BO - BO' = O'T' - OT.$$

La question est donc ramenée au Problème XII.

Remarque. Si, au lieu de la tangente AT, on considère la tangente AT_1, on aura

$$B_1T = B_1O + OT, \quad B_1T_1 = B_1O' - O'T_1;$$

d'où

$$B_1O' - B_1O = OT + O'T_1.$$

Problème XXXVII.

Par un point A, situé hors d'une circonférence O, mener une sécante ABC qui soit divisée en deux parties égales par la circonférence.

Menons OB, OC, et prolongeons OB d'une longueur égale BD. Les triangles ABD, OBC seront égaux, comme FIG. 83.

ayant un angle égal compris entre côtés égaux; donc AD = OC. De là résulte la construction suivante

Du point A comme centre, on décrit une circonférence égale à la circonférence O ; du point O comme centre, avec un rayon double du premier, on trace un arc qui coupe en D la circonférence A. Enfin l'on mène OD, qui coupe, au point cherché B, la circonférence O.

Remarque. Pour que le problème soit possible, il faut que la distance AO soit inférieure à la somme des distances AD et OD, c'est-à-dire moindre que trois fois le rayon de la circonférence donnée. Dans ce cas, les arcs de cercle décrits des points A, O, comme centres, se coupent en deux points D, D'; et il y a deux droites ABC, AB'C' qui satisfont à la question.

Problème XXXVIII.

Inscrire, à un cercle donné O, une corde CD, de longueur donnée L, qui soit partagée en deux parties égales par une corde donnée AB.

FIG. 85. Soit E le point d'insertion de la corde inconnue CD avec la corde donnée AB. Joignons ce point au centre O par la droite OE: elle est perpendiculaire à CD ; conséquemment, la corde CD sera tangente à la circonférence décrite du point O comme centre, avec OE pour rayon. Or deux
G., 168. cordes également éloignées du centre sont égales. Si donc nous inscrivons au cercle O une corde quelconque GH égale à L, et si nous décrivons ensuite une circonférence concentrique à la première et tangente à GH, cette ligne passera par le point cherché E.

Remarque. Lorsque le problème est possible, il admet généralement deux solutions.

Problème XXXIX.

Par un point M, donné sur un diamètre AB, mener une transversale CD telle, que l'arc AC soit le triple de BD.

Il y a deux cas à distinguer, selon que le point M est situé sur le diamètre AB ou sur son prolongement. FIG. 76.

Premier cas. Menons le rayon OD : nous formons ainsi un triangle MOD, dans lequel l'angle O a pour mesure BD. Mais l'angle BMD a pour mesure $\frac{1}{2}$ (AC + BD), ou 2BD. Donc l'angle extérieur BMD est double de l'angle intérieur O. Donc le triangle OMD est isoscèle, et MD = OD.

On décrira donc, du point M comme centre, une circonférence ayant pour rayon MO. Si MO est plus grand que MB, cette circonférence coupe la circonférence donnée en deux points D, D'; et l'on trouve les deux cordes DMC, D'MC', qui satisfont à la question.

Second cas. Si le point M est situé sur le prolongement du diamètre AB, on trouve encore MD = OD.

Problème XL.

Décrire un cercle qui touche une circonférence donnée C et qui touche, en un point donné A, une droite donnée PQ.

Soit O le centre du cercle demandé. Comme ce point appartient à la perpendiculaire élevée, par le point A, à la droite PQ, il suffit de connaître une autre droite sur laquelle il soit situé. Or si l'on prend, sur la perpendiculaire, une distance AB égale au rayon de la circonférence donnée C, et que l'on mène CB, le triangle OBC sera isos- FIG. 79.

cèle. Par conséquent, le centre appartient à la perpendiculaire élevée au milieu de BC.

Problème XLI.

Décrire un cercle qui touche une droite donnée PQ et qui touche, en un point donné A, une circonférence donnée C.

FIG. 80. Supposons le problème résolu, et soit O le centre du cercle demandé. Ce point se trouve sur la droite CA qui joint le point de contact au centre du cercle donné. De plus, si l'on mène AD perpendiculaire à CA, le centre O appartient à la bissectrice DO de l'angle ADP; donc il est déterminé.

Problème XLII.

Décrire, sur une corde donnée AB, une circonférence qui coupe une circonférence donnée O, de manière que la corde commune CD soit parallèle à une droite donnée EF.

FIG. 81. G., 172. Lorsque deux circonférences se coupent, la ligne des centres est perpendiculaire à la corde commune; donc OI est perpendiculaire à CD, ou perpendiculaire à EF. D'ailleurs, le centre cherché I doit se trouver sur la perpendiculaire élevée au milieu de AB; donc il est déterminé.

Problème XLIII.

Décrire, d'un point donné O, comme centre, une circonférence qui coupe une droite donnée XY, de manière que l'un des deux arcs interceptés soit capable d'un angle donné α.

FIG. 84. Soit OM le cercle demandé, et soit MAN le segment capable de l'angle donné α. L'angle au centre MON, étant double de MAN, égale 2α. Si donc l'on abaisse OB

perpendiculaire sur XY, l'angle MOB, moitié de MON, sera égal à l'angle donné α.

De là résulte la construction suivante :

Du point donné O, on abaisse, sur la droite donnée, une perpendiculaire OB ; on fait au point O, avec cette perpendiculaire, un angle MOB égal à l'angle donné α; puis du point O comme centre, avec OM pour rayon, on décrit une circonférence.

Problème XLIV.

Décrire une circonférence ayant pour centre un point donné O, et qui coupe les côtés d'un angle donné BAC, suivant une corde DE parallèle à une droite donnée MN.

Du centre O, abaissons OF perpendiculaire sur DE : le point F sera le milieu de DE. Si nous menons AF, cette médiane, il est facile de le démontrer, divise en deux parties égales toute parallèle à la base DE du triangle DAE. En particulier, si l'on prolonge les côtés de l'angle donné jusqu'à leur rencontre avec la droite donnée MN, le segment GH sera partagé en deux parties égales par le prolongement de la médiane. FIG. 86.

On voit donc que pour trouver le point F, il faut :

1° Prolonger les côtés de l'angle jusqu'à leur rencontre en G et en H avec la droite donnée MN ; 2° joindre le milieu I de GH avec le sommet A ; 3° enfin abaisser, du centre donné, OF perpendiculaire à MN.

Le point F étant connu, le reste s'achève aisément.

Problème XLV.

Connaissant une circonférence C, une droite XY et un point A situé sur cette droite, décrire une circonférence qui touche la droite au point A, et qui coupe, sous un angle donné α, la circonférence C.

FIG. 92. Soit OA le cercle demandé. Si au point B, où il coupe le cercle donné, on mène les tangentes BD, BE, l'angle de ces droites doit être égal à α. Si donc l'on inscrit au cercle donné C une corde MN qui en retranche un segment capable de l'angle α ou de son supplément, et qu'on décrive du centre C, une circonférence tangente à MN, cette circonférence CP touchera la corde BE en son milieu F.

Cela posé, menons le rayon CG perpendiculaire à XY; joignons le point G au point de contact F, et prolongeons la corde GF jusqu'à sa rencontre en H avec XY. Enfin, supposons BE prolongée aussi jusqu'à ce qu'elle rencontre XY en un point I. Nous obtiendrons ainsi deux triangles FCG, FIH tels, que les angles CGF, CFG du premier ont, pour compléments respectifs, les angles IHF, IFH du second, attendu que CG et CF sont respectivement perpendiculaires à IH et IE. Mais CGF = CFG; ainsi IHF = IFH; puis IF = IH

D'un autre côté, les tangentes IA, IB sont égales entre elles, comme éta issues d'un même point, ainsi; BF = AH.

Il suffit donc, pour trouver le point H, de prendre $AH = MP = \frac{1}{2} MN$. Le point H étant connu, on mène la droite GH, laquelle, par son intersection avec la circonférence CP, donne le point F. Enfin, le centre cherché O est l'intersection de AO, perpendiculaire à XY, avec OL perpendiculaire au milieu de HF.

Nous laissons au lecteur le soin de discuter le problème.

Problème XLVI.

Connaissant deux circonférences O, C, avec un point A pris sur l'une d'elles, on propose d'en décrire une qui passe par ce point et qui coupe les deux premières sous des angles connus α, β.

Supposons le problème résolu, et soit I le cercle demandé. Menons au cercle C la tangente AD, et au cercle demandé I la tangente AE : ces droites formeront, par hypothèse, un angle égal à α. Si donc l'on mène au point A une droite AE faisant avec la tangente connue AD, un angle α, le problème sera réduit à décrire une circonférence touchant AE au point A, et coupant, sous un angle donné β, la circonférence O : c'est le problème qui vient d'être résolu. FIG. 93.

Problème XLVII.

Quel est le lieu géométrique des sommets des triangles ayant même base AB et dans lesquels la médiane AM a une longueur donnée L ?

Si nous menons CO parallèle à AM, nous aurons $BO = 2AB$, et $OC = 2AM = 2L$. Le lieu est donc une circonférence décrite du point O comme centre, avec 2L pour rayon. FIG. 90.

Problème XLVIII.

Par un point D, pris sur le côté BC d'un triangle donné ABC, on mène une transversale quelconque EDF. On trace les circonférences CDE, BDF. Quel est le lieu du second point M d'intersection de ces circonférences?

Fig. 91. Joignons le point M aux points B, C, D, et considérons le quadrilatère ABMC.

L'angle BMC de ce quadrilatère se compose des angles BMD, CMD. Or

$$BMD = BFD, \quad CMD = AEF\,;$$

donc

$$BMC = BFD + AEF = 2^d - A.$$

Ainsi, l'angle BMC est le supplément de l'angle A du triangle ABC; et, conséquemment, le lieu géométrique cherché est la circonférence circonscrite au triangle ABC.

Remarque. Ce lieu géométrique est indépendant de la position du point donné D.

LIVRE III.

Théorème I.

Lorsqu'une droite AB est partagée en deux segments AC, BC, proportionnels aux nombres b, a ; si des points A, B, C on abaisse, sur une droite quelconque XY, des perpendiculaires AA', BB', CC', on a

$$(a+b)\,CC' = a.AA' + b.BB'.$$

Menons la diagonale A' B, qui rencontre CC' en un point D. Les triangles semblables BCD, BAA' donnent FIG. 94.

$$\frac{CD}{AA'} = \frac{BC}{BA} = \frac{a}{a+b};$$

d'où

$$(a+b)\,CD = a.\,AA'.$$

De même, à cause des triangles semblables A'C'D, A'B'B :

$$\frac{C'D}{BB'} = \frac{A'D}{A'B} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{a+b};$$

d'où

$$(a+b)\,C'D = b.\,BB'.$$

Ajoutant les deux égalités, on trouve

$$(a+b)\,CC' = a.\,AA' + b.\,BB'.$$

Remarques. I. Lorsque la droite XY ne laisse pas d'un même côté, les trois points A, B, C, on doit affecter du signe + les perpendiculaires situées d'un côté de cette droite, et du signe — celles qui sont situées de l'autre côté.

Considérons, par exemple, la figure 95. Nous aurons, comme ci-dessus,

$$(a+b)\,\mathrm{CD} = a.\,\mathrm{AA}',$$
$$(a+b)\,\mathrm{C'D} = b.\,\mathrm{BB}'.$$

Mais la perpendiculaire CC′ est égale à C′D — CD ; donc

$$(a+b)\,\mathrm{CC}' = b.\,\mathrm{BB}' - a.\,\mathrm{AA}'.$$

II. Si les segments AC, BC, au lieu d'être *additifs,* sont *soustractifs,* c'est-à-dire si le point C est situé sur le prolongement de AB, on aura

$$(a-b)\,\mathrm{CC}' = a.\,\mathrm{AA}' - b.\,\mathrm{BB}'.$$

En effet, de

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \frac{a}{b},$$

on conclut

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{b}{a+b},$$

d'où, par le théorème ci-dessus,

$$a.\,\mathrm{AA}' = b.\,\mathrm{BB}' + (a-b)\,\mathrm{CC}'.$$

Théorème II.

Étant donné un système de points A, B, C..., on peut toujours déterminer un point tel, que sa distance à une droite quelconque XY soit égale à la moyenne arithmétique entre les distances de la même droite aux points A, B, C.

FIG. 97. D'après le Théorème I, la proposition est vraie dans le cas où le nombre des points A, B, C... se réduit à *deux.* Supposons donc que cette proposition ait été démontrée pour le cas de n points A, B, C, D, E, et vérifions qu'elle a encore lieu si l'on considère $(n+1)$ points A, B, C, D, E, F.

Soit I *le centre des moyennes distances* des points A, B, C, D, E ; nous avons

$$n.\,\mathrm{II}' = \mathrm{AA}' + \mathrm{BB}' + \mathrm{CC}' + \mathrm{DD}' + \mathrm{EE}'.$$

Menons IF, et partageons cette droite en deux segments IO, OF, proportionnels aux nombres 1, n ; nous aurons, par le Théorème I :

$$(n+1)\ OO' = n.\ II' + FF.$$

Donc

$$OO' = \frac{1}{n+1}\left[AA' + BB' + CC' + DD' + EE' + FF'\right].$$

Remarques. I. Pour trouver le centre des moyennes distances d'un système de points A, B, C, D,... il suffit, évidemment, d'appliquer la règle suivante :

Menez la droite AB, *et divisez cette droite en deux parties égales* AM, MB ; *menez la droite* MC, *et divisez cette droite en deux parties* MN, NC, *proportionnelles aux nombres* 1, 2 ; *menez la droite* ND, *et divisez cette droite en deux parties* NP, PD, *proportionnelles aux nombres* 1, 3, *etc. : le dernier point de division* O *sera le centre des moyennes distances cherché.*

II. *Tout système de points a un centre des moyennes distances.*

III. *Un système de points ne peut avoir qu'un seul centre des moyennes distances.*

En effet, s'il en avait deux, ces deux centres seraient également distants d'une droite quelconque ; ce qui est absurde.

IV. *Si une droite* XY *est située de manière que la somme algébrique de ses distances à des points* A, B, C, D... *soit nulle, cette droite contient le centre des moyennes distances du système de ces points.*

De cette dernière proposition, on déduit les conclusions suivantes :

V. *Le centre des moyennes distances d'un triangle est le point d'intersection des trois médianes.*

VI. *Le centre des moyennes distances d'un quadrilatère est le point de rencontre des droites qui joignent les milieux des côtés opposés.*

VII. *Le centre des moyennes distances des sommets d'un polygone régulier est le centre de figure de ce polygone.*

Théorème III.

La somme des carrés des distances de n points A, B, C... à un point quelconque S, est égale à la somme des carrés des distances des mêmes points à leur centre O, augmentée de n fois le carré de SO.

FIG. 98. G., 269. Soient A', B', C',... les projections des points A, B, C,... sur la droite SO ; nous avons :

$$\overline{AS}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OS}^2 + 2OS \cdot A'O,$$
$$\overline{BS}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{OS}^2 - 2OS \cdot B'O,$$
$$\overline{CS}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OS}^2 - 2OS \cdot C'O,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

d'où résulte

$$\overline{AS}^2 + \overline{BS}^2 + \overline{CS}^2 + \ldots = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 + \ldots + n\overline{OS}^2$$
$$+ 2OS(A'O - B'O - C'O + \ldots).$$

Il est visible que le point O, centre des moyennes distances des points A, B, C,... est aussi le centre de leurs projections A', B', C'... Donc la somme *algébrique* des distances A'O, B'O, C'O..., est nulle, et l'égalité précédente se réduit à

$$\overline{AS}^2 + \overline{BS}^2 + \overline{CS}^2 + \ldots = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \ldots + n \cdot \overline{OS}^2$$

Remarque. Cette égalité donne

$$\overline{AS}^2 + \overline{BS}^2 + \overline{CS}^2 + \ldots < \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 + \ldots$$

Conséquemment, *la somme des carrés des distances d'un point* S *à des points donnés* A, B, C,... *est un minimum, quand ce point* S *se confond avec le centre* O *des moyennes distances.*

Théorème IV.

Le lieu géométrique des points tels que la somme des carrés des distances de chacun à des points donnés A, B, C,... soit constante, est une circonférence qui a pour centre le centre O des moyennes distances des points A, B, C,...

Soit S l'un des points du lieu, et soit l la constante donnée. L'égalité précédente donne Fig. 98

$$l^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \ldots + n \,.\, \overline{OS}^2\,;$$

ou

$$\overline{OS}^2 = \frac{1}{n}\left[l^2 - \overline{AO}^2 - \overline{BO}^2 - \overline{CO}^2 - \ldots\right];$$

c'est-à-dire que la distance OS est constante : le lieu, s'il existe, est donc une circonférence ayant pour centre le point O.

Remarques. I. Pour que la circonférence existe il faut que l'on ait

$$l^2 > \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 + \ldots$$

II. Si $l^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 + \ldots$, *la circonférence se réduit au point* O.

Théorème V.

Les droites qui joignent les sommets homologues de deux polygones P, P′, semblables et semblablement ou inversement situés, se coupent en un même point.

FIG. 99. Soient AB, BC deux côtés consécutifs du polygone P, et A′B′, B′C′ les côtés correspondants du polygone P′. Soit O le point de rencontre des droites AA′, BB′ : il s'agit de démontrer que la droite CC′ passe par le point O.

Les triangles semblables OAB, OA′B′ donnent

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BO}{B'O'};$$

d'où

$$\frac{AB-A'B'}{AB}=\frac{BB'}{BO}.$$

Appelons O′ le point de rencontre des droites BB′, CC′; nous aurons, de la même manière,

$$\frac{BC-B'C'}{BC}=\frac{BB'}{BO'}.$$

Mais, les polygones P, P′ étant semblables, on a

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'};$$

d'où

$$\frac{AB-A'B'}{AB}=\frac{BC-B'C'}{BC}.$$

Les proportions ci-dessus ont donc un rapport commun. Conséquemment,

$$\frac{BB'}{BO}=\frac{BB'}{BO'};$$

d'où

$$BO = BO'.$$

Ainsi, O′ coïncide avec O.

Remarques. I. On appelle, en général, *centre de similitude* de deux lignes un point *situé de la même manière* par rapport à l'une et à l'autre. Si l'on adopte cette définition, on voit que le point O est le centre de similitude des polygones P, P′.

II. Le centre de similitude est *externe* lorsque les deux figures sont *directement* semblables ; il est *interne* dans le cas contraire.

III. Deux figures semblables et semblablement placées peuvent avoir, à la fois, deux centres de similitude. Exemple : deux circonférences.

Théorème VI.

Deux polygones semblables ont un centre de similitude.

AB, A′B′ étant deux côtés homologues, soit C leur point de concours. Par les trois points A, A′, C, faisons passer une circonférence ; puis, par les trois points B, B′, C, faisons passer une autre circonférence. Ces deux lignes, qui se coupent en C, se coupent en un autre point O : ce point est le centre de similitude des deux polygones. FIG. 100.

En effet, dans le quadrilatère inscrit OACA′, les angles A, A′ sont supplémentaires ; donc OAB = OA′B′. De même, OBA = OB′A′. Conséquemment, les triangles OAB, OA′B′ sont semblables, et le point O est situé de la même manière relativement aux côtés AB, A′B′. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Théorème VII.

Les centres de similitude de trois polygones P, P′, P″, semblables et semblablement placés, sont en ligne droite.

Soit X le point du polygone P′, homologue du centre de similitude O′ de P, P″. La droite O′X, qui joint deux points homologues de P, P′, doit passer par O″, centre de similitude de ces polygones. Cette même droite, joignant deux points homologues de P′, P″, doit passer par leur centre O. Les quatre points O, O′, O″, X, sont donc en ligne droite.

Remarques. I. La droite qui passe par les centres de similitude de trois figures semblables et semblablement placées s'appelle *axe de similitude.*

II. Trois circonférences ont en général *six* centres de similitude, lesquels sont situés, trois à trois, sur *quatre* axes de similitude.

Théorème VIII.

Toute transversale A′B′C′ détermine, sur les côtés d'un triangle ABC, six segments tels, que le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres (*).

FIG. 101. Menons, par le sommet C, la droite CD parallèle à la transversale; nous aurons

$$\frac{DC'}{CB'} = \frac{AC'}{AB'}, \quad \frac{CA'}{DC'} = \frac{BA'}{BC'}.$$

(*) Cette proposition, connue sous le nom de *Théorème de Ptolémée*, lui est antérieure d'au moins un siècle. (CHASLES, *Géométrie supérieure.*)

Ces deux proportions donnent

$$\frac{CA'}{CB'} = \frac{AC'}{AB'} \cdot \frac{BA'}{BC'},$$

ou

$$AB'.CA'.BC' = BA'.CB'.AC'.$$

Remarques. I. Pour exprimer la relation précédente, on dit que les segments sont en *involution.*

II. La réciproque du théorème est vraie ; c'est-à-dire que *si trois points, pris sur les côtés d'un triangle, déterminent six segments en involution, ces trois points sont en ligne droite.* On démontre aisément cette réciproque, au moyen de la *réduction à l'absurde.*

III. Cette réciproque prouve que : 1° *Dans tout triangle, les bissectrices extérieures rencontrent les côtés opposés en trois points situés en ligne droite* ; 2° *deux bissectrices intérieures et une bissectrice extérieure rencontrent les côtés opposés en trois points situés en ligne droite ;* etc.

Théorème IX.

Trois droites AA′, BB′, CC′, issues des sommets d'un triangle, et concourant en un même point O, déterminent, sur les côtés du triangle, six segments en involution (*).

Le triangle ACC′ et la transversale BOB′ donnent, par le théorème précédent, FIG. 102

$$AB'.CO.BC' = AB.OC'.CB'.$$

Le triangle BCC′ et la transversale AOA′ donnent, en

(*) Ce théorème, qui avait été attribué à Jean Bernoulli, est peut-être dû à Jean de Ceva, géomètre italien. (CHASLES, *Géométrie supérieure.*)

vertu du même théorème,

$$AB . OC' . CA' = BA' . CO . AC'.$$

Multipliant membre à membre ces deux égalités, on trouve

$$AB' . CA' . BC' = BA' . CB' . AC'.$$

Remarques. I. La réciproque de ce théorème est vraie.

II. On conclut, de cette réciproque, que *les médianes d'un triangle se coupent en un même point*, et qu'il en est de même pour *les bissectrices intérieures*, pour *les trois hauteurs*, pour *les droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés avec le cercle inscrit,* etc.

Théorème X.

Si les droites qui joignent les sommets correspondants de deux triangles se coupent en un même point, les points de concours des côtés opposés sont en ligne droite (*).

Fig. 108. Soient ABC, A′B′C′ les deux triangles, et soit O le point de concours des droites qui joignent les sommets correspondants. Il faut démontrer que les points M, N, P, où se coupent les côtés respectivement opposés à ces sommets, sont en ligne droite.

Le triangle OAB et la transversale A′B′P donnent, par le Théorème de Ptolémée,

$$OA' . AP . BB' = OB' . BP . AA'.$$

Le triangle OBC et la transversale B′C′M donnent, semblablement,

$$OB' . BM . CC' = OC' . CM . BB'.$$

(*) Théorème attribué à Desargues.

Enfin, le triangle ABC et la transversale A'C'N :

$$OC' \,.\, CN \,.\, AA' = OA' \,.\, AN \,.\, CC'.$$

Multipliant ces égalités membre à membre, on obtient

$$AP \,.\, BM \,.\, CN = BP \,.\, CM \,.\, AN.$$

Donc les points M, N, P sont en ligne droite.

Remarques. I. La réciproque du théorème est vraie.

II. Les triangles ABC, A'B'C' sont dits *homologiques ;* O est un centre d'homologie; PMN est un axe d'homologie.

Théorème XI.

Si les côtés d'un polygone quelconque sont coupés par une transversale, le produit des segments non consécutifs est égal au produit des autres segments.

Soit ABC... un polygone, dont les côtés sont coupés en M, N, P... par la transversale MQ. Il s'agit de démontrer que Fig. 106.

$$AN \,.\, BN \,.\, CP \,.\, DQ \,.\, ER \,.\, FS = AS \,.\, BM \,.\, CN \,.\, DP \,.\, EQ \,.\, FR.$$

Décomposons le polygone en triangles, au moyen des diagonales BD, BE, BF. Nous aurons (Th. VIII)

$$AM \,.\, BX \,.\, FS = AS \,.\, BM \,.\, FX;$$
$$BY \,.\, ER \,.\, FX = BX \,.\, EY \,.\, FR;$$
$$BZ \,.\, DQ \,.\, EY = BY \,.\, EQ \,.\, DZ;$$
$$BN \,.\, CP \,.\, DZ = BZ \,.\, DP \,.\, CN.$$

Multipliant membre à membre, et supprimant les facteurs communs, on obtient la relation ci-dessus.

Théorème XII.

Si, par un point O, pris dans le plan d'un polygone quelconque d'un nombre impair de côtés, on mène à chaque sommet une droite qui partage en deux segments le côté opposé, le produit des segments qui n'ont pas d'extrémités communes est égal au produit des autres segments (*).

FIG. 372. Soit, pour fixer les idées, le pentagone ABCDE. Il s'agit de démontrer que

$$AD' \,.\, BE' \,.\, CA' \,.\, DB' \,.\, EC' = BD' \,.\, CE' \,.\, DA' \,.\, EB' \,.\, AC'. \quad (1)$$

Remarquons d'abord que les deux triangles AOD', DOA' ayant un angle égal,

G., 277.

$$\frac{AOD'}{DOA'} = \frac{OA}{OA'} \cdot \frac{OD'}{OD}.$$

De même,

$$\frac{BOD'}{DOB'} = \frac{OB}{OB'} \cdot \frac{OD'}{OD}.$$

Conséquemment,

$$\frac{AOD'}{BOD'} : \frac{DOA'}{DOB'} = \frac{OA}{OA'} : \frac{OB}{OB'}. \quad (2)$$

En second lieu, les triangles AOD', BOD' ont même hauteur; donc

$$\frac{AOD'}{BOD'} = \frac{AD'}{BD'}. \quad (3)$$

Enfin, si nous abaissons OM, ON respectivement perpendiculaires à DC, DB, nous aurons aussi

$$\frac{DOA'}{DOB'} = \frac{DA'}{DB'} \cdot \frac{OM}{ON}. \quad (4)$$

(*) Cette généralisation du Théorème de J. Bernoulli est due à Poncelet.

La relation (2) devient donc

$$\frac{AD'}{BD'} : \frac{DA'}{DB'} \cdot \frac{OM}{ON} = \frac{OA}{OA'} : \frac{OB}{OB'};$$

ou

$$OM \cdot \frac{OA}{OA'} \cdot \frac{DA'}{AD'} = ON \cdot \frac{OB}{OB'} \cdot \frac{DB'}{BD'}. \qquad (5)$$

De là résulte, par une *permutation tournante :*

$$\left.\begin{array}{l} ON \cdot \dfrac{OB}{OB'} \cdot \dfrac{EB'}{BE'} = OP \cdot \dfrac{OC}{OC'} \cdot \dfrac{EC'}{CE'}, \\ OP \cdot \dfrac{OC}{OC'} \cdot \dfrac{AC'}{CA'} = OQ \cdot \dfrac{OD}{OD'} \cdot \dfrac{AD'}{DA'}, \\ OQ \cdot \dfrac{OD}{OD'} \cdot \dfrac{BD'}{DB'} = OR \cdot \dfrac{OE}{OE'} \cdot \dfrac{BE'}{EB'}, \\ OR \cdot \dfrac{OE}{OE'} \cdot \dfrac{CE'}{EC,} = OM \cdot \dfrac{OA}{OA'} \cdot \dfrac{CA'}{AC'}. \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Multipliant membre à membre les égalités (5) et (6), et supprimant les facteurs communs, on trouve

$$\frac{DA'}{AD'} \cdot \frac{EB'}{BE'} \cdot \frac{AC'}{CA'} \cdot \frac{BD'}{DB'} \cdot \frac{CE'}{EC'} = \frac{DB'}{BD'} \cdot \frac{EC'}{CE'} \cdot \frac{AD'}{DA'} \cdot \frac{BE'}{EB'} \cdot \frac{CA'}{AC'};$$

ou

$$(DA' \cdot EB' \cdot AC' \cdot BD' \cdot CE')^2 = (DB' \cdot EC' \cdot AD' \cdot BE' \cdot CA')^2;$$

etc. (*)

Théorème XIII.

Si l'on considère, sur les côtés du triangle ayant pour sommets les centres C, C′, C″ de trois circonférences, les trois centres de similitude internes I, I′, I″ et les trois centres de similitude externes E, E′, E″ : 1° les trois centres internes sont en involution; 2° deux centres internes et un centre externe sont en involution.

On sait que le centre I″ de similitude interne de deux FIG. 103.

(*) L'emploi des *sinus* simplifie beaucoup la démonstration. (Voyez le *Traité des Propriétés projectives,* du général Poncelet.)

G., 134. circonférences divise la ligne des centres CC′ en deux segments *additifs* CI″, C′I″, proportionnels aux rayons R, R′.

Semblablement, le centre de similitude externe E″ partage la droite CC′ en deux segments *soustractifs* CE″, C′E″, proportionnels à R, R′.

Cela posé, il faut démontrer que

$$1^{\circ} \qquad CI'' \,.\, C'I \,.\, C''I' = CI' \,.\, C''I \,.\, C'I'';$$

$$2^{\circ} \qquad CE'' \,.\, C'I \,.\, C''I' = CI' \,.\, C''I \,.\, C'E''.$$

Or, ces relations deviennent évidentes si l'on multiplie terme à terme les proportions

$$\frac{CI''}{CI'''} = \frac{R}{R'}, \qquad \frac{C'I}{C''I} = \frac{R'}{R''}, \qquad \frac{C''I'}{CI'} = \frac{R''}{R};$$

ou si l'on multiplie celles-ci :

$$\frac{CE''}{C'E''} = \frac{R}{R'}, \qquad \frac{C'I}{C''I} = \frac{R'}{R''}, \qquad \frac{C''I'}{CI'} = \frac{R''}{R}.$$

On voit donc que : 1° *les droites* CI, C′I′, C″I″ *concourent en un même point* P ; 2° *les points* I, I′, E″ *sont en ligne droite.*

On démontrerait, de la même manière, que les points I, I″, E′, sont en ligne droite, ainsi que les points I′, I″, E.

Fig. 104. *Remarques.* I. On dit qu'une droite AB est partagée *harmoniquement* aux points C, D, lorsque les *segments additifs* AC, BC sont proportionnels aux *segments soustractifs* AD, BD; c'est-à-dire lorsque l'on a

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}.$$

II. Les points C, D sont dits *conjugués harmoniques.* Il en est de même des points A, B, parce que *la droite* CD *est partagée harmoniquement en* A, B.

III. En adoptant ces définitions, on conclut que *les bis-*

sectrices de l'angle d'un triangle partagent harmoniquement le côté opposé, et que *les centres de similitude de deux circonférences partagent harmoniquement la distance des centres.*

IV. Plus généralement, d'après les Théorèmes VIII et IX, *si l'on joint les sommets d'un triangle à un point* O, *par les transversales* AA′, BB′, CC′, *et que l'on mène ensuite la transversale* B′A′C″, *les points* C′, C″ *partagent harmoniquement la base* AB. FIG. 105.

V. Cette remarque donne le moyen de construire, *avec la règle seulement,* le conjugué harmonique C″ d'un point C′.

Théorème XIV.

Toute parallèle à l'un des rayons d'un faisceau harmonique est partagée en deux parties égales par les trois autres rayons.

Lorsque, après avoir partagé harmoniquement une droite AB par les points C, D, on joint A, B, C, D avec un point quelconque O, les quatre droites OA, OB, OC, OD forment ce qu'on appelle un *faisceau harmonique.* FIG. 107.

Cette définition étant admise, menons, par le point B, MN parallèle à OA; nous aurons

$$BM = AO \cdot \frac{BD}{AD}, \qquad BN = AO \cdot \frac{BC}{AC}.$$

Mais

$$\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC};$$

donc

$$BM = BN.$$

RÉCIPROQUE. *Si, par le sommet d'un triangle, on mène une médiane et la parallèle à la base correspon-*

dante, ces deux droites sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux autres côtés du triangle.

Théorème XV.

Si l'on mène, dans un faisceau harmonique, une transversale quelconque, elle est coupée harmoniquement par les quatre rayons.

Ce théorème est évident par celui qui précède.

Théorème XVI.

Deux points réciproques quelconques C, D partagent harmoniquement le diamètre AB qui les contient.

FIG. 112. Deux points C, D, situés sur un diamètre AB, et d'un même côté par rapport au centre O, sont dits *réciproques*, lorsque *le rectangle de leurs distances au centre est équivalent au carré du rayon ;* c'est-à-dire lorsque l'on a

$$OC \, . \, OD = \overline{OB}^2.$$

Il est évident, d'après cette définition, que si le point C est intérieur au cercle, son *conjugué* D est extérieur.

Cela posé, il s'agit de démontrer la proportion

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD},$$

ou, ce qui est la même chose, la proportion

$$\frac{BO + OC}{BO - OC} = \frac{OD + BO}{OD - BO}.$$

Or, celle-ci équivaut à la suivante :

$$\frac{BO}{OC} = \frac{OD}{BO},$$

laquelle donne

$$OC \, . \, OD = \overline{OB}^2.$$

Remarque. L'énoncé peut être ainsi modifié :

Lorsqu'une droite AB *est partagée harmoniquement en* C, D, *la moitié de cette droite est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu aux points* C, D.

Théorème XVII.

Lorsqu'une droite AB est partagée harmoniquement en C, D, la circonférence décrite sur AB comme diamètre coupe orthogonalement toutes les circonférences passant par les points C, D.

Soit M l'un des points d'intersection des deux circonférences. D'après le théorème précédent, le rayon OM est moyen proportionnel entre OC et OD : ce rayon est donc tangent, en M, à la circonférence CD. En d'autres termes, *les tangentes* MO, MO′ *aux circonférences* CD, AB, *sont perpendiculaires entre elles.* C'est ce qu'on exprime en disant que les circonférences sont *orthogonales.* FIG. 373.

Remarques. I. Si, laissant les points C, D fixes, on fait varier les points A, B, les circonférences décrites sur les droites AB, A′B′, A″B″... prises comme diamètres, coupent orthogonalement toutes les circonférences passant par les points C, D (*).

II. Cette considération des systèmes de cercles orthogonaux sert de base à la *projection stéréographique* (**).

(*) On peut démontrer qu'*il n'existe pas, dans un plan, de systèmes de cercles orthogonaux autres que ceux qui résultent de cette construction* (*Journal de Liouville,* tome XIX).

(**) (*Manuel du Baccalauréat. — Cosmographie*).

Théorème XVIII.

Les distances d'un point quelconque M d'une circonférence, à deux points réciproques C, D, sont dans un rapport constant.

FIG. 113. Les droites MA, MC, MB, MD forment un faisceau harmonique, dans lequel les rayons conjugués MA, MB sont perpendiculaires entre eux. Donc, d'après le Théorème XIII (*Rem.* III), ces droites sont les bissectrices des angles formés par MC, MD. Conséquemment,

$$\frac{MC}{MD} = \frac{BC}{BD}.$$

Théorème XIX.

Le sommet D d'un angle circonscrit EDF a pour polaire la corde de contact EF.

FIG. 114. On appelle *polaire* d'un point D, par rapport à un cercle O, la perpendiculaire au diamètre OD, menée par le conjugué du point D. Réciproquement, D est le *pôle* de la perpendiculaire.

Cette définition étant admise, le théorème énoncé consiste en ce que le point C, où EF coupe OD, est le conjugué du point D.

Or, le rayon OE est moyen proportionnel entre l'hypoténuse OD et le segment OC ; donc

$$OC \cdot OD = \overline{OB}^2.$$

Théorème XX.

Le pôle N de toute droite GH passant par un point C est sur la polaire EF de ce point.

FIG. 115. Le pôle de la droite GH est situé sur OM, perpendiculaire à GH. Il faut donc, pour démontrer le théorème, faire voir

que le point N, où les droites OM, EF se coupent, est conjugué de M. Or, les triangles rectangles OMC, ODN, sont semblables; donc

$$OM.ON = OC.OD.$$

Mais, les points C, D étant réciproques, on a

$$OC \cdot OD = \overline{OB}^2;$$

donc aussi

$$OM \cdot ON = \overline{OB}^2.$$

Théorème XXI.

La polaire de tout point pris sur une droite passe par le pôle de cette droite.

Cette proposition est la réciproque évidente du Théorème XX. Dans le cas où la droite AB est extérieure à la circonférence O, on peut remplacer l'énoncé par celui-ci :

Si, par différents points C, C′, C″.... *pris sur une droite* AB, *on mène des tangentes à une circonférence* O, *les cordes de contact* DE, D′E′,... *passent toutes par un même point* P. FIG. 116.

Théorème XXII.

Toute corde FG, menée par un point P, est divisée harmoniquement par ce point et par sa polaire BC.

Les points A, P étant réciproques, on a (Th. XVIII) FIG. 117.

$$\frac{AF}{PF} = \frac{AG}{PG},$$

ou

$$\frac{AF}{AG} = \frac{PF}{PG}.$$

Cette proportion exprime que AP est la bissectrice de l'angle FAG. Et comme BC est perpendiculaire à AP, les quatre droites AP, AB, AF, AG forment un faisceau harmonique (Th. XIII, Rem. III).

Théorème XXIII.

Étant donné un polygone P, on peut toujours construire un polygone P′ tel, que les sommets de l'un des polygones soient les pôles des côtés de l'autre, relativement à un cercle donné O.

FIG. 87. Supposons, pour fixer les idées, que le polygone P soit un quadrilatère ABCD. Soient A′, B′, C′, D′ les pôles des côtés de cette figure. La droite A′B′, qui joint le pôle de AB au pôle de BC, est la polaire de B (Th. XX), etc. Donc les deux quadrilatères ABCD, A′B′C′D′ jouissent des propriétés énoncées.

Remarques. I. En général, les polygones P, P′ sont dits *polaires réciproques* par rapport au *cercle directeur* O.

II. La *théorie des polaires réciproques,* due, en grande partie à l'illustre Poncelet, *double* le nombre des théorèmes de la Géométrie ; c'est-à-dire qu'un théorème *de situation* (*) étant admis, la considération des polaires réciproques en donne immédiatement un autre, *corrélatif* du premier. Soit, par exemple, ce théorème très-simple : *les hauteurs* AM, BN, CP *d'un triangle* ABC *se coupent en un même point* I (I, Th. I).

FIG. 265. Construisons la polaire réciproque de la figure, relativement à un cercle ayant pour centre le point arbitraire O ; et soient A′, B′, C′ les pôles des côtés BC, CA, AB.

FIG. 266. Le pôle de AM est situé sur B′C′, polaire de A. De plus, il est visible que *les pôles de deux droites perpendiculaires entre elles sont situés sur deux rayons perpendi-*

(*) M. *Mannheim,* professeur à l'École polytechnique. est parvenu à étendre, aux *propriétés numériques des figures,* l'application du principe des polaires réciproques.

culaires entre eux. Donc le pôle de AM doit aussi se trouver sur OM′ perpendiculaire à OA′ ; donc il est en M′.

Une construction semblable donne les pôles N′, P′ des droites BN, CP. Et comme AM, BN, CP se coupent en I, les pôles de ces lignes sont situés sur une même droite, polaire de I.

Conséquemment :

Théorème XXIV.

Si, d'un point quelconque O, on mène des droites aux sommets d'un triangle A′B′C′, et des perpendiculaires à ces droites ; qu'on prolonge chaque perpendiculaire jusqu'à ce qu'elle rencontre le côté opposé au sommet correspondant ; les points M′, N′, P′, ainsi obtenus, sont sur une même droite.

Théorème XXV.

Dans tout hexagone ABCDEF inscrit au cercle, les points de concours I, G, H, des côtés opposés, sont sur une même droite.

Ce théorème, l'un des plus féconds de la Géométrie, est dû à Pascal (*). On le démontre facilement comme il suit :

Prolongeons les côtés, de deux en deux, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent aux points L, M, N. Nous aurons, par la propriété des droites qui se coupent hors d'un cercle : FIG. 120.

$$\begin{aligned} LA \,.\, LF &= LB \,.\, LC, \\ MC \,.\, MB &= MD \,.\, ME, \\ NE \,.\, ND &= NF \,.\, NA. \end{aligned}$$ G., 238.

D'un autre côté, le triangle LMN, coupé par les trans-

(*) On peut voir, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. XI), une analyse des travaux auxquels a donné lieu l'*Hexagramme mystique* de Pascal. Quand il fit connaître son théorème, cet homme extraordinaire avait à peine dix sept ans !

versales AG, DI, FH, donne (Th. VIII) :

$$LB . MG . NA = MB . NG . LA,$$
$$MD . NI . LC = ND . LI . MC,$$
$$ME . NF . LH = NE . LF . MH.$$

Multipliant ces six égalités membre à membre, et supprimant les facteurs communs, il nous vient

$$MG . NI . LH = NG . LI . MH.$$

Donc (Th. VIII, Rem. II) les trois points G, H, I sont sur une même droite.

Remarques (*). I. Ce théorème n'est pas seulement applicable à un hexagone convexe, comme celui de la figure. Les côtés pourraient s'entre-croiser et les sommets se succéder sur la circonférence dans un ordre quelconque, ce qui fournirait soixante hexagones différents (**) (dont un seul convexe) ayant les mêmes sommets. On obtiendrait ainsi soixante groupes différents de trois points situés en ligne droite. Toutefois, cela ne donnerait pas cent quatre-vingts points différents ; car, par les six points de la circonférence, en les prenant deux à deux, on ne peut faire passer que quinze droites ; chacune de ces quinze droites en rencontre huit aux deux sommets par lesquels elle passe ; restent donc, pour chacune, six points d'intersection non situés sur la circonfé-

---

(*) Tirées du *Cours de Géométrie* de Vincent (2e édition).

(**) En effet, on peut supposer que le premier sommet soit A ; et alors le nombre des hexagones est celui des permutations des cinq lettres B, C, D, E, F, c'est-à-dire 120. Mais il est visible que chaque hexagone a été compté deux fois : par exemple, ABCDEF et AFEDCB coïncident. Le nombre précédent doit donc être divisé par 2.

rence (*) ; ce qui donne quarante-cinq points en tout pour fournir les soixante groupes ci-dessus (**).

II. On peut supposer qu'un ou plusieurs côtés de l'hexagone inscrit, indéfiniment prolongés, deviennent des tangentes. De là résultent divers corollaires ou théorèmes relatifs au pentagone, au quadrilatère et au triangle inscrit. Nous allons en donner les énoncés, en observant qu'ils sont susceptibles du même genre d'extension que le Théorème de Pascal.

Théorème XXVI.

Dans tout pentagone inscrit, les points de concours de deux paires de côtés non consécutifs quelconques, et celui du cinquième côté avec la tangente au sommet opposé, sont tous trois en ligne droite.

Théorème XXVII.

Dans tout quadrilatère inscrit, les points de concours des côtés opposés, et ceux des tangentes aux sommets opposés, pris deux à deux, sont tous quatre en ligne droite.

Théorème XXVIII.

Dans tout quadrilatère inscrit, le point de concours de deux côtés opposés, et les points de concours des tangentes menées aux extrémités de l'un de ces deux côtés, avec les deux autres, sont tous trois en ligne droite.

Théorème XXIX.

Dans tout triangle inscrit, les points de concours des côtés avec les tangentes aux sommets opposés, sont sur une même droite.

(*) Si l'on considère les sommets C, D, E, F, les droites qui les joignent deux à deux sont au nombre de six; par conséquent, *sur le côté* AB, *il y a six points d'intersection non situés sur la circonférence.*

(**) Un point étant situé sur deux droites, le nombre des points est $\frac{15 \cdot 6}{2} = 45$.

Théorème XXX.

Dans tout hexagone *abcdef* circonscrit au cercle, les diagonales menées par les sommets opposés se coupent en un même point.

FIG. 121. Si l'on trace les cordes de contact AB, BC,... elles formeront un hexagone inscrit ABCDEF. Les côtés de cet hexagone ont pour pôles les sommets correspondants de l'hexagone circonscrit. Si l'on mène *be*, le pôle de cette droite doit se trouver sur la polaire de *b* et sur la polaire de *e*; donc il est en G. De même, les pôles des deux autres diagonales *ad*, *cf*, sont les points I, H. Donc, les points G, I, H étant sur une ligne droite, leurs polaires concourent en un même point P (Th. XXI).

Remarque. Ce dernier théorème, découvert par M. Brianchon, est un *corrélatif* du Théorème de Pascal (Th. XXIII, Rem. II). Il donne lieu, comme celui-ci, à un grand nombre de corollaires, parmi lesquels nous énoncerons les quatre théorèmes suivants :

Théorème XXXI.

Dans tout pentagone circonscrit, les diagonales menées par deux paires de sommets non consécutifs quelconques, et la droite qui joint le cinquième sommet au point de contact du côté opposé, concourent toutes trois en un même point.

Théorème XXXII.

Dans tout quadrilatère circonscrit, les droites menées par les points de contact des côtés opposés, et les diagonales, concourent en un même point.

Théorème XXXIII.

Dans tout quadrilatère circonscrit, la droite menée par les sommets de deux angles opposés, et les droites qui joignent les points de contact des côtés formant l'un de ces angles, avec les deux autres sommets, concourent toutes trois en un même point.

Théorème XXXIV.

Dans tout triangle circonscrit, les droites menées des sommets aux points de contact opposés concourent en un même point.

Théorème XXXV.

Le lieu géométrique des points M d'égale puissance par rapport à deux circonférences O,O′, est une perpendiculaire MN à la ligne des centres.

On appelle *puissance* d'un point, par rapport à une circonférence, le rectangle constant des segments additifs ou soustractifs que forme ce point sur toute corde qui le contient.

Par exemple, dans la figure 116, PD . PE est la puissance du point P. De même, dans la figure 120, LA . LF est la puissance du point L.

D'après cette définition, il est évident que : 1° la ligne cherchée se confond avec le lieu des points d'où l'on peut mener, aux deux circonférences, des tangentes MT, MT′, FIG. 122.
égales entre elles ; 2° si les circonférences sont tangentes ou sécantes, le lieu géométrique dont il s'agit est la tangente commune ou la corde commune.

Considérons donc le cas où les circonférences seraient extérieures ou intérieures.

Abaissons MP perpendiculaire à OO′, et menons MO, MO′. Nous aurons

$$\overline{MT}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OT}^2, \qquad \overline{MT'}^2 = \overline{O'M}^2 - \overline{O'T'}^2\ ;$$

d'où, à cause de MT = MT′, et en appelant R, R′ les deux rayons,

$$\overline{OM}^2 - R^2 = \overline{O'M}^2 - R'^2.$$

Or,

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{MP}^2, \qquad \overline{O'M}^2 = \overline{O'P}^2 + \overline{M'P}^2\ ;$$

donc

$$\overline{OP}^2 - R^2 = \overline{O'P}^2 - R'^2.$$

Cette égalité donne

$$\overline{OP}^2 - \overline{O'P}^2 = R^2 - R'^2,$$

ou

$$(OP + O'P)(OP - O'P) = (R + R')(R - R');$$

ou encore, à cause de $OP + O'P = OO'$:

$$OP - O'P = \frac{(R + R')(R - R')}{OO'}.$$

Ainsi, la position du point P est indépendante de celle du point M : tous les points du lieu cherché ayant même projection sur OO′, ce lieu est précisément la perpendiculaire MP.

Remarques. I. La droite MN est appelée *axe radical* des circonférences O, O′ (*).

II. D'après la valeur trouvée pour $OP - OP'$, on voit que si R surpasse R′, OP doit surpasser O′P. Ainsi, *l'axe radical est plus près du centre de la petite circonférence que du centre de la grande.*

III. De

$$\overline{OP}^2 - R^2 = \overline{O'P}^2 - R'^2,$$

on déduit

$$(OP + R)(OP - R) = (O'P + R')(O'P - R'),$$

ou

$$(OP + R) . AP = (O'P + R') A'P.$$

Nous avons supposé $R > R'$, d'où nous avons conclu $OP > O'P$. Donc, par compensation, $AP < A'P$. C'est-à-dire que *l'axe radical est plus près de la grande circonférence que de la petite.*

(*) La théorie des axes radicaux est due à Gaultier (de Tours) (*Journal de l'Ecole polytechnique*, 16e Cahier).

Théorème XXXVI.

Les axes radicaux de trois circonférences, considérées deux à deux, se coupent en un même point.

Les axes radicaux MN, M'N' se coupent en un point tel, que si l'on mène de ce point les tangentes CT, CT', CT'', on aura, en même temps, CT' = CT'', CT'' = CT. Donc CT' = CT; donc le point C est situé sur l'axe radical M''N''. FIG. 123.

Remarques. I. Le point C est le *centre radical* des trois circonférences.

II. Pour trouver l'axe radical de deux circonférences C, C' qui n'ont aucun point commun, il suffit de les couper par une circonférence auxiliaire C'', puis d'abaisser, par le point de rencontre des cordes communes, une perpendiculaire sur la droite qui joint les centres des circonférences C, C'.

III. *Si trois circonférences se coupent deux à deux, les trois cordes communes se coupent en un même point; si trois circonférences se touchent deux à deux, les trois tangentes communes se coupent en un même point*; etc.

Théorème XXXVII.

Le lieu des centres M des circonférences qui coupent orthogonalement deux cercles donnés O, O', est l'axe radical de ces cercles.

Si les circonférences O, M se coupent orthogonalement en T, les rayons OT, O'T' sont perpendiculaires entre eux : MT est une tangente à la circonférence O. Pour la même raison, le rayon MT' est tangent à la circonférence O'. Mais MT = MT'; donc le lieu des centres M coïncide avec le lieu des points d'où l'on peut mener, aux circon- FIG. 374

férences O, O′, des tangentes égales entre elles. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Cette proposition, combinée avec le Théorème XVII, conduit à diverses conséquences, parmi lesquelles nous énoncerons celles-ci :

1° *Si les cercles* O, O′ *n'ont aucun point commun, les circonférences* M, M′, M″, ..., *qui les coupent orthogonalement, passent toutes par deux points fixes* F, F′, *situés sur la ligne des centres* OO′, *et également distants de l'axe radical* MP. *Ces points* F, F′ *divisent harmoniquement le diamètre* AB *du cercle* O, *et le diamètre* A′B′ *du cercle* O′.

2° *Lorsque les circonférences* O, O′ *se touchent en un point* C, *les circonférences* M *passent toutes par le point de contact* C.

3° *Si les circonférences* O, O′ *sont sécantes, les circonférences qui les coupent orthogonalement n'ont aucun point commun; de plus, ces circonférences* M, M′, M″, ... *ne rencontrent pas la ligne* OO′ *des centres.*

4° *Cette ligne des centres est, dans tous les cas, l'axe radical des circonférences* M, M′, M″, ... *considérées deux à deux.*

5° *Les circonférences* M, M′, M″, ... *sont orthogonales, non-seulement par rapport aux cercles donnés, mais encore relativement à toutes les circonférences qui, considérées deux à deux, ont même ligne des centres et même axe radical que les cercles donnés* (*).

(*) Lorsque plusieurs circonférences, considérées deux à deux, auront même ligne des centres et même axe radical, nous dirons, pour abréger, qu'elles ont *même axe*.

Théorème XXXVIII.

L'axe radical de deux cercles est également distant des deux polaires de chaque centre de similitude.

La proposition est vraie lorsque les deux cercles ont des tangentes communes; car le milieu de chacune de ces droites est sur l'axe radical; et les extrémités de la tangente, c'est-à-dire les points de contact, appartiennent aux polaires du centre de similitude par lequel passe cette même tangente.

Dans tout autre cas, le théorème subsiste. En effet, les relations qui déterminent les centres de similitude, leurs polaires, et les axes radicaux, sont indépendantes des grandeurs et des positions relatives des deux cercles.

Théorème XXXIX.

Le centre radical de trois cercles O, O′, O″ est le centre commun des huit hexagones ayant pour côtés les polaires des six centres de similitude, pris trois à trois.

Soient, pour fixer les idées :

C	le centre de similitude directe	des cercles	O′, O″;
C′	—	—	O″, O;
C″	—	—	O, O′.

Soient, par suite :

P, Q	les polaires du point	C,	relativement aux centres	O′, O″;
P′, Q′	—	C′,	—	O″, O;
P″, Q″	—	C″,	—	O, O′.

Les six droites P, Q, P′, Q′, P″, Q″ déterminent un hexagone dont les côtés sont parallèles deux à deux.

Remarquons maintenant que, d'après le théorème précédent, le centre radical I est également distant des côtés opposés de l'hexagone. De là résulte que les côtés et les sommets de cette figure sont deux à deux symétriques par rapport au point I : c'est ce que l'on exprime en disant que ce point est le *centre* de l'hexagone considéré.

Théorème XL.

Lorsque deux circonférences sont orthogonales, la polaire d'un point M de la première, par rapport à la seconde, passe par le point M' diamétralement opposé à M.

FIG. 375. Soit P le second point d'intersection de la circonférence C avec la droite qui joint le point M au centre O. Les circonférences étant orthogonales, on a (Th. XVII)

$$OP \,.\, OM = \overline{OA}^2 ;$$

en sorte que les points M, P sont réciproques. Donc la polaire de M passe au point P. Et comme l'angle MPM' est droit, cette polaire est PM'.

Théorème XLI.

Le lieu des points réciproques d'un point donné M, relativement à toutes les circonférences ayant même axe, est la circonférence orthogonale aux circonférences données, passant par le point M.

Supposons, dans la démonstration précédente, le point M fixe, ainsi que la circonférence CM. Si la circonférence O se déplace, en restant orthogonale au cercle C, de manière que le centre O décrive une droite OX, la perpendiculaire CD à OX sera l'axe radical commun à toutes les circonférences O, considérées deux à deux (*). Pendant ce mouvement du cercle O, le point P, réciproque de M, décrit la circonférence CM. C'est ce qu'il fallait démontrer.

(*) Voir la note de la page 88.

Théorème XLII.

1° Le lieu des points M tels, que les polaires de chacun d'eux, par rapport à trois cercles donnés C, C′, C″, se coupent en un même point P, est la circonférence O, orthogonale à ces cercles; 2° le lieu des points P est la même circonférence O; 3° le centre de cette circonférence est le centre radical des cercles donnés; 4° les points M, P sont diamétralement opposés (*).

Nous laissons au lecteur le soin de développer la démonstration : elle ne présente aucune difficulté. Il en est de même pour la proposition suivante, due à M. le capitaine *Faure*.

Théorème XLIII.

Trois cercles étant donnés, si l'on trace une circonférence ayant même axe que deux d'entre eux et touchant le troisième, les six points de contact ainsi obtenus coïncident avec les points où les circonférences données coupent la circonférence orthogonale.

Théorème XLIV.

Le point de rencontre O des hauteurs d'un triangle ABC est: 1° le centre radical des circonférences ayant pour diamètres les côtés du triangle; 2° le centre radical des circonférences ayant pour diamètres les segments OA, OB, OC des hauteurs.

1° Les circonférences décrites sur AC et BC passent par le point C′ ; donc leur axe radical est CC′ ; etc. FIG. 357.

2° Même démonstration.

Remarque. A cause de la première partie du théorème, on a

$$OA . OA' = OB . OB' = OC . OC'.$$

(*) Théorème de J.-B. Durrande (*Annales de Gergonne*, t. XVI).

Théorème XLV.

Dans tout quadrilatère complet, les circonférences décrites sur les diagonales BE, CD, AF comme diamètres, étant prises deux à deux, ont même axe radical.

FIG. 358. Les cordes CG, HE, AI, respectivement perpendiculaires à DG, BH, FI, sont les hauteurs du triangle AEC : donc elles concourent en un point L ; et, à cause des quadrilatères inscriptibles HCGE, HEAI, AICG, on a

$$LC . LG = LH . LE = LA . LI.$$

Par conséquent, le point de rencontre L des hauteurs du triangle AEC appartient aux axes radicaux des circonférences CD, HE, AF, prises deux à deux.

De même, *les points de rencontre* M, N, P, relatifs aux triangles ABD, DEF, BCF, appartiennent, chacun, aux mêmes axes radicaux ; donc ceux-ci sont confondus en une seule droite LMNP (*).

Théorème XLVI.

Les points de rencontre des hauteurs des triangles déterminés par les côtés d'un quadrilatère complet sont situés sur une même droite.

Ce théorème est compris dans celui que nous venons de démontrer.

Théorème XLVII.

Dans tout quadrilatère complet, les milieux O, O′, O″ des trois diagonales sont en ligne droite.

FIG. 358. En effet, les trois *lignes des centres* OO′, O′O″, O″O sont perpendiculaires à l'axe radical commun LMNP ; donc elles coïncident en direction.

(*) Si les points M, N, P pouvaient coïncider avec L, on devrait seulement conclure, comme dans le théorème précédent, que le point L est le centre radical des trois circonférences.

Remarques. I. Ce théorème peut être démontré directement.

II. Les points O, O′, O″ étant les milieux respectifs des droites BE, CD, AF, il s'ensuit que la droite des centres est un *axe des moyennes distances* relativement aux six sommets A, B, C, D, E, F du quadrilatère (*).

Théorème XLVIII.

Si, d'un point quelconque O, on mène des droites aux sommets d'un quadrilatère ABCD et des perpendiculaires à ces droites:

1° Les points où la perpendiculaire qui répond à un sommet coupe les droites qui joignent deux à deux les trois autres sommets sont, trois à trois, sur quatre droites $aa''a'''$, $bb'b'''$, $cc'c''$, $d'd''d'''$;

2° Ces quatre droites concourent en un même point I.

La première partie de la proposition a été démontrée ci-dessus (Th. XXIV).

Quant à la seconde partie, elle se déduit du Théorème XLVI, par le moyen des polaires réciproques. Nous laissons au lecteur le soin de développer la démonstration.

Théorème XLXIX.

Dans tout quadrilatère complet, chacune des diagonales est partagée harmoniquement par les deux autres.

Soit ABCD un quadrilatère, dont les trois diagonales sont AC, BD, EF. Pour démontrer que la diagonale EF, par exemple, est partagée harmoniquement aux points G, H, par les prolongements des deux autres diagonales, il suffit d'observer que, dans le triangle AEF, AH, DE, FB sont trois transversales menées des sommets à un même FIG. 109.

(*) Les démonstrations précédentes (Th XLV, XLVI, XLVII) ont été données par M. Mention (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XI).

point C. Donc (Th. XIII, Rem. IV) DBG et ACH partagent harmoniquement EF.

De même, dans le triangle ABD, CB, CA, BD sont trois transversales issues d'un même point C ; donc la base BD est partagée harmoniquement par les droites CA, EF, aux points I, G.

Enfin, dans le triangle ABC, DA, DB, DC sont trois transversales issues d'un même point ; donc la base AC est partagée harmoniquement par la transversale DB et par la droite EF.

Théorème L.

Dans tout quadrilatère inscrit ABCD, le point de rencontre I des diagonales AC, BD, et les points de concours P, Q des côtés opposés, forment un triangle dont chaque sommet est le pôle du côté opposé.

FIG. 118. Menons la droite PQ : cette ligne forme, avec PA, PD, PI, un faisceau harmonique (Th. XLIX), donc la corde AD est partagée harmoniquement aux points Q, E. par la même raison, la corde CB est partagée harmoniquement aux points Q, F. Les points E, F, conjugués harmoniques du point Q, appartiennent à la polaire de ce point (Th. XXII). Cette polaire est donc PI.

De même, la droite QI a pour pôle le point P.

Quant à la droite PQ, elle a pour pôle le point I, intersection de QI, polaire de P, et de PI, polaire de Q.

Remarque. Si les droites AD, BC tournent autour du point Q, les points I, P se déplacent, mais la droite PI reste fixe, attendu qu'elle est la polaire du point Q. On conclut, de cette remarque, le moyen de *construire*, *avec la règle, la polaire d'un point*.

Théorème LI.

Dans tout quadrilatère complet circonscrit ABCD, chacune des diagonales est la polaire du point d'intersection des deux autres.

Soient G, H, I, K, les points de contact des côtés du quadrilatère avec la circonférence inscrite. Construisons le quadrilatère complet ayant ces points pour sommets. FIG. 119.

D'après le théorème précédent, la droite MN, qui joint le point de rencontre des diagonales GI, KH avec le point de concours des côtés opposés IH, KG, est la polaire du point L où se coupent les côtés opposés GH, IK. Mais, d'un autre côté, les sommets B, D du quadrilatère circonscrit sont les pôles des cordes de contact GH, IK ; donc la diagonale BD est la polaire du point L ; c'est-à-dire que *les quatre points* B, D, N, M *sont en ligne droite.*

Pour la même raison, les points A, C, L, N sont en ligne droite ; et il en est de même pour les points E, F, L, M.

En outre, les points où ces droites se coupent deux à deux sont L, N, M. Donc *le point* L, *intersection des diagonales* AC, EF, *a pour polaire la diagonale* BD ; etc.

Théorème LII.

Si deux quadrilatères sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même cercle, de manière que les sommets du premier soient les points de contact des côtés du second : 1° les points de concours des côtés opposés de ces quadrilatères sont situés sur une même droite ; 2° les diagonales du quadrilatère inscrit et celles du quadrilatère circonscrit se coupent en un même point, pôle de cette droite ; 3° les points de concours des côtés opposés du quadrilatère inscrit sont situés sur les diagonales du quadrilatère circonscrit.

La démonstration de ce théorème est renfermée dans celle qui précède.

Théorème LIII.

Si une première droite EF partage proportionnellement deux côtés opposés AB, CD d'un quadrilatère ABCD, et qu'une seconde droite GH partage proportionnellement les deux autres côtés, chacune de ces droites est divisée, par l'autre, dans le même rapport que les côtés qui déterminent celles-ci.

FIG. 275. Par le point E, menons C'ED' parallèle à CD ; menons ensuite, parallèlement à EF, les droites DD', HH', CC', GG' ; enfin, tirons AD' et BC'.

Nous avons, par hypothèse,

$$\frac{AE}{BE}=\frac{DF}{CF};$$

d'où, à cause des parallèles,

$$\frac{AE}{BE}=\frac{D'E}{C'E};$$

G, 213. ainsi, les triangles AED', BEC' sont semblables, et *leurs côtés homologues* AD', BC' *sont parallèles.*

Nous avons aussi, par hypothèse,

$$\frac{AH}{BG}=\frac{DH}{CG};$$

d'où

$$\frac{AH'}{BG'}=\frac{D'H'}{C'G'}.$$

Il résulte, de cette proportion, que les points H', E, C sont en ligne droite. Donc

$$\frac{EH'}{EG'}=\frac{AE}{BE}.$$

Mais HGH'G' est un parallélogramme ; donc aussi

$$\frac{IH}{IG}=\frac{AE}{BE}=\frac{DE}{CF}.$$

On prouverait, de la même manière, que

$$\frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{IF}}=\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{DH}}=\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{CG}}.$$

COROLLAIRE I. *Si deux côtés opposés d'un quadrilatère sont divisés proportionnellement par les droites* EF, E′F′, E″F″,..... *et que chacune de ces droites soit divisée dans un rapport donné, le lieu des points de division* I, I′, I″,... *est une ligne droite.*

COROLLAIRE II. *Si une droite mobile* CD *détermine, sur deux droites données* Ax, By, *et à partir de deux points fixes* A, B, *des segments* AC, BD *dont le rapport soit donné; si, de plus, un point* M *divise, dans un rapport donné, la droite* CD, *le lieu de ce point est une ligne droite* (*). FIG. 376.

Remarques. I. O étant le sommet de l'angle formé par les droites Ax, By, prenons sur Ax une distance AG quatrième proportionnelle à BD, AC et BO : OG, c'est-à-dire Ox, sera une position de la droite mobile DC. Si donc R est le point où la droite ME, décrite par le point M, vient couper Ox, nous aurons

$$\frac{\mathrm{GR}}{\mathrm{OR}}=\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{DM}}.$$

De même, le point S, où ME rencontre Oy, est déterminé par les proportions

$$\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{BH}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BD}},\quad \frac{\mathrm{HS}}{\mathrm{OS}}=\frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{CM}}.$$

(*) Newton, *Principes Mathématiques;* traduction de M^me du Chastelet. Livre I, Lemme XXIII.

II. Si l'on suppose

$$\frac{BC}{AD}=\lambda,\ \frac{CM}{DM}=\mu,$$

on trouve aisément, à cause des relations précédentes,

$$AR=\frac{A\,.\,\mu+BO\,.\,\lambda}{1+\mu},\ BS=\frac{AR}{\lambda}.$$

Ces formules donnent lieu à une intéressante discussion.

Théorème LIV.

Fig. 377. Par le centre O d'une circonférence inscrite à un angle xAy, on élève la perpendiculaire BC à la bissectrice AO, et l'on mène ensuite une tangente quelconque DE à la circonférence : ces deux droites déterminent, sur les côtés de l'angle, des segments BD, CE dont le rectangle est constant.

Menons les droites OD, OE : il en résulte deux triangles OBD, OCE équiangles entre eux.

En effet,

$$OBD=1^d+\frac{1}{2}A=OCE,$$

et

$$BOD=ABO-\frac{1}{2}D=1^d-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}D=\frac{1}{2}E.$$

La comparaison des côtés homologues donne ensuite

$$\frac{BD}{OC}=\frac{OB}{CE};$$

puis

$$BD\,.\,CE=\overline{OB}^2.$$

Remarque. Sur la figure, le cercle O est *inscrit* au triangle ADE ; mais la démonstration et le théorème subsistent quand le cercle est *ex-inscrit*.

Théorème LV.

Les segments déterminés sur deux côtés opposés d'un quadrilatère circonscrit, par le diamètre perpendiculaire à la bissectrice de l'angle formé par ces côtés, sont inversement proportionnels.

On a, par le théorème précédent, FIG. 378.

$$AE \cdot DF = \overline{OE}^2, \qquad BE \cdot CF = \overline{OE}^2 ;$$

donc

$$\frac{AE}{BE} = \frac{CF}{DF}.$$

Théorème LVI.

Dans tout quadrilatère circonscrit, la droite MN qui joint les milieux des diagonales passe par le centre du cercle (*).

D'après le Théorème LIII, la droite MN divise en deux parties égales toutes les droites, telles que EF, satisfaisant à la condition FIG. 379.

$$\frac{AE}{BE} = \frac{CF}{DF}.$$

Or le diamètre EOF est l'une de ces droites (Th. LV) ; donc, etc. (**).

(*) Ce beau théorème, qui subsiste pour toute conique, est dû à Newton (*Principes Mathématiques*, Livre I, Lemme XXV, Corollaire 3).

(**) Cette démonstration du Théorème de Newton, remarquable par la simplicité, est celle qui a été donnée par l'immortel créateur de la Mécanique céleste. Il en existe un grand nombre d'autres (Voyez les *Annales de Gergonne*, t. XIII; les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. I et III, etc.).

Théorème LVII.

Dans tout quadrilatère circonscrit ABCD :

1° La droite MN, qui joint les milieux M, N des diagonales AC, BD, divise, en segments inversement proportionnels, les côtés opposés;

2° La partie de cette droite, comprise entre deux côtés opposés, est partagée, par le centre du cercle inscrit, proportionnellement à ces côtés;

3° Les segments de la droite MN, déterminés par l'une des diagonales et par les côtés, sont en proportion.

FIG. 380. Les diverses parties de ce théorème sont exprimées par les relations

$$\frac{AP}{BP}=\frac{CR}{DR}, \qquad \frac{AS}{DS}=\frac{CQ}{BQ};$$

$$\frac{PO}{RO}=\frac{AB}{CD}, \qquad \frac{QO}{SO}=\frac{BC}{AD};$$

$$\frac{MP}{MQ}=\frac{MR}{MS}, \qquad \frac{NP}{NQ}=\frac{NR}{NS}.$$

Elles se déduisent, presque immédiatement, des Théorèmes LIII et LVI. Pour abréger, nous omettons les démonstrations : elles ne sauraient embarrasser le lecteur.

Théorème LVIII.

Si d'un point A, pris dans le plan d'un angle yOx, on mène des transversales AB, AB′, AB″,.... les points de concours D, D′, D″..., des quadrilatères BC′, B′C″,... sont situés sur une même droite passant par le sommet O de l'angle.

FIG. 150. Dans le quadrilatère BCB′C′, la diagonale B′C est partagée harmoniquement aux points D, E (Th. XLIX) ; donc OA, Oy, OD, Ox forment un faisceau harmonique. Il en est de même pour OA, Oy, OD′, Ox. Donc les droites OD, OD′ coïncident. Ce qui démontre la proposition.

Remarques. I. Si le point A se déplace sur OA, la droite OD ne change pas. Si, au contraire, OA se déplace, OD tourne autour du point O. C'est ce qu'on exprime en disant que le point A est un *pôle* de la droite OD : celle-ci est la *polaire* du point A. De même, le point D est un pôle de OA, et cette droite est la polaire de D.

II. Dans un faisceau harmonique, tout point de l'un des rayons est un pôle du rayon conjugué, relativement à l'angle formé par les deux autres rayons.

Théorème LIX.

Si les côtés d'un triangle ABC coupent une circonférence O, de manière qu'il y ait sur chaque côté deux segments déterminés par un sommet et la courbe, le produit des six segments obtenus en faisant le tour de la figure dans un sens est égal au produit obtenu en faisant le tour en sens contraire.

On a, par la propriété des sécantes qui se coupent hors d'un cercle :

$$\begin{aligned} AP \,.\, AP' &= AN \,.\, AN', \\ BM \,.\, BM' &= BP \,.\, BP', \\ CN \,.\, CN' &= CM \,.\, CM'; \end{aligned}$$

d'où

$$AP \,.\, AP' \,.\, BM \,.\, BM' \,.\, CN \,.\, CN' = AN \,.\, AN' \,.\, CM \,.\, CM' \,.\, BP \,.\, BP'.$$

Remarque. Ce théorème, dû à *Carnot,* subsiste, comme ceux de Pascal et de Brianchon, quand on remplace la circonférence O par *une ligne quelconque du second ordre.* Il est vrai, en particulier, dans le cas où cette circonférence serait remplacée par le système de deux droites DE, FG.

Théorème LX.

Un quadrilatère ABCD étant inscrit à une circonférence O, si l'on mène une transversale XY qui rencontre la courbe en deux points, et les côtés du quadrilatère en quatre points, ces six points sont en involution : les points conjugués sont situés sur la circonférence et sur les côtés opposés du quadrilatère (*).

Avant de passer à la démonstration de ce théorème, établissons quelques définitions :

FIG. 128. 1° Lorsqu'une droite AB est partagée aux points C, D en trois segments AC, CD, BD, on donne le nom de *rapport anharmonique* à celui qui existe entre le *rectangle des segments extrêmes et le rectangle de la droite entière par le segment moyen;* c'est-à-dire que le rapport anharmonique des quatre points A, B, C, D est $\frac{AC\,.\,BD}{AB\,.\,CD}$ (**).

FIG. 129. 2° Lorsque six points A, B, C, A′, B′, C′, situés sur une droite, sont tels que le rapport anharmonique de quatre d'entre eux est égal au rapport anharmonique de leurs conjugués ou à l'inverse de celui-ci, on dit que *ces six points sont en involution.*

3° Cette dernière dénomination a été adoptée, parce que si l'on a

$$\frac{AB\,.\,B'C'}{AB'\,.\,BC'} = \frac{A'B'\,.\,BC}{A'B\,.\,B'C},$$

on a aussi, comme on peut le démontrer,

$$AB\,.\,CA'\,.\,B'C' = A'B'\,.\,C'A\,.\,BC,$$

(*) Théorème de Desargues.

(**) Il est plus exact de dire, avec M. Chasles (*Géométrie supérieure*, p. 7) : *le rapport anharmonique de quatre points est le rapport des distances de l'un des points à deux des autres, divisé par le rapport des distances du quatrième point a ces deux-là;* mais j'ai craint que cette définition générale embarrassât les commençants.

relation analogue à celles que nous avons considérées ci-dessus (Th. VII, VIII, etc.).

Cela étant, prolongeons les côtés opposés AB, CD jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en E : le Théorème de Carnot, appliqué au triangle ELL', donne

$$EB \,.\, EA \,.\, L'N \,.\, L'N' \,.\, LC \,.\, LD = EC \,.\, ED \,.\, LN \,.\, LN' \,.\, L'A \,.\, L'B.$$

Le même théorème, appliqué au triangle ELL' et au système des droites AD, BC, donne aussi

$$EC \,.\, ED \,.\, LM \,.\, LM' \,.\, L'A \,.\, L'B = EB \,.\, EA \,.\, L'M \,.\, L'M' \,.\, LC \,.\, LD.$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, et supprimant les facteurs communs, on trouve

$$L'N \,.\, L'N' \,.\, LM \,.\, LM' = LN \,.\, LN' \,.\, L'M \,.\, L'M';$$

ou

$$\frac{L'N \,.\, LM}{L'M' \,.\, LN} = \frac{LN' \,.\, L'M}{LM \,.\, L'N'}.$$

Théorème LXI.

Si l'on joint les sommets A, B, C d'un triangle à un point intérieur O, par les droites AOA', BOB', COC', on a

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1.$$

Les triangles BAC, BOC, qui ont même base BC, sont entre eux comme leurs hauteurs, ou, ainsi qu'il est aisé de le voir, comme les droites AA', OA'. Donc FIG. 124. G., 246, 256.

$$\frac{BOC}{BAC} = \frac{OA'}{AA'}.$$

De même,

$$\frac{AOC}{ABC} = \frac{OB'}{BB'}, \quad \frac{AOB}{ACB} = \frac{OC'}{CC'}.$$

Ces proportions donnent

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=\frac{BOC+AOC+AOB}{ABC}=1.$$

Théorème LXII.

Si trois droites, aboutissant en un même point O, sont coupées par deux transversales ABC, A'B'C', on a

$$\frac{AB}{A'B'}\cdot\frac{OC}{OC'}=\frac{BC}{B'C'}\cdot\frac{OA}{OA'}=\frac{AC}{A'C'}\cdot\frac{OB}{OB'}.$$

FIG. 125. Prolongeons les transversales jusqu'à leur rencontre en M : le triangle AA'M et la transversale BB'O donnent

$$AO \,.\, A'B' \,.\, MB = AB \,.\, A'O \,.\, MB'.$$

Le même triangle et la transversale CC' donnent aussi

$$AC \,.\, A'O \,.\, MC' = AO \,.\, A'C' \,.\, MC.$$

En multipliant membre à membre ces deux égalités, et supprimant les facteurs communs, nous trouvons

$$A'B' \,.\, MB \,.\, AC \,.\, MC' = AB \,.\, MB' \,.\, A'C' \,.\, MC,$$

ou

$$\frac{MB}{MB'}\cdot\frac{AC}{A'C'}=\frac{MC}{MC'}\cdot\frac{AB}{A'B'}. \qquad (1)$$

Maintenant, le Théorème VIII, appliqué aux triangles OB'C', OBC, respectivement coupés par les transversales MBC, MB'C', donne

$$MB'.CC'.OB = MC'.BB'.OC,$$
$$MB\,.CC'.OB' = MC\,.BB'.OC';$$

d'où

$$\frac{MB'}{MB}\cdot\frac{OB}{OB'}=\frac{MC'}{MC}\cdot\frac{OC}{OC'}. \qquad (2)$$

Nous obtiendrons donc, par la combinaison des relations (1) et (2), et par un simple changement de lettres,

$$\frac{AC}{A'C'} \cdot \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{OC}{OC'} = \frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{OA}{OA'} \cdot$$

Théorème LXIII.

Si d'un point O, pris dans le plan d'un triangle ABC, on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, on détermine six segments tels, que la somme des carrés de ceux qui n'ont pas d'extrémités communes est égale à la somme des carrés des autres.

Menons OA, OB, OC : nous aurons, à cause des triangles rectangles, FIG. 131.

$$\overline{OA'}^2 + \overline{A'B}^2 = \overline{OC'}^2 + \overline{C'B}^2,$$
$$\overline{OB'}^2 + \overline{B'C}^2 = \overline{OA'}^2 + \overline{A'C}^2,$$
$$\overline{OC'}^2 + \overline{C'A}^2 = \overline{OB'}^2 + \overline{BA'}^2.$$

Donc, en ajoutant membre à membre et en supprimant les termes égaux,

$$\overline{A'B}^2 + \overline{B'C}^2 + \overline{C'A}^2 = \overline{BC'}^2 + \overline{A'C}^2 + \overline{B'A}^2.$$

Théorème LXIV.

Si l'on joint le sommet A d'un triangle à un point quelconque M de la base BC, on a

$$\overline{AB}^2 \,.\, CM + \overline{AC}^2 \,.\, BM = (\overline{AM}^2 + BM \,.\, CM) \,.\, BC.$$

Abaissons AD perpendiculaire sur BC ; nous aurons, dans le triangle AMB, FIG. 132. G., 269.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - 2BM \,.\, MD\,;$$

et, dans le triangle AMC,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 + 2CM \,.\, MD.$$

Afin d'obtenir une relation indépendante de MD, multiplions la première égalité par CM, la seconde par BM, et ajoutons ; il vient

$$\overline{AB}^2 \cdot CM + \overline{AC}^2 \cdot BM = \overline{AM}^2 \cdot BC + \overline{BM}^2 \cdot CM + \overline{CM}^2 \cdot BM;$$

ou, en simplifiant,

$$\overline{AB}^2 \cdot CM + \overline{AC}^2 \cdot BM = \overline{AM}^2 \cdot BC + CM \cdot BM \cdot BC.$$

Remarques. I. Si le point M est le milieu de BC, la relation précédente devient

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AM}^2 + 2\overline{BM}^2.$$

G., 271. Celle-ci exprime un théorème connu.

II. Si la droite AM est bissectrice de l'angle A, on a

G., 233. $$\frac{BM}{AB} = \frac{CM}{AC} = \frac{BC}{AB + AC};$$

d'où

$$BM = AB \cdot \frac{BC}{AB + AC}, \qquad CM = AC \cdot \frac{BC}{AB + AC}.$$

Ces valeurs, substituées dans le premier membre de la relation générale, donnent

$$(\overline{AB}^2 \cdot AC + \overline{AC}^2 \cdot AB) \frac{BC}{AB + AC} = (\overline{AM}^2 + BM \cdot CM) BC;$$

d'où

$$\overline{AM}^2 = AB \cdot AC - BM \cdot CM.$$

Ainsi, *dans tout triangle, le carré d'une bissectrice est équivalent au rectangle des côtés adjacents, diminué du rectangle des segments déterminés, sur le troisième côté, par la bissectrice.*

G., 57. III. Ce dernier théorème peut être démontré directement.

Théorème LXV.

La somme des carrés des segments formés par deux cordes qui se coupent rectangulairement est égale au carré du diamètre.

Soient AB, CD les deux cordes : je mène BC, AD, le diamètre DOF et la corde AF. FIG. 134.

On a

$$\overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2.$$

Mais la somme des arcs AD, BC est une demi-circonférence, attendu que l'angle E est droit ; donc les arcs BC, AF sont égaux, et, par suite, leurs cordes sont égales. La relation précédente devient donc

$$\overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{DF}^2.$$

Théorème LXVI.

La somme des carrés de deux cordes perpendiculaires AB, CD est égale à huit fois le carré du rayon, moins quatre fois le carré de la distance OE′ du centre au point d'intersection des deux cordes.

On a évidemment

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 + 2AE.BE + 2CE.DE;$$ FIG. 134.

ou, en vertu du théorème précédent,

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{DF}^2 + 2(AE . BE + CE . DE).$$

Menons OG, OH perpendiculaires à CD, AB ; nous aurons

$$AE = AH + EH, \qquad BE = AH - EH;$$

d'où

$$AE . BE = \overline{AH}^2 - \overline{EH}^2.$$

De même,

$$CE . DE = \overline{DG}^2 - \overline{GE}^2.$$

L'égalité précédente devient donc

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{DF}^2 + 2\overline{AH}^2 + 2\overline{DG}^2 - 2(\overline{EH}^2 + \overline{GE}^2),$$

ou

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{DF}^2 + \frac{1}{2}(\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2) - 2\overline{OE}^2,$$

ou enfin

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 8\overline{OD}^2 - 4\overline{OE}^2.$$

Théorème LXVII.

Dans tout triangle ABC, le point H de rencontre des trois hauteurs, le centre D des moyennes distances et le centre O du cercle circonscrit sont sur une même droite. De plus, la distance DH des deux premiers points est double de la distance OD des deux derniers.

Soient E, F les milieux des côtés AB, BC. Menons EO, FO, AH, CH, CD et DE.

Les triangles AHC, FOE, sont équiangles entre eux; donc

$$\frac{CH}{EO} = \frac{AC}{EF} = 2.$$

D'un autre côté, le point D étant le centre des moyennes distances du triangle ABC, on a

$$\frac{CD}{DE} = 2.$$

Les triangles HCD, OED ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, semblables, donc les angles CDH, EDO sont égaux; et ODH est une ligne droite.

De plus,

$$HD = 2OD.$$

Théorème LXVIII.

Dans tout triangle ABC, la distance d des centres de la circonférence inscrite et de la circonférence circonscrite est moyenne proportionnelle entre le rayon R de celle-ci et l'excès de ce rayon sur le double du rayon r de la première (*).

Les droites AI, CI, bissectrices des angles A, C, divisent en deux parties égales les arcs BDC, BEA, aux points D, E. De là résulte que la somme des arcs AE, CD est égale à l'arc DBE ; et, par suite, que les angles AIE, DAE sont égaux. Donc AE = IE. FIG. 141.

Le diamètre EOF du cercle circonscrit est perpendiculaire au milieu G de AB ; conséquemment

$$\overline{AE}^2 = EF \,.\, EG,$$

ou

$$\overline{IE}^2 = 2R \,.\, EG. \qquad (1)$$

D'un autre côté, en menant IP perpendiculaire à EF, c'est-à-dire parallèle à AB, nous aurons

$$\overline{IO}^2 = \overline{IE}^2 + R^2 - 2R(EG + GP)\,;$$

ou

$$d^2 = \overline{IE}^2 + R^2 - 2R(EG + r). \qquad (2)$$

Les égalités (1) et (2), ajoutées membre à membre, donnent enfin

$$d^2 = R\,(R - 2r).$$

Remarques. I. *Le rayon* R *du cercle circonscrit ne peut être moindre que le diamètre du cercle inscrit.*

II. *Si l'on a, entre les rayons* R, r *de deux cercles, et la distance* d *de leurs centres, la relation* $d^2 = R\,(R - 2r)$,

(*) Relation trouvée par Euler.

un même triangle peut être inscrit au premier cercle, et circonscrit au second.

Cette réciproque importante se vérifie aisément au moyen de la *réduction à l'absurde.*

III. *Si deux cercles sont tels qu'un même triangle puisse être inscrit au premier cercle et circonscrit au second, il y a une infinité de triangles qui jouissent de la même propriété* (*).

Théorème LXIX.

Dans tout triangle ABC, la distance λ des centres d'une des circonférences ex-inscrites et de la circonférence circonscrite est moyenne proportionnelle entre le rayon R de celle-ci et la somme de ce rayon et du double du rayon α de la première.

FIG. 141. Le centre I' du cercle ex-inscrit opposé à l'angle A est l'intersection de la bissectrice AI et du prolongement de la corde FC, perpendiculaire à la bissectrice CIE de l'angle C. On vient de voir que les angles EAI, CII' sont égaux; donc leurs compléments IAF, II'C sont égaux; et AF = I'F. Enfin, un calcul semblable au précédent conduit à la relation :

$$\lambda^2 = R(R + 2\alpha)\,;$$

d'où l'on conclut, par un simple changement de lettres:

$$\mu^2 = R(R + 2\beta),$$
$$\nu^2 = R(R + 2\gamma).$$

(*) Poncelet a étendu ce théorème au cas d'un polygone et de deux coniques : *si un polygone de* n *côtés est inscrit à une conique et circonscrit à une conique, il y a une infinité de polygones satisfaisant à ces deux conditions.* Lorsque les coniques sont des cercles, la question est encore assez difficile pour avoir occupé divers géomètres, parmi lesquels on peut citer Euler, Fuss, Steiner, Jacobi et M. Mention.

Théorème LXX.

Dans tout triangle, la somme des carrés des distances comprises entre le centre du cercle circonscrit et les centres des cercles tangents aux trois côtés est égale à douze fois le carré du rayon du cercle circonscrit.

D'après les deux théorèmes précédents :

$$d^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 4\,R^2 + 2R\,(\alpha + \beta + \gamma - r).$$

Mais (Liv. II, Th. XVI)

$$\alpha + \beta + \gamma - r = 4\,R;$$

donc

$$d^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 12\,R^2.$$

Théorème LXXI.

Dans tout triangle, le carré de la distance D comprise entre le centre du cercle circonscrit et le centre des moyennes distances est égal au carré du rayon de ce cercle, moins le neuvième de la somme des carrés des côtés.

Le Théorème III, appliqué au triangle ABC, donne FIG. 23.

$$3R^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 + 3D^2.$$

Mais (Liv. I, Th. II)

$$AD = \frac{2}{3}AA', \qquad BD = \frac{2}{3}BB', \qquad \text{etc.};$$

donc

$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = \frac{4}{9}\left(\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2\right).$$

De plus, on sait que *la somme des carrés des médianes est les trois quarts de la somme des carrés des côtés.* G., 271.

Conséquemment

$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2);$$

et enfin

$$D^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Théorème LXXII.

Dans tout triangle, la somme des carrés des distances des sommets, au centre du cercle inscrit, est égale à la somme des carrés des côtés, augmentée de trois fois le carré du rayon du cercle inscrit, et diminuée du carré du demi-périmètre.

FIG. 45. On a, en désignant par S cette somme,

$$S = \overline{AD}^2 + \overline{BF}^2 + \overline{CF}^2 + 3r^2.$$

Mais (Liv. II, Th. XIV)

$$AD = p - a, \quad BF = p - b, \quad CF = p - c;$$

donc

$$S = (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 + 3r^2.$$

La somme des trois premiers carrés est

$$3p^2 - 2p(a+b+c) + a^2 + b^2 + c^2 = -p^2 + a^2 + b^2 + c^2;$$

donc

$$S = a^2 + b^2 + c^2 + 3r^2 - p^2.$$

Remarque. Si l'on représente par T l'aire du triangle, on a

$$T = pr, \quad T^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

G., 288.

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = -p^2 + ab + bc + ca - \frac{abc}{p}.$$

Par conséquent,

$$S = a^2 + b^2 + c^2 - 4p^2 + 3(ab + bc + ca) - 3\frac{abc}{p}$$
$$= ab + bc + ca - 3\frac{abc}{p}.$$

Enfin, si l'on a égard à la relation connue

$$R = \frac{abc}{4T},$$ G., 284.

on trouve

$$S = ab + bc + ca - 12\,Rr.$$

Ainsi :

Théorème LXXIII.

Dans tout triangle, la somme des carrés des distances des sommets, au centre du cercle inscrit, est égale à la somme des rectangles des côtés, diminuée de douze fois le rectangle des rayons du cercle inscrit et du cercle circonscrit.

Théorème LXXIV.

Dans tout triangle, la somme des carrés des distances des sommets, au centre d'un cercle ex-inscrit, est égale à douze fois le rectangle des rayons de ce cercle et du cercle circonscrit, plus le rectangle des côtés adjacents à l'angle auquel est opposé le cercle ex-inscrit, moins la somme des rectangles de chacun de ces côtés et du troisième.

Un calcul analogue à celui qui précède conduit aux relations

$$S_1 = 12\,R\alpha + bc - (b + c)a,$$
$$S_2 = 12\,R\beta + ca - (c + a)b,$$
$$S_3 = 12\,R\gamma + ab - (a + b)c.$$

Théorème LXXV.

Dans tout triangle, la somme des carrés des douze droites qui joignent les sommets aux centres des cercles tangents aux trois côtés est égale à quarante-huit fois le carré du rayon du cercle circonscrit.

En effet, à cause des deux derniers théorèmes,

$$S + S_1 + S_2 + S_3 = 12\,R(\alpha + \beta + \gamma - r).$$

Mais (Liv. II, Th. XVI)

$$\alpha + \beta + \gamma - r = 4\,R;$$

donc

$$S + S_1 + S_2 + S_3 = 48\,R^2.$$

Remarque. Nous avons trouvé (Th. LXX)

$$d^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 12\,R^2.$$

Conséquemment, *la somme des carrés des droites qui joignent les sommets d'un triangle aux centres des cercles tangents aux trois côtés est égale à quatre fois la somme des carrés des distances comprises entre les mêmes centres et celui du cercle circonscrit.*

Théorème LXXVI.

Dans tout triangle, le carré de la distance Δ comprise entre le centre du cercle inscrit et le centre des moyennes distances est égal au carré du rayon de ce cercle, augmenté des deux neuvièmes de la somme des carrés des côtés, et diminuée du douzième du carré du périmètre.

Soient I le centre du cercle inscrit, et D le centre des moyennes distances. Le Théorème III, appliqué à ce dernier point, donne

FIG. 43. $$\overline{AI}^2 + \overline{BI}^2 + \overline{CI}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 + 3\Delta^2.$$

Mais (Th. LXXI et LXXII) :

$$\overline{AI}^2 + \overline{BI}^2 + \overline{CI}^2 = S = a^2 + b^2 + c^2 + 3r^2 - p^2,$$

$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2);$$

donc

$$\Delta^2 = r^2 + \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{3}p^2.$$

Théorème LXXVII.

Dans tout triangle, le carré de la distance δ comprise entre le centre du cercle inscrit et le point de concours des hauteurs est égal à quatre fois le carré du rayon du cercle circonscrit, plus deux fois le carré du rayon du cercle inscrit, moins la demi-somme des carrés des côtés.

Soient : FIG. 43.

O le centre du cercle circonscrit ;
I le centre du cercle inscrit;
D le centre des moyennes distances ;
H le point de concours des hauteurs.

Soient encore :

$$OD = D, \quad OI = d, \quad ID = \Delta, \quad IH = \delta.$$

Le Théorème LXIV, appliqué au triangle OIH, dans lequel $DH = 2D$ (Th. LXVII), donne

$$\delta^2 + 2d^2 = 3\Delta^2 + 6D^2.$$

D'ailleurs (Th. LXVIII, LXXI, etc.) :

$$d^2 = R(R - 2r), \quad D^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$\Delta^2 = r^2 + \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{3}p^2;$$

donc

$$\delta^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2.$$

Pour simplifier le second membre, rappelons-nous que $r^2 = -p^2 + ab + bc + ca - 4Rr$ (Th. LXXII, *Rem.*); nous trouvons

$$\delta^2 = 4R^2 + 2r^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \quad (*).$$

Remarque sur les deux derniers Théorèmes. En désignant par Δ_1, Δ_2, Δ_3, δ_1, δ_2, δ_3, etc., les quantités analogues à Δ, δ, relatives aux cercles ex-inscrits, on trouve aisément les relations suivantes :

$$\Delta_1^2 = \frac{1}{3} S_1 - \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2),$$

$$\Delta_2^2 = \frac{1}{3} S_2 - \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2),$$

$$\Delta_3^2 = \frac{1}{3} S_3 - \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2),$$

$$\delta_1^2 = 4R^2 + 2\alpha^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

$$\delta_2^2 = 4R^2 + 2\beta^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

$$\delta_3^2 = 4R^2 + 2\gamma^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Théorème LXXVIII.

Dans tout triangle, les carrés des rayons des cercles tangents aux côtés, augmentés des carrés des côtés, donnent une somme égale à seize fois le carré du rayon du cercle circonscrit.

On a, par les valeurs précédentes,

$$\delta^2+\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2 = 16R^2 + 2(r^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - 2(a^2+b^2+c^2),$$

$$\Delta^2+\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2 = 16R^2 - \frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2).$$

(*) Cette formule a été donnée par M. Mention (*Nouvelles Annales*, tome V, p. 404).

Mais, par le Théorème LXIV, appliqué aux cercles ex-inscrits, on trouve

$$\delta^2+\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2=3(\Delta^2+\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2)+24D^2-24R^2$$
$$=24R^2-\frac{4}{3}(a^2+b^2+c^2)+24D^2\,;$$

ou, en remplaçant D^2 par sa valeur (Th. LXXI) :

$$\delta^2+\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2=48R^2-4(a^2+b^2+c^2).$$

Conséquemment,

$$16R^2+2(r^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-2(a^2+b^2+c^2)$$
$$=48R^2-4(a^2+b^2+c^2)\,;$$

ou,

$$r^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+a^2+b^2+c^2=16R^2.$$

Théorème LXXIX.

L'inverse du rayon du cercle inscrit à un triangle est égal à la somme des inverses des trois hauteurs.

Soient, comme précédemment, a, b, c les côtés d'un triangle ; soient a', b', c' les hauteurs correspondantes. En conservant nos autres notations, nous avons

$$2T=aa'=bb'=cc'=(a+c+b)r\,;$$

d'où

$$\frac{a}{\left(\frac{1}{a'}\right)}=\frac{b}{\left(\frac{1}{b'}\right)}=\frac{c}{\left(\frac{1}{c'}\right)}=\frac{a+b+c}{\left(\frac{1}{r}\right)}.$$

Dans cette suite de rapports égaux, le dernier antécédent est égal à la somme des trois autres ; donc

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}.$$

Remarque. On sait que *l'inverse du rayon du cercle*

inscrit est égal à la somme des inverses des rayons des
G., 289. *cercles ex-inscrits* ; donc aussi

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}.$$

Théorème LXXX.

Les circonférences circonscrites aux triangles formés par les côtés d'un quadrilatère complet ABCDEF se coupent toutes les quatre en un même point M.

IG. 142. Considérons le triangle ABF et les points C, D, E, situés sur ses trois côtés. Il est facile de voir que les circonférences ADE, BCD, FCD, passant par les sommets de ce triangle, et se coupant deux à deux en C, D, E, doivent se couper en un même point M.

Pour une raison semblable, les circonférences ABF, BCE, ECD, se coupent en un même point. Mais ces deux dernières ont déjà le point M commun ; donc les quatre circonférences passent par ce point.

Théorème LXXXI.

Si l'on circonscrit des circonférences aux triangles formés par chacun des côtés d'un pentagone et les prolongements des côtés adjacents, les points d'intersection de ces lignes sont tous cinq sur une même circonférence.

'IG. 143. Soit ABCDE un pentagone quelconque. Soient ABF, BCG,... les triangles dont il s'agit. Les circonférences circonscrites à ces triangles se coupent consécutivement aux points L, M, N, P, Q : il faut démontrer que ces cinq points sont situés sur une même circonférence.

Si nous considérons le quadrilatère complet ABCIFG, nous concluons, du théorème précédent, que les circonférences circonscrites aux triangles ABF, BCG, FCI, se coupent au point L.

De même, les circonférences circonscrites aux triangles CDH, EDI, FCI, formés par les côtés du quadrilatère complet CDEFIH, se coupent au point N.

La circonférence circonscrite au triangle FCI passe donc par les points L, N.

Actuellement, les circonférences ABF, FCI ayant, avec la circonférence qui passerait par les points L, N, Q, un point commun L, et la droite FAI étant menée par l'intersection F des deux premières circonférences, il résulte, de la réciproque du théorème précédent, que si l'on joint les points A, I aux intersections Q, N de ces deux lignes avec la troisième, les droites QA, IN, prolongées, se coupent sur cette dernière circonférence.

Cela posé, en considérant le triangle ARI, et les points Q, N, E, situés sur les trois côtés, nous voyons que les circonférences QRN, NEI, QEA doivent se couper en un même point. Donc la circonférence QLN passe par le point P, intersection des circonférences DEI et AEK.

On verrait, de la même manière, que cette ligne contient aussi le point M.

Donc les cinq points L, M, N, P, Q sont situés sur une même circonférence (*).

Théorème LXXXII.

Le lieu des points réciproques des points d'une droite donnée AB, relativement à un cercle donné C, est une circonférence.

Soit GH la polaire d'un point quelconque D de la droite AB, et soit M le point de rencontre de GH avec le rayon FIG. 207.

(*) Ce remarquable théorème a été donné, dans *le Géomètre*, par Auguste Miquel, alors élève à l'institution Barbet.

CD : les points M, D sont réciproques (Th. XVI). D'ailleurs, la polaire GH passe par le pôle P de AB (Th. XX) ; donc *la figure réciproque de la droite* AB *est la circonférence décrite sur* CP *comme diamètre.*

Théorème LXXXIII.

Le lieu des points réciproques des points d'une circonférence donnée O, relativement à un cercle donné C, est une circonférence.

FIG. 207. M' étant le point réciproque d'un point quelconque M pris sur la circonférence C, nous avons

$$CM \,.\, CM' = \overline{CA}^2.$$

Prolongeons la transversale CM jusqu'à ce qu'elle rencontre de nouveau, en N, la circonférence O ; et menons la tangente CT. Nous avons aussi

$$CM \,.\, CN = \overline{CT}^2.$$

Ces deux relations donnent

$$\frac{CM'}{CN} = \left(\frac{CA}{CT}\right)^2.$$

Ainsi, les rayons CN, CM' sont dans un rapport constant ; donc le lieu des points M' est une circonférence.

Pour trouver, à la fois, le centre et le rayon de cette ligne, construisons la polaire T''T'O' du point de contact T. En premier lieu, $CT' = \frac{\overline{CA}^2}{CT}$; puis, à cause des parallèles OT, O'T',

$$\frac{CO'}{CO} = \frac{O'T'}{OT} = \frac{CT'}{CT}.$$

Les points O', T' sont donc homologues des points O, T.

Remarque. La position et la grandeur du cercle O′ varient avec la valeur du rapport $\frac{CA}{CT}$. Si l'on veut que ce cercle *se confonde* avec le cercle O, il faut que

$$CT = CA;$$

dans ce cas, les rayons CT, TO étant perpendiculaires entre eux, ces rayons sont des tangentes, et les cercles C, O se coupent orthogonalement.

Théorème LXXXIV.

Dans deux figures réciproques, les angles correspondants sont égaux.

Supposons que la première figure se réduise au système de deux droites AC, BC (*). Soit O le centre du *cercle directeur* (**). A′ étant le pôle de AC et B′ le pôle de BC, la circonférence décrite sur OA′ comme diamètre est la figure réciproque de AC, et la circonférence OB′ est la figure réciproque de BC. Par conséquent, le système des deux circonférences constitue la figure réciproque du système des deux droites. FIG. 361.

Cela posé, soient C′S, C′T les tangentes aux deux circonférences, menées par le point C′, réciproque du point C : il s'agit de démontrer que les angles SC′T, ACB, sont égaux. Or, si l'on mène les tangentes OS′, OT′, évidemment perpendiculaires à OA, OB, on aura

$$S'OT' = SC'T, \quad S'OT = ACB\ ;$$

donc

$$SC'T = ACB.$$

(*) Pour la théorie générale des figures réciproques, le lecteur pourra consulter, soit un beau Mémoire de M. Liouville, publié dans le *Journal de Mathématiques* (tome XII), soit l'intéressant opuscule de M. Paul Serret : *des Méthodes en Géométrie*.

(**) On n'a pas tracé ce cercle, afin de rendre la figure plus claire.

Théorème LXXXV.

A, B étant deux points d'une figure, et A′, B′ les points correspondants de la figure réciproque, on a, en appelant R le rayon du cercle directeur :

FIG. 362.
$$A'B' = AB.\frac{R^2}{OA.OB}.$$

De

$$OA.OA' = OB'.OB = R^2,$$

on conclut

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'};$$

donc les triangles OAB, OB′A′, qui ont un angle égal compris entre côtés proportionnels, sont semblables. Par suite

$$A'B' = AB.\frac{OA'}{OB'} = AB\frac{R^2}{OA.OB}.$$

Remarque sur les figures réciproques. La théorie dont nous venons d'indiquer les premières notions peut, aussi bien que la théorie des polaires réciproques, faire découvrir aisément un grand nombre de théorèmes, auxquels il serait difficile d'arriver par d'autres voies. Pour montrer un exemple remarquable de cette application du principe général de la *transformation des figures*, prenons ce théorème très-simple :

FIG. 363. *Si, à un cercle* C, *inscrit à un angle xOy, on mène une tangente intérieure* AB, *le triangle* OAB *a un périmètre constant* (Liv. II, Th. XII) ; et construisons la figure réciproque de OABCD, par rapport à un cercle de rayon R, ayant pour centre le sommet O.

1° La figure réciproque du cercle CD est un cercle C′D′, inscrit à l'angle xOy (Th. LXXXIII).

2° La figure réciproque de AB est une circonférence

OA'T'B', qui a son centre sur OC, et qui touche le cercle C' au point T', réciproque du point de contact T.

3° La relation

$$OA + OB + AB = 2p$$

devient, par le dernier théorème,

$$\frac{R^2}{OA'} + \frac{R^2}{OB'} + A'B'.\frac{R^2}{OA'.OB'} = 2p;$$

ou, plus simplement,

$$\frac{OB' + OA' + A'B'}{OA'.OB'} = \textit{constante}.$$

4° Désignons par T l'aire du triangle OA'B' et par r le rayon du cercle inscrit à ce triangle. Nous aurons

$$T = \frac{1}{2} OA'.OB' \sin xOy = \frac{1}{2}(OB' + OA' + A'B')r;$$ TRIG., 55.

donc l'égalité précédente équivaut à

$$r = \textit{constante}.$$

Ainsi, *quelle que soit la tangente* AB, *le triangle* OA'B' *est circonscrit à une circonférence fixe* I (*), *inscrite à l'angle* xOy. Les tangentes *extérieures* de cette circonférence sont les cordes A'B' des circonférences *variables* OA'B', tangentes à la circonférence *fixe* C'D'. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Théorème LXXXVI.

Si, à un cercle I, inscrit à un angle xOy, on mène une tangente extérieure quelconque A'B', la circonférence circonscrite au triangle OA'B' est tangente à une circonférence fixe C', inscrite à l'angle xOy (**).

(*) Non tracée sur la figure.

(**) Ce remarquable théorème est dû à M. le capitaine Mannheim, ainsi que les considérations précédentes.

Théorème LXXXVII.

Si l'on construit des carrés sur les côtés d'un triangle rectangle ABC, et que l'on mène les droites BD, CE et la hauteur AL : 1° ces trois droites se coupent en un même point I; 2° les segments AH, AK sont égaux entre eux.

FIG. 136. 1° Les triangles semblables AHC, BHE donnent

$$\frac{AH}{BH}=\frac{AC}{BE}=\frac{AC}{AB}.$$

De même,

$$\frac{CK}{AK}=\frac{AC}{AB}.$$

G., 235. D'ailleurs, par une propriété connue,

$$\frac{BL}{CL}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Multipliant ces proportions terme à terme, on trouve

$$AH.BL.CK = BH.AK.CL;$$

donc les droites CH, BK, AL se coupent en un même point I (Th. IX).

2° De la proportion

$$\frac{AH}{BH}=\frac{AC}{AB},$$

on conclut

$$AH=\frac{AC}{AB+AC}.$$

De même,

$$AK=\frac{AB.AC}{AB+AC}.$$

Donc AH = AK.

Remarques. I. Si dans l'égalité

$$AH.BL.CK = BH.AK.CL,$$

on supprime les facteurs égaux AH, AK, on trouve

$$\frac{BH}{CK} = \frac{BL}{CL}.$$

II. Menons la droite HK, et soit P le point où elle coupe le prolongement de l'hypoténuse BC : ce point est le conjugué harmonique de L; donc

$$\frac{BP}{CP} = \frac{BL}{CL} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Théorème LXXXVIII.

Deux polygones quelconques de $2n$ côtés sont équivalents quand leurs côtés ont les mêmes milieux (*).

Soient P, P′ deux de ces polygones. Joignons, par des droites, les sommets de P aux sommets correspondants de P′ : ces droites sont égales et parallèles, car elles forment, avec les demi-côtés des polygones, des triangles symétriques deux à deux. Prolongeons ces mêmes droites jusqu'à leur rencontre avec une droite A, perpendiculaire à leur direction commune : la droite A, les lignes de jonction, et les côtés des polygones, déterminent des trapèzes équivalents deux à deux. Les polygones P, P′, étant composés d'un même nombre de parties, respectivement équivalentes, sont équivalents.

(*) Ce théorème, ainsi que celui de la page 9, est dû à Prouhet. La démonstration suivante a été donnée par M. l'abbé Jullien (*Nouvelles Annales*, tome X).

Théorème LXXXIX.

La *droite de Simson*, relative à un point M de la circonférence circonscrite à un triangle ABC (*), divise en deux parties égales la droite menée du point M au point de concours H des hauteurs du triangle.

FIG. 381. Avec les perpendiculaires MA′, MB′, MC′, prises deux à deux, construisons les parallélogrammes MA′FB′, MB′EC′, MC′DA′ : les diagonales MF, ME, MD, ont leurs milieux sur la droite A′B′C′.

Cette droite détermine, avec les côtés du triangle donné, un quadrilatère complet, donnant lieu à quatre triangles dans lesquels les points de concours des hauteurs sont D, E, F, H : D, par exemple, est le point de concours relatif au triangle A′B′C′.

D'après le Théorème XLVI, ces points D, E, F, H sont en ligne droite ; donc la droite A′B′C′, qui passe par les milieux de MD, ME, MF, passe aussi par le milieu P de MH (**).

Théorème XC.

Dans tout triangle ABC :

1° Les milieux A′, B′, C′ des côtés ; les pieds A″, B″, C″ des hauteurs ; les milieux M, N, P des segments compris entre les sommets et le point de rencontre H des hauteurs, sont neuf points situés sur une même circonférence ;

2° Le centre de cette circonférence est le milieu I de la droite qui joint le point de rencontre des hauteurs au centre O du cercle circonscrit ;

3° Le rayon de cette circonférence est la moitié du rayon du cercle circonscrit (***).

FIG. 382. Il est d'abord visible que H est le centre de similitude

---

(*) (Liv. II, Th. IX).

(**) Cette élégante démonstration m'a été communiquée par M. Mention.

(***) Le savant Terquem attribuait ce théorème à Euler (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome I, p. 196).

directe de la circonférence ABC et de la circonférence MNP. De plus, *le centre de celle-ci est le milieu* I *de* OH, *et son rayon* IM *est la moitié du rayon* OA.

En second lieu, si l'on mène les droites IP, IC′, on forme deux triangles IHP, IOC′, égaux entre eux, à cause de IH = IO, HP = OC′ (Liv. II, Th. II, Rem. IV), etc.; donc PIC′ est un diamètre de la circonférence MNP: *cette circonférence passe par les milieux des côtés du triangle* ABC.

Enfin, le centre I étant le milieu OH, les obliques IC′, IC″ sont égales; donc *la circonférence* MNP *passe par les pieds des hauteurs du triangle* ABC.

Remarques. I. *Le centre du cercle inscrit, le centre des moyennes distances, le point de concours des hauteurs, le centre de la* CIRCONFÉRENCE DES NEUF POINTS, *sont situés sur une même droite.*

I . A cause de CP égale et parallèle à OC′, la figure COC′P est un parallélogramme; donc *le diamètre* C′P *de la circonférence des neuf points, passant par le milieu d'un côté du triangle, est égal et parallèle au rayon* CO *du cercle circonscrit, aboutissant au sommet opposé à ce côté.*

III. D'après le théorème précédent, lorsque le point M (fig. 381) parcourt la circonférence ABC, le milieu P de MH décrit la circonférence des neuf points.

Théorème XCI.

Si deux circonférences mobiles C, C′ touchent deux circonférences fixes O, O′, aux points A, B, A′, B′ : 1° les cordes AA′, BB′, des cercles mobiles, se coupent en un point fixe P ; 2° le lieu du point de rencontre O des cordes AB, A′, B′, appartenant aux cercles fixes, est l'axe radical de ces cercles (*).

1° Supposons, pour fixer les idées, que chacune des FIG. 383.

(*) Cet énoncé ne doit pas être adopté sans restriction : celle qu'il comporte résulte de la démonstration suivante.

circonférences C, C′ touche, extérieurement, chacune des circonférences O, O′. Alors A est le centre de similitude *inverse* des circonférences O, C, et A′ est le centre de similitude *inverse* des circonférences O′, C′ ; donc (Th. XIII) la corde AA′ passe par le centre de similitude *directe* des cercles O, O′. Pour la même raison, la corde BB′ passe en ce point : *le point d'intersection* P *des cordes* AA′, BB′ *est* donc *le centre de similitude directe des cercles fixes.*

2° Soient D, M les points où les cordes AB, A′B′ coupent de nouveau la circonférence C′. On a

$$QB \cdot QD = QB' \cdot QE.$$

Mais, de même que P est le centre de similitude directe des cercles fixes, Q est le centre de similitude des cercles mobiles. Conséquemment,

$$\frac{QA}{QD} = \frac{QA'}{QE}.$$

On conclut, de ces deux égalités,

$$QA \cdot QB = QA' \cdot QB' ;$$

en sorte que les puissances du point Q, relativement aux circonférences O, O′, sont égales entre elles : *le lieu du point* Q *est* donc *l'axe radical des cercles fixes.*

Remarques. I. Si *une seule* des circonférences mobiles touche *intérieurement une seule* des circonférences fixes, le théorème est en défaut : en effet, la corde AA′, par exemple, passe par l'un des centres de similitude des cercles fixes, tandis que BB′ passe par l'autre.

II. Supposons que, la circonférence C′ restant immobile, la circonférence C tende à se confondre avec l'une des tangentes communes aux cercles O, O′. Pendant ce mouvement, le point Q décrit un segment de l'axe radical MM′ ; et, à la limite, il coïncide avec l'un des points R, R′ où l'axe coupe la circonférence C′. Au même instant, *le rayon* RC′ *est perpendiculaire à la tangente commune* AA′. Cette conséquence du *principe de continuité* équivaut à la proposition suivante, que l'on peut démontrer directement :

Théorème XCII.

Soit AA′ une tangente commune à deux cercles O, O′, et soit C′ une circonférence tangente à ces cercles : 1° les cordes de contact AB, A′B′ se coupent en un point R de la circonférence C′ ; 2° le point R appartient à l'axe radical des cercles O, O′; 3° le rayon RC′ est perpendiculaire à la tangente AA′ (*).

Remarque. Si l'on remplace la tangente AA′ par la tangente DD′, *conjuguée* de la première, les droites RA, RA′ sont remplacées elles-mêmes par les droites R′D, R′D′, qui passent aussi par les points de contact B, B′. Mais la corde AD et l'axe radical MM′R sont des droites parallèles, comme perpendiculaires à OO′. De là résulte la similitude des triangles DAI, M′RI, et aussi la similitude des triangles BDI, M′RI. Par suite, *les quatre points* D, B, M′, R *sont sur une circonférence*. Il en est de même des points D′, B′, M′, R; des points A, B, R′, M ; et encore des points A′, B′, R′, M. FIG. 384.

(*) D'après une remarque de M. Mention (*Nouvelles Annales*, tome IX, p. 401), les deux premières parties de ce théorème doivent être attribuées à Cauchy. Du reste, l'énoncé est soumis, comme le précédent, à quelques restrictions évidentes.

Théorème XCIII.

Soient O, O′ deux circonférences données ; AA′, DD′ deux de leurs tangentes communes conjuguées ; C′, une circonférence tangente à O, O′; R, R′, les points où cette ligne coupe l'axe radical de O, O′ : la tangente DD′ est l'axe radical commun de la circonférence C′ et de chacune des circonférences orthogonales à O,O′, décrites du point R ou du point R′ comme centre.

FIG. 384. Considérons, par exemple, la circonférence dont le centre est R′, et qui coupe orthogonalement les circonférences données : son rayon ρ est moyen proportionnel entre R′B et R′D. Mais, d'après la remarque précédente,

$$R'B.R'D = R'M'.R'R = \rho^2.$$

D'un autre côté, si nous traçons le diamètre R′GH, perpendiculaire à DD′ (Th. XCII), la similitude des triangles R′GM′, R′RH nous donne

$$R'M'.R'R = R'G\,R'H\,;$$

ou, en désignant par E l'un des points où DD′ coupe la circonférence C′,

$$R'M'.R'R = \overline{R'E}^2.$$

Par suite,

$$\rho = R'E.$$

Ainsi, *la circonférence orthogonale* R′ *passe par les points* E, E′ *où la tangente* DD′ *rencontre la circonférence* C′; etc.

FIG. 385. COROLLAIRE. *Soient deux circonférences* O, O′ *et deux angentes communes, conjuguées,* AA′, DD′; *soit* C′ *une circonférence tangente aux deux premières et passant par le milieu* M′ *de* DD′ : 1° *la circonférence décrite sur* DD′ *comme diamètre passe par les points* F, F′ *où* AA′ *rencontre la circonférence* C′; 2° *la circonférence orthogonale à* O, O′, *et qui a pour centre l'extrémité* R′ *de la corde* MM′ *perpendiculaire à* OO′, *passe par les points*

M′, E′ *où* DD′ *rencontre la circonférence* C′; 3° *le diamètre* M′C′G *est perpendiculaire à la tangente* AA′; 4° *la corde* GE′ *est perpendiculaire à la tangente* DD′.

Remarques. I. Si la circonférence C′ ne coupe pas la tangente AA′, cette droite est toujours l'axe radical des circonférences C′, R′. De même, DD′ est l'axe radical des circonférences C′, M′. Conséquemment, la corde KK′, commune aux circonférences R′, M′, passe par le point de concours des tangentes DD′, AA′. Et comme cette corde commune est perpendiculaire à MM′, elle se confond avec la droite OO′. La même propriété subsiste pour les circonférences R, R′ considérées ci-dessus (Fig. 384).

II. Le point B est le centre de similitude inverse des cercles O, C′; donc

$$\frac{BD}{BR'} = \frac{R}{\rho}.$$

De même

$$\frac{B'D'}{B'R'} = \frac{R'}{\rho}.$$

Si l'on combine ces deux relations avec celle-ci :

$$R'B.R'D = R'B'.R'D',$$

on trouve

$$\frac{BD.R'D}{B'D'.R'D'} = \frac{R}{R'}.$$

Mais

$$BD.R'D = DM'.DE',$$

$$B'D'.R'D' = D'M'.D'E';$$

donc, à cause de DM′ = D′M′,

$$\frac{DE'}{D'E'} = \frac{R}{R'}.$$

Ainsi *la corde* GE′ *divise la tangente commune* DD′ *dans le rapport des rayons.* De là résulte immédiatement que *le point* S, *où cette corde coupe la ligne des centres, est le centre de similitude inverse des cercles* O,O′.

Théorème XCIV.

Dans tout triangle, la circonférence des neuf points est tangente au cercle inscrit et aux cercles ex-inscrits (*).

FIG. 385. D'après la dernière remarque, la circonférence C′, tangente aux cercles O, O′. passe par le pied E′ de la hauteur SE′ du triangle TST′ formé par les tangentes DD′, ST, ST′.

De plus, à cause de DT = D′T′ (Liv. II, Th. XIV, Rem. II), le point M, milieu de DD′, est aussi le milieu de TT′. Enfin, le rayon M′C′, perpendiculaire à la tangente AA′, est parallèle à la droite qui joindrait le point S au centre du cercle circonscrit au triangle TST′ (Liv. II, Prob. XXII). La circonférence C′ ne diffère donc pas de la *circonférence des neuf points*, relative à ce triangle ; etc.

On verrait, de la même manière, que la circonférence des neuf points touche le cercle inscrit et le troisième cercle ex-inscrit.

Théorème XCV.

Soit D le point où le côté BC du triangle ABC touche la circonférence inscrite I ; soit E le point où ce même côté touche la circonférence ex-inscrite α, opposée au sommet A. Si, sur DE comme diamètre, on décrit une circonférence qui coupe en F, G la tangente commune conjuguée de AB, ces points F, G appartiennent à la circonférence des neuf points.

FIG. 386. La circonférence des neuf points, A′PB′B″MC′C″NA″, est tangente aux circonférences I et α ; de plus, elle passe par le milieu A′ de DE ; donc (Th. XCIII, Corol.), elle passe par les points G, F.

Remarques. I. La circonférence DE a pour centre le point A′.

II. Les points G, F sont symétriques des points de con-

(*) Ce premier complément du Th. XC est attribué au Dr Hart (*The Quarterly Journal*, 1861, p. 245).

tact E, D, relativement à la perpendiculaire à $A\alpha$, menée par le point où $A\alpha$ rencontre BC.

III. Une construction analogue à l'une de celles qui viennent d'être indiquées, effectuée sur les côtés AB, AC, donnerait quatre nouveaux points, situés sur la circonférence A'PB'B''....

IV. A cause des quatre points de contact avec les circonférences I, α, β, γ, il s'ensuit que *la circonférence des neuf points passe,* véritablement, *par dix-neuf points remarquables* : les théorèmes suivants augmentent indéfiniment ce nombre.

Théorème XCVI.

Dans tout triangle ABC, la circonférence Ω des neuf points touche les douze cercles inscrits ou ex-inscrits aux trois triangles déterminés par deux des sommets A, B, C et par le point de concours H des hauteurs (*).

Soit ABH l'un de ces triangles. Les milieux M, N, C' des côtés AH, BH, AB appartiennent à la circonférence Ω; donc Ω *est la circonférence des neuf points, relative au triangle* ABH. Mais, d'après le Théorème de Hart, cette dernière circonférence touche les quatre circonférences tangentes aux côtés du même triangle; donc, etc. Fig. 386

Remarques. I. Le sommet C du triangle ABC est le point de concours des hauteurs du triangle ABH.

II. Les rayons des cercles circonscrits aux triangles ABH, ABC sont égaux, chacun, à deux fois le rayon de la circonférence Ω (Th. XC) ; donc *ces cercles sont égaux entre eux.* Nous avons déjà démontré cette propriété (Liv. II, Th. II).

(*) Théorème de sir William Hamilton (*The Quarterly Journal*, 1861, p. 249).

Théorème XCVII.

Si deux cercles O, I sont tels, qu'un triangle ABC puisse être inscrit au premier et circonscrit au second, les circonférences tangentes aux côtés du triangle A′B′C′ qui a pour sommets les points où ABC touche la circonférence I, sont tangentes à un cercle fixe.

FIG. 73. Il est d'abord facile de voir que la circonférence des neuf points, relative au triangle A′B′C′, est réciproque de la circonférence O, par rapport à la circonférence I.

En effet, le milieu *a* de la corde B′C′, est le point réciproque de A (Th. XIX) ; donc la circonférence *abc* est réciproque de la circonférence O ; etc.

En second lieu, d'après le Théorème de Hart, la circonférence inscrite au triangle A′B′O′ est tangente à la circonférence *abc*. De même pour les circonférences ex-inscrites. Mais la circonférence *abc* ne dépend que des cercles donnés ; donc, etc. (*).

Théorème XCVIII.

Si deux cercles O, I sont tels, qu'un triangle ABC puisse être inscrit au premier et circonscrit au second, la circonférence circonscrite au triangle A″B″C″ formé par les tangentes en A, B, C, au cercle O, est tangente à un cercle fixe.

FIG. 74. D'après le Théorème de Hart, le cercle I touche la circonférence *abc* qui passe par les milieux des côtés du triangle ABC. Cette circonférence *abc* a pour réciproque, relativement au cercle O, la circonférence A″B″C″ (**) ; donc celle-ci est tangente à la circonférence réciproque de I, relativement au cercle O.

(*) Ce théorème, qui paraît dû à M. *John Casey* (*The Quarterly Journal*, 1861, p. 251), a une certaine analogie avec celui du capitaine Mannheim, démontré ci-dessus (p. 123).

(**) Non tracé sur la figure.

Théorème XCIX.

Le cercle circonscrit à un triangle ABC touche les seize cercles inscrits ou ex-inscrits aux quatre triangles ayant pour sommets les centres des cercles tangents aux côtés de ABC.

Soient I, α, β, γ les centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits au triangle ABC. D'après une propriété connue, les points α, C, β sont sur une droite, les points γ, I, C sont sur une seconde droite, et ces deux lignes sont perpendiculaires entre elles. Donc *la circonférence* O, *circonscrite au triangle* ABC, *est la circonférence des neuf points, relative au triangle* $\alpha\beta\gamma$. D'après les Théorèmes de Hart et d'Hamilton, elle est tangente aux circonférences qui touchent les trois côtés de chacun des triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta$I, $\beta\gamma$I, $\gamma\beta$I. C'est ce qu'il fallait démontrer. FIG. 386.

Théorème C.

Dans tout triangle ABC, la circonférence Ω des neuf points touche : 1° les seize cercles inscrits ou ex-inscrits aux quatre triangles ayant pour sommets les centres des cercles tangents aux côtés du triangle dont les sommets M, N, P sont les milieux des segments compris entre les sommets A, B, C et le point de concours H des hauteurs ; 2° trois autres groupes de seize cercles.

1° Le point H est le centre de similitude des triangles ABC, MNP. D'après le théorème précédent, la circonférence ABC est tangente à seize cercles ; donc la circonférence MNP (ou Ω) est tangente à seize autres cercles situés, à l'égard du triangle MNP, comme le sont les premiers à l'égard du triangle ABC. FIG. 386.

2° La circonférence circonscrite au triangle ABH touche seize cercles qui se déduisent, de ce triangle, comme ceux que nous venons d'énumérer se déduisent du triangle ABC. Mais les circonférences ABH, ABC sont égales (Th. XCVI, Rem. II) ; donc la seconde est tangente à seize cercles remarquables; donc la circonférence Ω est également tangente à seize nouveaux cercles. Le même raisonnement est applicable aux triangles BCH, CAH et aux trente-deux cercles qui en dérivent (*).

Théorème CI.

Soient deux triangles ABC, A′B′C′, semblables et semblablement placés. Si un triangle *abc* est inscrit au premier et circonscrit au second, l'aire de ce troisième triangle est moyenne proportionnelle entre les aires des deux premiers (**).

Fig. 402. Soit I le centre de similitude des deux premiers triangles. Si l'on fait voir que le quadrilatère IA′CB′ est moyen proportionnel entre les triangles IA′B′, IAB, le théorème sera démontré. Or, ce quadrilatère est équivalent au triangle IAB′; et l'on a, simultanément :

$$\frac{IA'B'}{IAB'} = \frac{IA'}{IA}, \quad \frac{IAB'}{IAB} = \frac{IB'}{IB}, \quad \frac{IA'}{IA} = \frac{IB'}{IB};$$

donc

$$\frac{IA'B'}{IAB'} = \frac{IAB'}{IAB}.$$

(*) Après avoir démontré que la circonférence Ω touche soixante-quatre cercles remarquables (autres que ceux dont il vient d'être question), M. John Casey ajoute : « Il est aisé de voir, par le « moyen des 64 cercles de l'article 12, que le cercle Σ en touche « 256 autres ; et, par le moyen de ceux-ci, qu'il en touche 1024 ; et « ainsi de suite. » — Si l'on a égard aux *soixante-dix points nouveaux*, résultant des Théorèmes XCV et C, puis à ceux que donnerait la combinaison répétée de ces théorèmes avec ceux de Hart et d'Hamilton, on voit que la *série infinie* des points remarquables situés sur la circonférence Ω se trouve beaucoup accrue.

(**) Ce théorème, énoncé d'une manière un peu différente, semble dû à M. Hopps, de Hull (*The educational Times*, 1862). Il m'a été communiqué par M. *Dwelshauvers* l'un de mes collègues.

Problème I.

Par un point donné A, mener une droite qui passe par le point de concours de deux droites BC, DE, que l'on ne peut prolonger.

Première solution. Traçons deux parallèles quelconques FG, F'G', qui coupent BC en G, G', et DE en F, F'. Tirons FA; et, par le point F', menons F'A' parallèle à cette droite. De même, menons GA et sa parallèle G'A': AA' sera la droite cherchée. FIG. 146.

En effet, les triangles AFG, A'F'G', semblables et semblablement placés, ont un centre de similitude, par lequel passent les droites BC, DE, AA' (Th. VI).

Seconde solution. — Après avoir tracé, arbitrairement, une transversale XY; menons, d'un point M de cette ligne, deux autres transversales MGF, MG'F', qui coupent en G, G', F, F' les droites BC, DE. Tirons ensuite les droites AG, AF; et soient N, P les intersections de ces lignes avec la transversale XY. Enfin, menons NA', PF' : le point A', où ces nouvelles droites se coupent, appartient à la droite cherchée (Th. X, Réciproque). FIG. 147.

Remarques. I. Cette solution a, sur la première, l'avantage d'exiger seulement *l'emploi de la règle.*

II. La seconde construction est, pour ainsi dire, la *perspective* de la première (*).

Problème II.

Placer, dans un angle donné AOB, une droite MN qui soit divisée, par un point donné C, en deux segments ayant un rapport donné.

(*) La *Perspective,* ou *Projection conique,* peut souvent être employée comme moyen de démonstration. Voyez les Traités de Lavit, Hachette, Leroy, La Gournerie, etc.

FIG. 150. Soit $\frac{m}{n}$ le rapport donné, de manière que

$$\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{NC}} = \frac{m}{n}.$$

Par le point C, menons CD parallèle au côté AO ; nous aurons

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DN}} = \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{NC}} = \frac{m}{n}.$$

On construira donc le point N au moyen d'une quatrième proportionnelle ; après quoi l'on joindra ce point au point donné C.

Problème III.

Par un point I, donné dans le plan de trois droites OA, OB, OC qui concourent en un même point, mener une droite MNP telle, que les segments MP, PN aient un rapport donné $\frac{m}{n}$.

FIG. 151. Après avoir pris arbitrairement un point E sur la droite OB, on mène, par ce point, une droite DEF telle, que l'on ait

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DF}} = \frac{m}{n}.$$

Il ne reste plus qu'à mener, par le point I, une parallèle MPN à DEF.

Problème IV.

Par un point D, donné sur le côté AB d'un triangle ABC, mener une droite DE qui partage ce triangle en deux segments ayant un rapport donné.

Soit $\frac{p}{q}$ ce rapport : nous aurons

FIG. 152.

$$\frac{\mathrm{ADE}}{\mathrm{ABC}} = \frac{p}{p+q}.$$

Mais, à cause de l'angle commun A,

$$\frac{ADE}{ABC}=\frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC}; \qquad \text{G., 277.}$$

donc

$$AE = AC \cdot \frac{AB}{AD} \cdot \frac{p}{p+q}.$$

Ainsi, la droite AE peut être construite au moyen de deux quatrièmes proportionnelles.

Problème V.

Partager un triangle ABC, dans un rapport donné, par une droite MN, parallèle à une direction donnée.

Les triangles CAB, CMN, ayant un angle égal C, sont entre eux comme les rectangles des côtés qui comprennent l'angle égal; si donc $\frac{p}{q}$ est le rapport donné, Fi

$$\frac{CA \cdot CB}{CM \cdot CN}=\frac{p+q}{p}.$$

Mais, la droite MN étant parallèle à DE, on a

$$\frac{CN}{CM}=\frac{CF}{CG}.$$

Ces deux proportions donnent

$$\frac{CA \cdot CB}{\overline{CM}^2}=\frac{p+q}{p} \cdot \frac{CF}{CG}.$$

Soit CI une moyenne proportionnelle entre CA et CB. Alors

$$\frac{\overline{CM}^2}{\overline{CI}^2}=\frac{p}{p+q} \cdot \frac{CG}{CF}.$$

D'après cette dernière égalité, CM est le côté d'un carré qui est, au carré de CI, dans un rapport donné. Le problème peut donc être regardé comme résolu. G., 127.

Problème VI.

Partager un quadrilatère ABCD en deux parties équivalentes, par une droite partant du sommet A.

FIG. 154. On construit un triangle ADE équivalent au quadrilatère. On mène la médiane AM : elle partage ADE en deux parties équivalentes. Donc AM est la droite demandée.

Problème VII.

Partager un quadrilatère ABCD, dans un rapport donné, par une droite MN, parallèle à une direction donnée EF.

Soit $\frac{p}{q}$ le rapport donné, de manière que

FIG. 155.

$$\frac{\text{ABMN}}{\text{MNCD}} = \frac{p}{q}.$$

Prolongeons les côtés BC, AD jusqu'à leur rencontre en O; nous pourrons remplacer la proportion précédente par celle-ci :

$$\frac{\text{OAB} - \text{OMN}}{\text{OMN} - \text{OCD}} = \frac{p}{q};$$

ou bien, en substituant aux triangles OAB, OMN, OCD les rectangles proportionnels,

$$\frac{\text{OA}\,.\,\text{OB} - \text{OM}\,.\,\text{ON}}{\text{OM}\,.\,\text{ON} - \text{OC}\,.\,\text{OD}} = \frac{p}{q}.$$

Cette proportion donne

$$\text{OM}\,.\,\text{ON} = \frac{q}{p+q}\,.\,\text{OA}\,.\,\text{OB} + \frac{p}{p+q}\,.\,\text{OC}\,.\,\text{OD}.$$

Mais, MN étant parallèle à la droite EF, on a

$$\frac{\text{OM}}{\text{ON}} = \frac{\text{OE}}{\text{OF}}.$$

Par suite, en multipliant membre à membre,

$$\overline{OM}^2 = \left(\frac{q}{p+q} \cdot OA \cdot OB + \frac{p}{p+q} \cdot OC \cdot OD\right) \frac{OE}{OF}.$$

Soit OG une moyenne proportionnelle entre OA et OB; soit OH une moyenne proportionnelle entre OC et OD. Nous aurons

$$\overline{OM}^2 = \left(\frac{q}{p+q} \cdot \overline{OG}^2 + \frac{p}{p+q} \cdot \overline{OH}^2\right) \frac{OE}{OF}.$$

On voit que, pour déterminer OM, il suffit d'appliquer les solutions de ces problèmes: *construire un carré qui soit, à un carré donné, dans un rapport donné; trouver un carré équivalent à la somme de deux carrés donnés* (*).

Problème VIII.

Inscrire un carré MNPQ à un triangle donné ABC.

Abaissons la hauteur AD du triangle; et, sur AD comme côté, construisons un carré ADEF. Les deux carrés étant semblables et semblablement placés, les droites qui joignent les sommets homologues concourent en un même point, lequel est évidemment le sommet B. FIG. 149.

Ainsi, pour résoudre le problème, on mène AF parallèle à la base BC et égale à la hauteur AD. On trace BF, qui coupe AC au sommet cherché N ; etc.

Remarques. I. Si l'on désigne par a, b, c les côtés du triangle ; par a', b', c' les hauteurs correspondantes ; par x, y, z les côtés des *trois carrés* qui satisfont à la question, on trouve

$$x = \frac{aa'}{a+a'}, \quad y = \frac{bb'}{b+b'}, \quad z + \frac{cc'}{c+c'}.$$

(*) On peut aussi construire OM au moyen de plusieurs *quatrièmes proportionnelles* et d'une *moyenne proportionnelle*.

II. On peut conclure, de ces valeurs, que *le plus grand carré s'appuie sur le plus petit côté du triangle.*

Problème IX.

Inscrire, à un triangle donné, un rectangle semblable à un rectangle donné.

Ce problème ne diffère pas essentiellement de celui qui précède.

Problème X.

Inscrire, à un triangle ABC, un rectangle MNPQ équivalent à un carré donné m^2.

Abaissons la hauteur AD ; nous aurons

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{AB}}, \quad \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}.$$

Ces deux proportions, multipliées terme à terme, donnent

$$\frac{\mathrm{MP}\,.\,\mathrm{MN}}{\mathrm{AD}\,.\,\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{BM}\,.\,\mathrm{AM}}{\overline{\mathrm{AB}}^2};$$

puis, à cause de $\mathrm{MP}\,.\,\mathrm{MN} = m^2$:

$$\mathrm{BM}\,.\,\mathrm{AM} = \frac{m^2\,.\,\overline{\mathrm{AB}}^2}{\mathrm{AD}\,.\,\mathrm{BC}}.$$

Soit p la moyenne proportionnelle entre la base BC et la hauteur AD du triangle, et soit x la moyenne proportionnelle, *inconnue*, entre AM et MB : l'égalité précédente se réduit à

$$x = \mathrm{AB}\,.\,\frac{m}{p}.$$

Si donc l'on cherche une quatrième proportionnelle aux droites p, m, AB, et que l'on mène, parallèlement à AB, une droite qui en soit à une distance égale à cette quatrième proportionnelle, on trouvera le point E, et, par suite, le point M.

Remarque. Le problème admet ordinairement deux solutions.

Problème XI.

A un quadrilatère donné ABCD, circonscrire un quadrilatère MNPQ semblable à un autre quadrilatère donné.

Le quadrilatère MNPQ devant être semblable à un quadrilatère donné, il s'ensuit que ses angles sont connus. Par suite, les sommets M, N, Q doivent être situés sur trois arcs AMB, BNC, AQD, capables de trois angles donnés. Fig. 379.

Soient E, F les points d'intersection du premier arc avec les deux derniers. Menons ME, MF, QE, NF. Prenons ensuite, *arbitrairement*, un point M′ sur l'arc AMB, et menons encore M′AQ′, M′BN′, M′E, M′F, Q′E, N′F.

A cause de l'égalité des angles AME, AM′E, et de celle des angles AQE, AQ′E, les triangles MQE, M′Q′E sont semblables; et l'on a

$$\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{M'E}}=\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{M'Q'}}.$$

Pour la même raison,

$$\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{M'F}}=\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{M'N'}}.$$

On tire, de ces deux proportions,

$$\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{MF}}=\frac{\mathrm{M'E}}{\mathrm{M'F}}\cdot\frac{\mathrm{M'N'}}{\mathrm{M'Q'}}\cdot\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{MN}}.$$

Le rapport des distances ME, MF est donc connu. Par suite, le sommet cherché M, qui doit se trouver sur la circonférence AEFB, appartient aussi au lieu des points tels, que les distances de chacun d'eux aux points E, F, G., 317. soient dans un rapport donné. Or, on sait que ce lieu est une circonférence. On peut donc regarder le problème comme résolu.

Problème XII.

Inscrire, à un rectangle donné ABCD, un rectangle semblable à un autre rectangle donné EFGH.

FIG. 158. Renversons d'abord la question, et proposons-nous de *circonscrire, au rectangle* EFGH, *un rectangle* MNPQ *semblable au rectangle* ABCD.

Ce problème *inverse*, cas particulier du Problème XI, peut être résolu aussi comme il suit :

L'angle M étant droit, le sommet M appartient à la circonférence décrite sur EF comme diamètre; donc il s'agit d'évaluer l'un ou l'autre des segments EM, MF, ou seulement leur rapport.

Les triangles EMF, FNH, évidemment semblables, donnent

$$\frac{EM}{FN} = \frac{MF}{NH} = \frac{EF}{FH}.$$

D'ailleurs, le rectangle NMPQ devant être semblable à ABCD, on a

$$\frac{MN}{NP} = \frac{AB}{BC};$$

ou, à cause de $HP = EM$,

$$\frac{MF + FN}{NH + EM} = \frac{AB}{BC}.$$

Remplaçons, dans cette dernière proportion, FN par $EM \cdot \frac{FH}{EF}$, et NH par $MF \cdot \frac{FH}{EF}$; nous aurons

$$\frac{MF + EM \cdot \frac{FH}{EF}}{EM + MF \cdot \frac{FH}{EF}} = \frac{AB}{BC};$$

puis, par un calcul très-simple,

$$\frac{EM}{MF} = \frac{EF \cdot BC - FH \cdot AB}{EF \cdot AB - FH \cdot BC}.$$

Le rapport des segments EM, MF étant connu, on peut déterminer le point M par sa projection I; et alors le rectangle MNPQ sera connu.

Si ensuite l'on divise AB dans le rapport de MF à FN, on aura le sommet R d'un rectangle RSTU, inscrit à ABCD, et semblable à EFGH.

Remarque. Ce problème donne lieu à une intéressante discussion algébrique.

Problème XIII.

Par un point O, situé sur la bissectrice d'un angle droit CAB, mener une transversale MN telle, que le segment de cette droite, compris entre les côtés de l'angle, ait une longueur donnée l.

Du point donné O, abaissons, sur les côtés de l'angle, les perpendiculaires égales OD, OE. Par le pied N de la transversale cherchée, menons NF perpendiculaire à MN, puis NG perpendiculaire à DO. Si le point F, où NF rencontre DO prolongée, était connu, on obtiendrait le point N, en décrivant, sur OF comme diamètre, une demi-circonférence. FIG. 159.

Or, les triangles rectangles MDO, FGN sont égaux, car ils ont les côtés perpendiculaires, et $DO = OE = GN$. Donc $MO = NF$. Il suit de là que

$$\overline{MN}^2 = l^2 = (ON + NF)^2 = \overline{ON}^2 + \overline{NF}^2 + 2ON \cdot NF.$$

D'un autre côté, le triangle ONF étant rectangle en O, on a

$$\overline{ON}^2 + \overline{NF}^2 = \overline{OF}^2, \quad ON.NF = OF.GN = OF.OE.$$

L'égalité précédente devient donc

$$l^2 = \overline{OF}^2 + 2OF.OE,$$

ou

$$l^2 = OF(OF + 2OD).$$

Supposons que, du point D comme centre, avec DF pour rayon, nous décrivions la circonférence FHF′, et que nous prolongions EO jusqu'à sa rencontre en H avec la circonférence. Nous aurons

$$OF' = OF + 2OD, \quad \overline{OH}^2 = OF.OF';$$

d'où, à cause de $l^2 = OF.OF'$,

$$OH = l.$$

Il faut donc, pour résoudre le problème : 1° prendre $OH = l$; 2° décrire, du point D comme centre, la circonférence FHF′ ; 3° décrire, sur OF et OF′ comme diamètres, les circonférences ONF, ON″F′; 4° joindre le point O avec les points où ces circonférences coupent AB ou son prolongement : les droites MN, M′N′, M″N″, M‴N‴ satisfont à l'énoncé, ou à l'énoncé généralisé.

Remarques. I. Si la longueur donnée l est moindre que le double de AO, la circonférence OF ne coupe pas AB, et les solutions MN, M′N′ n'existent plus.

II. La question que nous venons de résoudre est connue sous le nom de *Problème de Pappus* (*).

(*) Pappus, géomètre grec, vivait dans le quatrième siècle ; il est surtout célèbre par l'ouvrage intitulé : *Collections mathématiques*. La discussion du Problème de Pappus se trouve dans mon *Application de l'Algèbre à la Géométrie* (1848).

Problème XIV.

Par un point O, situé sur la bissectrice d'un angle droit CAB, mener une transversale MN telle, que le triangle MAN soit équivalent à un carré donné m^2.

Cherchons, comme dans le problème précédent, à déterminer le point où DO rencontre NF perpendiculaire à MN. Si nous abaissons FP perpendiculaire à AB, nous aurons, à cause de l'égalité des triangles MDO, NPF : FIG 160.

$$GFPN = 2MDO.$$

De même, le rectangle GOEN est double du triangle OEN.

Si donc nous construisons le carré DO'E'A égal à DOEA, le rectangle FPE'O' sera double du triangle MAN ; c'est-à-dire qu'il sera équivalent à $2m^2$.

Or, nous connaissons la hauteur OE de ce rectangle. Il suffit donc, pour trouver le point F, de prendre O'F égale à $2\dfrac{m^2}{\mathrm{OE}}$.

Problème XV.

Par un point O, situé dans un angle droit CAB, mener une transversale MN telle, que le triangle MAN soit équivalent à un carré donné m^2.

Du point donné O, abaissons sur AB la perpendiculaire OE ; soit O' le point où elle rencontre la bissectrice de l'angle droit. Joignons le pied N de la transversale cherchée, avec le point O', par la transversale M'O'N. Il est clair que FIG. 161.

$$\frac{\mathrm{M'AN}}{\mathrm{MAN}} = \frac{\mathrm{M'A}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{O'E}}{\mathrm{OE}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{OE}}.$$

Conséquemment,

$$\mathrm{M'AN} = m^2 \cdot \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{OE}}.$$

Ainsi, pour construire le point N et la transversale MN, il suffit de mener, par le point O′, situé sur la bissectrice, une droite M′O′N qui détermine un triangle équivalent à $m^2 . \frac{\text{AE}}{\text{OE}}$. Le problème proposé est donc ramené au précédent.

Problème XVI.

Par un point O, situé dans le plan d'un angle quelconque CAB, mener une transversale MN telle, que le triangle MAN soit équivalent à un carré donné m^2.

FIG. 162. Après avoir tiré OE parallèle à AC, élevons AC′, EO′ perpendiculaires à AB, et coupons ces droites par MM′, OO′ parallèles à AB : les points M′, O′, N seront en ligne droite, et les triangles M′AN, MAN seront équivalents.

Il suffit donc, pour trouver le point N et la transversale MN, de mener par le point O′, situé dans l'angle droit C′AB, la transversale M′O′N telle, que le triangle M′AN soit équivalent au carré donné m^2. Ce problème est celui que nous venons de résoudre.

Remarque. Les solutions des deux derniers problèmes sont fondées sur le *principe de la transformation des figures* (p. 96).

Problème XVII.

Par un point O, situé dans le plan d'un angle CAD, mener une transversale MN telle, que le rectangle des segments AM, AN déterminés par cette droite sur les côtés de l'angle, soit équivalent à un carré donné m^2.

FIG. 163. Si l'angle donné est droit, le rectangle construit sur AM et AN sera double du triangle MAN ; de telle sorte que celui-ci sera équivalent à la moitié du carré donné.

Si l'angle A est aigu ou obtus, abaissons MP perpendiculaire à AB ; nous aurons

$$\text{MAN} = \frac{1}{2}\,\text{AN} . \text{MP} = \frac{1}{2}\,\text{AN} . \text{AM} . \frac{\text{MP}}{\text{AM}} = \frac{1}{2}\,m^2\,\frac{\text{MP}}{\text{AM}}\,;$$

c'est-à-dire que le triangle MAN sera, au carré m^2, dans un rapport connu.

Dans les deux cas, le problème est ramené au précédent.

Problème XVIII.

Par un point O, situé dans le plan d'un angle CAB, mener une transversale MN telle, que le rectangle des segments de cette droite, interceptés entre le point donné et les côtés de l'angle, soit équivalent à un carré donné m^2.

Après avoir tracé OD parallèle à AB, prenons, sur cette parallèle, une distance OF troisième proportionnelle à OD et m. Nous aurons FIG. 164.

$$\text{DO} \,.\, \text{OF} = m^2 = \text{OM} \,.\, \text{ON}.$$

Les points M, N, D, F appartiennent donc à une même circonférence. Conséquemment, pour déterminer le point N, il suffit de décrire, sur OF, un arc capable de l'angle ONF = MDO = A.

Remarque. Ordinairement, le problème admet *deux* solutions.

Problème XIX.

Inscrire, à un angle donné CAB, une droite MN de longueur donnée l, de manière que le rectangle résultant soit équivalent à un carré donné m^2.

Soit MP la hauteur du triangle cherché : nous aurons AN . MP = $2m^2$. D'un autre côté, FIG. 165.

$$l^2 = \overline{\text{AM}}^2 + \overline{\text{AN}}^2 - 2\,\text{AN} \,.\, \text{AP}.$$

Pour simplifier cette équation, et pour y introduire le rectangle des côtés cherchés AM, AN, abaissons, d'un point quelconque D de AC, DE perpendiculaire sur AN.

Nous aurons, en appelant p, q, r les trois côtés du triangle rectangle ainsi déterminé,

$$AP = \frac{q}{r} AM, \quad MP = \frac{p}{r} AM.$$

L'équation précédente devient alors

$$l^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 - 2\frac{q}{r} AN \,.\, AM;$$

ou, à cause de

$$\frac{p}{r} AM \,.\, AN = 2m^2:$$

$$l^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 - 4\frac{q}{p} m^2.$$

Dans le second membre, ajoutons et retranchons

$$2AM \,.\, AN = 4\frac{r}{p} m^2;$$

il nous vient

$$(AM + AN)^2 = l^2 + 4\frac{q+r}{p} m^2.$$

Nous voyons donc qu'indépendamment du rectangle des deux côtés AM, AN, nous connaissons la somme de
G., 131. ces droites. La question est ainsi ramenée à un problème connu.

Remarques. I. Quand on veut décomposer une somme donnée en deux facteurs dont le produit est donné, il faut que le carré de la somme ne soit pas inférieur à *quatre* fois ce produit.

Conséquemment, la condition de possibilité du problème est

$$l^2 + 4\frac{q+r}{p} m^2 \geqq 8\frac{r}{p} m^2,$$

ou

$$l^2 \geqq 4\frac{r-q}{p}m^2.$$

II. Les rapports $\frac{p}{r}, \frac{q}{r}, \frac{p}{q}$ sont, comme l'on sait, désignés sous les noms de *sinus*, *cosinus* et *tangente* de l'angle A. En employant ces dénominations, nous aurons, au lieu des relations précédentes,

$$\text{AM}.\text{AN} = \frac{2}{\sin.\text{A}}m^2,\quad (\text{AM}+\text{AN})^2 = l^2 + 4\,m^2 \cot.\frac{1}{2}\text{A},$$

$$l^2 \geqq 4\,m^2 \operatorname{tg}.\frac{1}{2}\text{A}.$$

III. Lorsque $l^2 = 4m^2 \text{ tang.}\frac{1}{2}\text{A}$, la droite l est la plus petite possible. En même temps, le triangle MAN est isoscèle; et la valeur commune des côtés AM, AN est $\dfrac{l}{2\sin\frac{1}{2}\text{A}}$.

Problème XX.

Inscrire, entre les côtés d'un angle donné CAB, un triangle MNP semblable à un triangle donné DEF, et ayant un sommet donné P.

Décrivons sur DF, homologue du côté inconnu MP, un arc capable de l'angle connu CAP. Décrivons de même, sur EF, un arc capable de l'angle BAP. Ces arcs, qui se coupent en F, se coupent en un second point O. Menons OD, OE, OF. Prenons, sur les côtés de l'angle donné, des distances AM, AN, déterminées par les proportions FIG. 167.

$$\frac{\text{OF}}{\text{AP}} = \frac{\text{OD}}{\text{AM}},\quad \frac{\text{OF}}{\text{AP}} = \frac{\text{OE}}{\text{AN}}:$$

les points M, N seront les deux sommets cherchés.

On justifie aisément cette construction.

Problème XXI.

A un triangle ABC, inscrire un triangle DEF semblable à un triangle donné MNP, et qui ait l'un de ses sommets situé en D sur le côté AB.

FIG. 168. Sur le côté MN, homologue du côté inconnu DE, décrivons un arc capable de l'angle B. De même, décrivons sur MP un arc capable de l'angle A. Menons ensuite, par le point M, une droite A'B' telle, que l'on ait

$$\frac{\mathrm{MA}'}{\mathrm{MB}'}=\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DB}}:$$

ce problème auxiliaire ne présente aucune difficulté.

Cela posé, si nous menons A'P et B'N, nous formons un triangle A'B'C', semblable au triangle ABC ; car ces triangles ont, par hypothèse, deux angles égaux chacun à chacun. Il suffit donc, pour achever la construction, de faire les angles ADF, BDE, respectivement égaux à A'MP, B'MN : on obtient ainsi les sommets F, E.

Problème XXII.

Construire un triangle, connaissant ses trois hauteurs.

Désignons par a, b, c, les côtés du triangle, et par a', b', c', les hauteurs correspondantes. Nous avons

$$aa'=bb'=cc';$$

d'où

$$\frac{a}{b'}=\frac{b}{a'}=\frac{c}{\left(\frac{a'b'}{c'}\right)}.$$

Cette proportion continue apprend que le triangle cherché est semblable à celui dont les côtés seraient b', a', et une quatrième proportionnelle à c', a', b'. Si l'on construit ce triangle auxiliaire, il sera facile ensuite de tracer le triangle cherché, en observant que, dans deux triangles semblables, les hauteurs correspondant aux côtés homologues sont des droites homologues.

Remarque. Le problème est possible, si l'on peut construire le triangle auxiliaire. Admettons que l'on ait $a' > b' > c'$, d'où $a' < \frac{a'\,b'}{c'}$. Alors la condition de possibilité est

$$\frac{a'b'}{c'} < a' + b'.$$

Problème XXIII.

Construire un triangle, connaissant deux hauteurs et le rayon du cercle inscrit.

Soient : a', b' les hauteurs données; a, b les côtés inconnus correspondants; c le troisième côté; r le rayon du cercle inscrit.

L'aire du triangle est représentée par chacune des trois expressions,

$$\frac{1}{2}aa',\ \frac{1}{2}bb',\ \frac{1}{2}(a + b + c)r;$$

donc

$$aa' = bb' = (a + b + c)\,r\,;$$

d'où

$$\frac{a}{b'} = \frac{b}{a'} = \frac{a + b + c}{\dfrac{a'b'}{r}}.$$

On voit, par cette proportion continue, que le triangle cherché est semblable à celui dont deux côtés et le périmètre seraient b', a' et la quatrième proportionnelle à r, a', b'. Le problème peut donc être regardé comme résolu.

Problème XXIV.

Construire un triangle, connaissant la hauteur a' abaissée sur côté inconnu a, le rayon r du cercle inscrit, et le rayon α du cercle ex-inscrit, tangent au côté a.

En raisonnant comme dans le problème précédent, on a d'abord

$$aa' = (a + b + c)\, r = (b + c - a)\, \alpha.$$

On déduit, de ces deux égalités,

$$a + b + c = \frac{aa'}{r}, \quad b + c - a = \frac{aa'}{\alpha};$$

puis, de celles-ci :

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Cette *équation de condition* entre a', r et α nous apprend que :

Dans tout triangle, l'inverse de chacune des hauteurs est égal à la demi-différence entre l'inverse du rayon du cercle inscrit, et l'inverse du rayon du cercle ex-inscrit, opposé à cette hauteur.

Conséquemment aussi :

Tous les triangles dans lesquels les rayons du cercle inscrit et de l'un des cercles ex-inscrits sont constants ont même hauteur.

En revenant au problème proposé, nous voyons qu'il est *indéterminé* ou *impossible,* selon que les données satisfont ou ne satisfont pas à la relation

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Problème XXV.

Construire un triangle, connaissant la hauteur a' abaissée sur le côté inconnu a, et les rayons β, γ des cercles ex-inscrits, tangents aux côtés b, c.

Nous avons, par les expressions connues de l'aire du triangle :

$$aa' = (a + c - b)\,\beta = (a + b - c)\,\gamma\,;$$

puis, par un calcul semblable au précédent :

$$a + c - b = \frac{aa'}{\beta}, \quad a + b - c = \frac{aa'}{\gamma},$$

et

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right).$$

Ainsi, *dans tout triangle, l'inverse de chacune des hauteurs est égal à la demi-somme des inverses des rayons des cercles ex-inscrits, adjacents à cette hauteur,* etc.

Problème XXVI.

Construire un triangle, connaissant les rayons α, β, γ des trois cercles ex-inscrits.

On a, comme précédemment,

$$\alpha\,(b + c - a) = \beta\,(c + a - b) = \gamma\,(a + b - c)\,;$$

d'où

$$\frac{b + c - a}{\beta} = \frac{c + a - b}{\alpha} = \frac{a + b - c}{\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)}.$$

On déduit, de cette proportion continue,

$$\frac{a}{\alpha+\frac{\alpha\beta}{\gamma}}=\frac{b}{\beta+\frac{\alpha\beta}{\gamma}}=\frac{c}{\alpha+\beta},$$

Ainsi, le triangle cherché est semblable à celui qui aurait pour côtés $\alpha+\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, $\beta+\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, $\alpha+\beta$.

Si l'on construit ce triangle auxiliaire, et que l'on décrive les trois cercles qui le touchent extérieurement, il suffira, pour avoir le triangle cherché, de mener des parallèles aux côtés du triangle auxiliaire, à des distances des trois centres respectivement égales à α, β, γ.

Problème XXVII.

Construire un triangle, connaissant le rayon r du cercle inscrit, et les rayons α, β de deux des trois cercles ex-inscrits.

Ce problème se résout aussi facilement que le précédent, et par les mêmes considérations.

Problème XXVIII.

Construire un triangle ABC, connaissant la base BC, l'angle opposé A et le rapport des deux derniers côtés.

FIG. 166. Le sommet A appartient à l'arc capable de l'angle donné, décrit sur la base BC.

Supposons menée la bissectrice AED : elle passe au milieu D de l'arc BDC; de plus, elle divise la base BC en deux segments BE, EC, proportionnels aux côtés AB, AC. Il est donc facile de trouver les points D, E, de cette bissectrice : l'intersection de cette ligne avec l'arc BAC sera le sommet A.

Problème XXIX.

Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés A, B, et qui touche une droite donnée CD.

Soit O le centre de la circonférence demandée, et soit E le point de contact de cette circonférence avec la droite CD. Menons AB, et prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre avec CD, en F. La tangente FE est moyenne proportionnelle entre FA et FB ; donc le point E se détermine aisément. Ce point étant connu, on obtient le centre par l'intersection de EO perpendiculaire à CD, avec GO perpendiculaire au milieu de AB. FIG. 170.

Remarque. Le problème admet ordinairement deux solutions. Pour qu'il soit possible, il faut que les points A, B soient d'un même côté de CD.

Problème XXX.

Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés A, B, et qui touche une circonférence donnée I.

Soit E le point de contact de la circonférence demandée O avec la circonférence donnée I. Soit F le point où la droite AB rencontre la tangente commune EF, Si nous menons une sécante quelconque FDC, nous aurons FIG. 171.

$$\overline{FE}^2 = FA \cdot FB = FD \cdot FC ;$$

donc les quatre points A, B, C, D appartiennent à une même circonférence.

Pour résoudre le problème, il faut donc : 1° décrire une circonférence quelconque passant par les points A, B et coupant la circonférence donnée ; 2° tirer les cordes AB, CD, et les prolonger jusqu'à leur rencontre en F ; 3° mener, par ce point, des tangentes FE, FE′ à la circonférence donnée. Les points E, E′, où cette circonférence touche les deux cercles cherchés, étant connus, le problème s'achève comme le précédent.

Problème XXXI.

Decrire une circonférence O qui passe par un point donné A, et qui touche deux droites MN, PQ.

FIG. 172. Que les droites MN, PQ se coupent ou qu'elles soient parallèles, nous pouvons facilement construire leur *axe de symétrie* CD, axe qui est aussi celui de toute la figure. Si donc nous abaissons AE perpendiculaire à CD, et que nous prolongions cette droite d'une longueur égale EA′, le point A′ appartiendra à la circonférence demandée. Il suffit donc de faire passer, par les points A, A′, une circonférence qui touche la droite PQ (Prob. XXIX).

Problème XXXII.

Décrire une circonférence O qui passe par un point donné A, et qui touche deux circonférences données B, C.

FIG. 173. Soient D, E les points de contact inconnus. Menons la corde ED, et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre, en F, avec la ligne des centres. Les circonférences B, O se touchant extérieurement en E, ce point de contact E est un centre de similitude *inverse*. De même, les circonférences O, C ont pour centre de similitude *inverse* le point D. Donc (Th. VII) F est le centre de similitude *directe* des circonférences données.

Si nous prolongeons FDE jusqu'à sa rencontre en L avec la circonférence B, les points D, L seront homologues dans les circonférences données; et, en appelant H, H′, K, K′ les points de rencontre de BC avec ces lignes,

lignes, nous aurons

$$\frac{FL}{FD} = \frac{FH}{FK'}.$$

D'ailleurs,

$$FH \,.\, FH' = FL \,.\, FE\,;$$

donc, en multipliant membre à membre,

$$FH' \,.\, FK' = FD \,.\, FE.$$

Cette relation nous apprend que les quatre points H', K', D, E sont sur une même circonférence.

Soit maintenant G le point inconnu où la droite AF rencontre le cercle cherché O. Nous aurons

$$FD \,.\, FE = FA \,.\, FG\,;$$

d'où, à cause de l'égalité précédente,

$$FH' \,.\, FK' = FA \,.\, FG.$$

Ainsi, les quatre points A, H', K', G sont situés aussi sur une même circonférence.

Construction. Après avoir mené la ligne des centres BC et avoir construit le centre de similitude F, on trace AF. Par les points A, H', K' on fait passer une circonférence, laquelle coupe AF en un point G. Il suffit ensuite de faire passer, par les points A, G, une circonférence qui touche l'un des deux cercles donnés (Prob. XXX) : elle touche en lautre, et satisfait à la question *.

Remarque. Par les points A, G, on peut faire passer deux circonférences tangentes au cercle B. D'un autre côté, si, dans la construction précédente, on substitue le centre de similitude *inverse* au centre de similitude *directe,*

---

* Alors qu'il était élève à l'École polytechnique, Cauchy a donné une autre solution de ce problème, fondée sur le Théorème XI du Livre II, théorème qui paraît appartenir à l'illustre géomètre. Voyez *Correspondance de l'École polytechnique,* t. 1, p. 193.

on doit remplacer le point H′ par le point H. On trouvera donc, au lieu du point G, un certain point G′. Si, par les points A, G′, on fait passer deux circonférences tangentes au cercle B, elles satisferont encore à la question. Celle-ci peut donc admettre *quatre* solutions.

Nous laissons au lecteur le soin d'examiner dans quels cas le nombre des solutions est inférieur à quatre.

Problème XXXIII.

Décrire une circonférence O qui passe par un point donné A, et qui touche une droite donnée BC et une circonférence donnée I.

FIG. 174. Soit E le point inconnu où la circonférence cherchée touche la droite BC, et soit D le point de contact des deux circonférences. Menons OI qui passe par ce point D ; joignons le centre inconnu O au point E ; menons, par le centre donné I, la droite FIKH perpendiculaire à BC ; enfin, tirons les cordes ED, FD, DK.

Le rayon OE, perpendiculaire à la tangente BC, est parallèle à IF ; donc les angles EOD, FID sont égaux, comme alternes internes, et les triangles isoscèles EOD, FID sont semblables. Par suite, les points E, D, F sont sur une même ligne droite. De là résulte que l'angle EDK est droit, parce qu'il est supplémentaire de l'angle FDK, inscrit à un demi-cercle.

Le quadrilatère EDKH ayant deux angles opposés droits, est inscriptible. On a donc

$$FD \,.\, FE = FK \,.\, FH.$$

Soit G le point où la droite connue AF rencontre la circonférence cherchée O. On a aussi

$$FA \,.\, FG = FD \,.\, FE.$$

La comparaison de ces deux égalités donne

$$FA \,.\, FG = FK \,.\, FH.$$

Ainsi, les quatre points A, G, K, H sont situés sur une même circonférence.

On construira donc aisément le point G, après quoi il ne s'agira plus que de faire passer, par les points A, G, une circonférence tangente à la droite BC (Prob. XXIX).

Remarque. Ordinairement, il y a deux circonférences passant par les points A, G, et tangentes à la droite BC. D'un autre côté, si l'on remplace le point F par le point K, *et vice versa*, le point G sera lui-même remplacé par un autre point G'. Le problème peut donc admettre *quatre* solutions.

Problème XXXIV.

Décrire une circonférence O qui touche deux droites données AB, AC, et une circonférence donnée I.

Soient N, P, R les points de contact de la circonférence O avec les droites données et avec la circonférence I. Menons ON, OP, OR ; du point O, décrivons une circonférence qui passe par le centre I de la circonférence donnée : elle coupe les prolongements des droites ON, OP en des points M, Q tels, que FIG. 175.

$$MN = PQ = IR.$$

Conséquemment, si l'on mène des parallèles A'B', A'C' aux droites AB, AC, qui en soient distantes d'une longueur égale au rayon IR de la circonférence donnée, ces parallèles seront tangentes à la circonférence OI.

On est donc ramené à trouver le centre O d'une circonférence passant en un point donné I, et tangente à deux droites données A'B', A'C' (Prob. XXXI).

Remarque. Si l'on construit les droites A''B'', A''C'', symétriques de A'B', A'C' par rapport à AB, AC, respectivement, on pourra trouver deux nouvelles circonférences auxiliaires, passant en I, et tangentes à A''B'', A''C''. Le problème comporte donc, au plus, *quatre* solutions (*).

Problème XXXV.

Décrire une circonférence tangente à une droite donnée PQ et à deux circonférences données AN, BM.

Il peut arriver plusieurs cas : 1° la circonférence cherchée peut toucher extérieurement les circonférences données ; 2° elle peut les toucher intérieurement ; 3° elle peut toucher l'une d'elles intérieurement et l'autre extérieurement.

Fig. 176. Soit, pour fixer les idées, O le centre d'une circonférence tangente à la droite PQ et tangente, extérieurement, aux circonférences données. Décrivons, du point O comme centre, une circonférence passant par le centre A du plus petit des cercles donnés : elle touchera la circonférence décrite du point B, comme centre, avec un rayon BF égal à la différence des rayons donnés ; elle touchera aussi la droite P'Q' menée parallèlement à PQ, à une distance de cette droite égale au rayon AD de la petite circonférence. La question est donc ramenée au Problème XXXIII.

Remarque. Des quatre circonférences satisfaisant à ce dernier problème, il n'y en a que *deux* qui conduisent à des solutions de la question proposée : ce sont les circonférences tangentes, extérieurement, au cercle BF. En effet, si l'on considère une circonférence O' passant en A, tan-

(*) Dans le *Journal de l'École polytechnique* (11e Cahier, p. 199), le problème dont il s'agit est placé parmi ceux qui ont *huit* solutions. Cette légère inadvertance ne diminue en rien la valeur du célèbre Mémoire de Gaultier.

gente à P′Q′ et ayant, avec le cercle BF, un contact *intérieur*, une circonférence concentrique avec C′ peut bien toucher le cercle AD et la droite PQ, mais elle ne touche pas la circonférence BC.

Si l'on remplace P′Q′ par la droite P″Q″, symétrique de P′Q′ relativement à PQ, et que l'on conserve la circonférence auxiliaire BF, on trouve *deux* autres cercles satisfaisant à la question.

Enfin, les droites P′Q′, P″Q″, successivement combinées avec une circonférence décrite du point B comme centre, et dont le rayon soit BC + AD, donneront encore *quatre* solutions du problème. Le nombre de ces solutions peut donc s'élever à *huit*.

Problème XXXVI.

Décrire une circonférence tangente à trois circonférences données A, B, C.

Première solution. Soit O le centre de la circonférence demandée, et soient M, N, P les points de contact inconnus. Menons OA, OB, OC. Décrivons, du point O comme centre, une circonférence qui passe par le centre B du plus petit des cercles donnés, et qui coupe les rayons OA, OC aux points D, E : elle sera tangente aux cercles qui seraient décrits des points A, C comme centres, avec AD, CE pour rayons. La question est donc ramenée à celle-ci : *décrire une circonférence* OB *qui passe par un point donné* B, *et qui touche deux circonférences données.* FIG. 177.

Ce dernier problème a été résolu ci-dessus : il admet quatre solutions, parmi lesquelles *deux*, seulement, peuvent conduire à des solutions du problème actuel.

En remplaçant les cercles AB, CE par deux cercles ayant pour rayons, respectivement, AM + BP, CN + BP, et en combinant deux à deux ces cercles et les deux premiers, on trouvera les *six* autres circonférences qui satisfont à la question.

Seconde solution. L'élégante solution qu'on va lire est due en partie à Bobillier, en partie à Gergonne; elle est extraite, presque textuellement, de la *Géométrie* du premier de ces savants professeurs.

Les circonférences données peuvent être touchées toutes trois extérieurement ou toutes trois intérieurement; chacune peut être touchée extérieurement et les deux autres intérieurement, ou bien intérieurement et les deux autres extérieurement.

Deux circonférences qui déterminent, sur chacune des trois circonférences données, un contact extérieur et un contact intérieur, sont appelées *circonférences conjuguées*.

Considérons les circonférences conjuguées abc, $a'b'c'$,
FIG. 178. qui touchent les circonférences données, l'une extérieurement et l'autre intérieurement. Le point de contact a' est le centre de similitude directe de $a'b'c'$, $aa'a''$; le point de contact a est le centre de similitude inverse de abc, $aa'a''$. Donc la droite aa' doit passer par le centre de similitude inverse de abc, $a'b'c'$. Il en est de même pour bb' et pour cc'. Par conséquent, ces trois droites concourent en un point o, qui est ce centre de similitude. De plus, si l'on prolonge aa' en s, et cc' en t, les droites os et oa', ot et oc sont des droites homologues; d'où résulte

$$\frac{os}{oa'} = \frac{ot}{oc'},$$

ou

$$os \,.\, oc' = oa' \,.\, ot.$$

On a aussi

$$oc \,.\, ot = os \,.\, oa;$$

donc

$$oc \cdot oc' = oa \cdot oa' = ob \cdot ob'.$$

Le point o est donc le *centre radical* des circonférences données (*).

La droite ab, passant par le centre de similitude inverse de abc, $aa'a''$, et par le centre de similitude inverse de abc, $bb'b''$, doit contenir le centre de similitude directe de $aa'a''$, $bb'b''$. Il en est de même pour $a'b'$. Donc m est ce centre de similitude. De même, m' est le centre de similitude directe de $bb'b''$, $cc'c''$; enfin m'' est le centre de $aa'a''$, $cc'c''$. Donc $mm'm''$ est l'axe de similitude directe des trois circonférences données.

A cause de la relation $oa \cdot oa' = oc \cdot oc'$, les quatre points a, a', c, c' sont situés sur une même circonférence ; donc

$$m''a \cdot m''c' = m''a' \cdot m''c'.$$

Ainsi, le point m'' appartient à l'axe radical des deux circonférences cherchées. On prouverait, de la même manière, que les points m' et m'' appartiennent à cet axe ; d'où l'on conclut que $mm'm''$, axe de similitude directe des circonférences données, est en même temps l'axe radical des deux circonférences conjuguées.

Puisqu'il en est ainsi, les tangentes en a et a' doivent se couper en un point x situé sur cette droite; et il en est de même des tangentes en b, b', et des tangentes en c, c'.

La polaire du point x est aa' ; donc le pôle p de $mm'm'$ doit se trouver sur aa'. Ainsi, *les pôles de l'axe de similitude directe des trois circonférences données, par rapport*

(*) On a vu, ci-dessus, une partie de cette démonstration (Th. XCI).

à chacune d'elles, sont placés respectivement sur les trois cordes de contact aa′, bb′, cc′.

De là cette construction : 1° *tracez l'axe de similitude des trois circonférences* A, B, C ; 2° *cherchez les pôles de cet axe par rapport à chaque circonférence ;* 3° *joignez ces pôles* p, p′, p″ *au centre radical* o.

En remplaçant l'axe de similitude directe par chacun des trois axes de similitude inverse, on obtient les trois autres couples de circonférences conjuguées.

Problème XXXVII.

Décrire une circonférence O passant par deux points donnés A, B et interceptant, sur un cercle donné C, une corde DE de longueur donnée L.

Fig. 179. Faisons passer, par les points A, B, une circonférence quelconque ABFG, qui coupe en F, G la circonférence donnée C. Les cordes AB, FG, et la *corde inconnue* DE, se coupent en un même point I, centre radical des trois circonférences. Ce point étant obtenu par la construction précédente, il suffira d'*inscrire, au cercle donné* C, *une corde* DE, *de longueur donnée, passant par le point* I.

Problème XXXVIII.

Décrire une circonférence I, qui passe par deux points donnés A, B, et qui coupe, suivant un diamètre, une circonférence donnée O.

Ce problème peut être regardé comme un cas particulier de celui qui précède. On peut aussi le résoudre directement, comme il suit.

Fig. 180. Si l'on joint le point A au centre O de la circonférence donnée, et qu'on prolonge AO jusqu'à sa rencontre en E avec la circonférence I, on aura

$$OE \cdot OA = OC \cdot OD = R^2.$$

On obtient donc le point E en construisant une troisième proportionnelle DE à la droite AO et au rayon R du cercle donné.

Problème XXXIX.

Trouver, sur un arc AB, un point C tel, que le rectangle de ses distances aux extrémités de l'arc soit équivalent à un carré donné p^2.

Si l'on mène le diamètre CD, et qu'on abaisse CE perpendiculaire à AB, on a, d'après un théorème connu, FIG. 169.

$$AC \cdot CB = CD \cdot CE;$$ G., 282.

et, par suite,

$$CD \cdot CE = p^2.$$

On tire, de cette dernière égalité, $CE = \frac{p^2}{CD}$. La distance du point C à la corde AB étant connue, le problème peut être regardé comme résolu.

Problème XL.

Par un point A, extérieur à un cercle O, mener une droite ABC qui soit partagée en moyenne et extrême raison par la circonférence.

1° Supposons d'abord que la corde BC soit le plus grand des deux segments de la droite ABC, de manière que FIG. 177.

$$\overline{CB}^2 = AC \cdot AB.$$

Si nous menons la tangente AD, nous aurons

$$\overline{AD}^2 = AC \cdot AB.$$

On déduit, de ces égalités, $BC = AD$; en sorte que le problème est ramené à l'un des précédents (Problème XXXVII).

Pour qu'il soit possible, AD ne doit pas surpasser le diamètre du cercle. Cette condition équivaut à

$$\overline{OA}^2 - \overline{OD}^2 \overline{\overline{<}} 4\overline{OD}^2\ ;$$

d'où, en désignant par R le rayon du cercle et par d la distance OA,

$$d \overline{\overline{<}} R\sqrt{5}.$$

FIG. 182. 2° Admettons que le segment extérieur AB soit moyen proportionnel entre la sécante entière AC et le segment intérieur BC; nous aurons

$$\overline{AB}^2 = AC\ .\ BC;$$

et, en menant encore la tangente AD,

$$\overline{AD}^2 = AC\ .\ AB.$$

La première égalité équivaut à la proportion

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AC - AB}.$$

Multiplions tous les termes par AB, et remplaçons AC . AB par $\overline{AD}^2$; nous aurons

$$\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}^2 - \overline{AB}^2}.$$

Cette nouvelle proportion démontre que *le carré de* AB *est moyen proportionnel entre le carré construit sur la tangente* AD *et la différence des carrés construits sur* AD *et* AB; c'est-à-dire que, pour trouver AB, *il faut partager, en moyenne et extrême raison, le carré construit sur la tangente; puis chercher la moyenne proportionnelle entre les deux dimensions du plus grand des segments.*

On simplifie cette construction en observant que, dans tout triangle rectangle AFD, les carrés des côtés de l'angle droit et le carré de l'hypoténuse sont entre eux comme les projections AE, DE et AD. Si donc l'hypoténuse est partagée en moyenne et extrême raison au point E, nous aurons

$$\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AF}^2} = \frac{\overline{AF}^2}{\overline{DF}^2},$$

ou

$$\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AF}^2} = \frac{\overline{AF}^2}{\overline{AD}^2 - \overline{AF}^2}.$$

Cette proportion, comparée à la précédente, nous apprend que $AB = AF$.

La condition de possibilité du problème est

$$AF \overline{\overline{>}} AG,$$

ou

$$AF \overline{\overline{>}} R - d.$$

Mais

$$\overline{AF}^2 = \overline{AD}^2 \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = (d^2 - R^2)\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

La condition cherchée est donc

$$(d^2 - R^2)\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \overline{\overline{>}} (d-R)^2,$$

ou

$$(d+R)\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \overline{\overline{>}} d - R;$$

ou enfin, après quelques réductions,

$$d \overline{\overline{<}} R(2+\sqrt{5}).$$

Problème XLI.

Inscrire, à une circonférence donnée O, un triangle isoscèle ABC, connaissant la somme a de la base et de la hauteur.

FIG. 183. Prenons sur le diamètre CI, à partir du point C, la distance CE égale à a. Prenons ensuite, sur la tangente CT, CF égale à $\frac{a}{2}$. Si nous menons EF, cette droite rencontre généralement la circonférence en deux points B, B', sommets de deux triangles CAB, C'A'B' satisfaisant à la question.

Il résulte, en effet, de cette construction, que AB = DE; donc

$$AB + CD = CE = a.$$

Remarque. Pour que le problème soit possible, il faut que le pied P de la perpendiculaire abaissée du centre sur EF soit intérieur au cercle. Or

$$\frac{OP}{CF} = \frac{OE}{EF};$$

d'où

$$OP = \frac{a - R}{\sqrt{5}},$$

R étant le rayon. La condition de possibilité est donc

$$a \overline{\overline{<}} R\,(1 + \sqrt{5}).$$

Problème XLII.

A un cercle donné O, inscrire un trapèze ABCD ayant une hauteur donnée h, et équivalant à un carré donné m^2.

FIG. 184. Menons le diamètre OEF perpendiculaire aux bases, et le rayon OHL perpendiculaire au côté BC du trapèze : le point H est le milieu de ce côté. Joignons ce point au milieu G du côté opposé, par la droite HMG.

Enfin, traçons LN parallèle à GH, et CP perpendiculaire à cette droite.

Le trapèze a pour mesure GH . EF ; donc la longueur de GH est $\frac{m^2}{h}$.

La question se réduit à déterminer le milieu L de l'arc BC, ou la longueur de LN.

Or, les triangles LNO, HMO sont semblables; donc

$$MH = OH \cdot \frac{LN}{OL}.$$

De même, les triangles LNO, CPH sont semblables, et donnent

$$CP = CH \cdot \frac{LN}{OL}.$$

Élevant au carré et ajoutant, on trouve

$$\overline{MH}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{OC}^2 \cdot \left(\frac{LN}{OL}\right)^2;$$

d'où

$$FH = LN.$$

Ainsi, la droite cherchée LN est égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés seraient $\frac{a}{2}$ et $\frac{m^2}{2h}$. Cette droite est donc connue.

Problème XLIII.

Trouver, sur une droite donnée MN, un point C tel, que la somme de ses distances à deux points donnés A, B, soit égale à une longueur donnée l.

Supposons la droite inconnue AC prolongée d'une longueur CD égale à CB; nous aurons $AD = l$; en sorte que le point D appartient à la circonférence DD′ décrite du point A comme centre, avec l pour rayon. FIG. 186.

Si nous abaissons BGH perpendiculaire à MN, et si nous prenons GH = GB, les deux obliques BC, HC seront égales entre elles ; d'où il résulte que le point cherché C est le centre de la circonférence passant par les points B, H, D. De plus, les circonférences BDH, DD' se touchent en D ; car ce point D est sur la ligne des centres.

On a vu précédemment (Prob. XXX) comment on détermine une circonférence tangente à une circonférence donnée, et passant par deux points donnés. Conséquemment, on est conduit à la construction suivante :

Du point donné A, comme centre, avec l pour rayon, on décrit la circonférence DD'. D'un point quelconque N de la droite donnée MN, comme centre, on décrit une circonférence passant au point donné B, et coupant la première circonférence aux points E, F. On mène la corde EF, que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre en T avec BH perpendiculaire à MN. On construit les points de contact D, D' des tangentes menées, du point T, à la circonférence DD'. Les rayons AD, AD' déterminent, par leurs intersections avec MN, deux points C, C', qui satisfont à la question.

Discussion. 1° Lorsque le point H, symétrique du point B par rapport à la droite MN, est intérieur à la circonférence DD', on peut, par ces deux points, faire passer deux circonférences qui touchent la première. Donc le problème admet deux solutions.

2° Si le point H est sur la circonférence DD', il se confond avec le point de contact D, et le problème n'admet plus qu'une solution. En même temps, le point C, qui se trouve en I, à l'intersection de AH avec MN, est le point de cette dernière droite pour lequel la somme des distances aux deux points donnés est un minimum (Liv. I, Prob. X).

3° Enfin, quand le point H est extérieur à MN, le problème proposé est impossible.

Remarque. On sait que le lieu des points tels, que la somme des distances de chacun à deux points fixes A et B, soit une constante *l*, est une *ellipse* ayant A, B pour *foyers*, et dont le *grand axe* est égal à *l*. Conséquemment le problème que nous venons de résoudre peut être énoncé en ces termes : *Construire les points de rencontre d'une droite donnée et d'une ellipse non tracée, mais dont le grand axe et les foyers sont donnés.*

Problème XLIV.

Trouver, sur une droite donnée MN, un point C tel, que la différence de ses distances à deux points donnés A, B, soit égale à une longueur donnée *l*.

L'analyse de ce problème est la même que celle du problème précédent. Elle donne lieu à la construction indiquée dans la figure 187.

Remarque. On sait que le lieu des points tels, que la différence des distances de chacun à deux points fixes A, B, soit une constante *l*, est une *hyperbole* ayant A et B pour *foyers*, et dont l'*axe transverse* est égal à *l*. Conséquemment, le problème que nous venons de résoudre peut être énoncé en ces termes : *Construire les points de rencontre d'une droite donnée et d'une hyperbole non tracée, mais dont l'axe transverse et les foyers sont donnés.*

Problème XLV.

Par l'extrémité A d'un diamètre AB perpendiculaire à une corde CD, mener une droite dont la partie FG, comprise entre la corde et la circonférence, soit de longueur donnée l.

FIG. 224. Si nous menons les cordes AD et GD, nous formons deux triangles FAD, GAD, ayant l'angle A commun, et dans lesquels les angles en G et en D sont égaux, comme ayant pour mesures les moitiés d'arcs égaux. Ces triangles sont donc semblables ; en sorte que

$$AF \,.\, AG = \overline{AD}^2.$$

D'après cette relation, AF et AG sont les côtés d'un rectangle équivalant au carré construit sur AD.

Construction. A l'extrémité D de la corde AD, élevons la perpendiculaire DH égale à L ; puis, sur cette droite, prise comme diamètre, décrivons une circonférence. Joignons le centre I avec le point A, par la sécante AH, qui rencontre cette circonférence en M et en N. Du point A comme centre, avec AM pour rayon, décrivons un arc : il coupe, au point cherché G, la circonférence donnée.

Remarques. I. Si la longueur donnée l est moindre que EB, il y a, indépendamment de AGF, une droite AF′G′ répondant à la question. On obtiendra l'extrémité G′ de cette ligne au moyen de l'arc décrit du point A comme centre, avec AN pour rayon.

II. A chaque droite, telle que AF ou AF′, il en répond une autre, placée symétriquement par rapport à AB, et qui n'a pas été indiquée sur la figure. Le problème peut donc admettre *quatre* solutions.

Problème XLVI.

Par un point A, extérieur à un cercle O, mener une sécante telle, que la somme des carrés des segments BC, AC de cette droite, soit équivalente à un carré donné m^2.

Soit AT la tangente menée par le point donné A. Joignons le point de contact T aux points inconnus B, C ; et menons CD parallèle à BT. Si le point D était trouvé, la construction s'achèverait facilement ; car les triangles ADC, ACT, évidemment semblables, donnent FIG. 225.

$$\overline{AC}^2 = AD \,.\, AT.$$

Ainsi, AC serait une moyenne proportionnelle entre AD et AT.

Pour déterminer AD, observons que les parallèles BT, CD, donnent

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DT}{AD};$$

d'où

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \frac{\overline{DT}^2}{\overline{AD}^2}.$$

A cause de l'égalité ci-dessus, cette valeur se réduit à

$$\overline{BC}^2 = \frac{AT \,.\, \overline{DT}^2}{AD}.$$

La somme des carrés de AC et de BC doit égaler m^2 ; donc

$$AD + \frac{\overline{DT}^2}{AD} = \frac{m^2}{AT}.$$

Prenons maintenant une droite EF, troisième proportionnelle à AT et m. Décrivons, sur EF comme diamètre, une demi-circonférence ; menons la tangente FIG. 226.

$EG = EH = AT$, et tirons GH. Du point M, où cette droite coupe la circonférence, abaissons MN perpendiculaire à EF : le segment EN est la longueur cherchée AD.

En effet, nous avons d'abord

$$EN + NM = EN + NH = EH = AT.$$

En second lieu,

$$EN + NF = EF,$$

ou

$$EN + \frac{\overline{MN}^2}{EN} = EF = \frac{m^2}{AT}.$$

Donc EN et NM sont égaux, respectivement, aux segments AD, DT de la droite AT.

On peut réunir les figures 225 et 226, et l'on obtient ainsi la figure 227.

Problème XLVII.

Par l'un des points d'intersection A de deux circonférences données, mener une corde commune BAC telle, que le rectangle fait sur le segment AB et une droite donnée m, augmenté du rectangle fait sur le segment AC et une droite donnée n, soit équivalent à un carré donné p^2.

FIG. 218. Menons les diamètres AD, AE, puis les cordes BD, CE : ces droites, perpendiculaires à BC, sont parallèles entre elles.

Divisons le diamètre AD, au point F, de manière que

$$\frac{AD}{AF} = \frac{n}{m};$$

puis abaissons FG perpendiculaire à AB : nous avons

$$\frac{AB}{AG} = \frac{m}{n},$$

ou

$$m \cdot AB = n \cdot AG.$$

En remplaçant $m \cdot AB$ par $n \cdot AG$ dans la relation

$$m \cdot AB + n \cdot AC = p^2,$$

nous trouvons

$$n\,(AG + AC) = p^2;$$

d'où

$$GC = \frac{p^2}{n}.$$

La longueur de GC est donc connue.

Actuellement, joignons le point F au point E, et menons FH perpendiculaire à EC. Dans le triangle rectangle OHE, nous connaissons l'hypoténuse et le côté FH, égal à GC. Nous pouvons donc aisément trouver le point H, et ensuite la corde BAC parallèle à FH.

Construction. — Du point donné A, menez les diamètres AD, AE ; partagez AD en F, de telle sorte que $\frac{AD}{AF} = \frac{n}{m}$, sur EF comme diamètre, décrivez une demi-circonférence ; du point F comme centre, avec un rayon égal à la troisième proportionnelle aux droites n, p, décrivez un arc qui coupe en H cette demi-circonférence ; enfin menez, par le point A, BAC parallèle à OH.

Problème XLVIII.

Inscrire, à un cercle donné O, un triangle MNP, dont les côtés soient parallèles à trois droites données AB, CD, EF.

Par un point quelconque G de la circonférence O, menons GH parallèle à EF et GI parallèle à CD : l'angle HGI étant égal à l'angle cherché P, les cordes interceptées IH, FIG. 188.

MN, sont égales entre elles. Il suffit donc, pour obtenir MN, ou pour déterminer le triangle demandé, de résoudre cette question très-simple: *Inscrire, à une circonférence donnée, une corde parallèle à une droite donnée et égale à une droite donnée.*

Remarque. On trouve deux triangles satisfaisant à l'énoncé. Ces triangles sont symétriquement placés par rapport au centre O.

Problème XLIX.

Inscrire, à un cercle donné O, un triangle MNP, dont deux côtés soient parallèles à deux droites données AB, CD, et dont le troisième côté passe par un point donné L.

FIG. 189. Si l'on cherche, comme dans la question précédente, une corde IH égale au côté inconnu MN, et que l'on fasse passer, par le point L, une corde MN égale à IH, le problème pourra être regardé comme résolu.

Problème L.

Inscrire, à un cercle donné O, un triangle MNP, dont deux côtés passent par deux points donnés A, B, et dont le troisième côté soit parallèle à une droite donnée CD.

FIG. 190. Par le sommet inconnu N, menons NE parallèle à AB, et tirons la corde EM. Soit F le point où cette droite, prolongée s'il est nécessaire, rencontre AB. Si ce point F était connu, le problème serait résolu ; car ENM étant égal à l'angle des droites AB, CD, la corde EM pourrait être déterminée en grandeur, et ensuite en position.

Pour trouver le point F, observons que les angles E, F sont égaux, comme alternes internes, et que les angles E, P sont égaux, comme inscrits au même segment; donc les angles P, F sont égaux, et les triangles PAB, MAF, ayant un angle égal et un angle commun, sont semblables. Ainsi

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AP}{AF},$$

ou

$$AM \cdot AP = AB \cdot AF.$$

Si l'on mène une sécante quelconque AGH, on a

$$AG \cdot AH = AB \cdot AF.$$

Dans cette égalité, tout est connu, excepté AF. De plus, les quatre points G, H, B, F sont sur une même circonférence, etc.

Problème LI.

Inscrire, à un cercle donné, un triangle MNP, dont les côtés passent par trois points donnés A, B, C.

Soient encore, comme dans le problème précédent, NE parallèle à AB, puis la corde EMF qui rencontre AB en F. Nous pourrons, comme ci-dessus, construire le point F, après quoi il ne s'agira plus que d'*inscrire, au cercle* O, *un triangle* EMN *dont deux côtés passent par deux points donnés* C, F, *et dont le troisième côté soit parallèle à une droite donnée* AB : ce problème est précisément celui qui précède (*). FIG. 191.

(*) La question que nous venons de résoudre est connue sous le nom de *problème de Castillon*. Résolue d'abord par ce Géomètre, elle l'a été ensuite, de différentes manières, par Lagrange, par Giordano di Ottaiano, et par Malfatti (Voyez *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. III, p. 403).

Problème LII.

Inscrire, à un cercle donné O, un polygone dont un côté passe par un point donné A, et dont les autres côtés soient parallèles à des droites données.

Il y a deux cas à distinguer, suivant que le nombre n des côtés du polygone est *impair* ou *pair*.

1° n impair.

FIG. 192. Inscrivons au cercle, à partir d'un point quelconque M', une ligne brisée M'N'P'Q'R'S'T' dont les côtés soient, respectivement, parallèles aux directions données. Nous trouvons ainsi un arc M'IT' égal à l'arc inconnu MIT. En effet,

$$M'IT' = MIT + MM' - TT' ;$$

et, à cause des couples de cordes parallèles,

$$MM' = NN' = \ldots = TT'.$$

Par suite, la corde M'T' est égale au côté inconnu MT. Il ne s'agit donc plus que d'*inscrire une corde* MT, *égale à une autre corde* M'T', *et passant par le point* A.

2° n pair.

FIG. 193. Si nous effectuons la même construction, il en résulte, à cause de MM' = SS', que M'S est parallèle au côté inconnu MS. Et comme ce côté doit passer par le point donné A, il est complètement déterminé. Le poblème est donc résolu.

Problème LIII.

Inscrire, à un cercle donné O, un polygone MNPQ... dont les côtés passent par des points donnés A, B, C...

FIG. 194. Soient PQ, QR deux côtés consécutifs, lesquels doivent, respectivement passer par les points D, E. Soit, comme

dans le Problème L, PP′ parallèle à la droite DE. On verra que le point F, où DE rencontre la corde P′R, peut aisément être déterminé. Par suite, la recherche du polygone MNPQR est remplacée par celle du polygone MNPP′R, dont un côté PP′ doit être parallèle à une droite donnée, et dont les autres côtés doivent passer par des points donnés.

Semblablement, la recherche de ce second polygone se réduit à celle d'un nouveau polygone ayant deux côtés parallèles à deux droites données, et dont les autres côtés passent par des points donnés.

En continuant de la sorte, on voit que la question proposée est ramenée au problème précédent.

Problème LIV.

Circonscrire, à un cercle donné O, un triangle MNP dont les sommets soient situés sur trois droites données X, Y, Z.

Soit DEF le triangle inscrit ayant pour sommets les points de contact de la circonférence O avec les côtés du triangle circonscrit MNP. Il est clair que les sommets du second triangle sont les pôles des côtés du premier. Conséquemment, la droite X, qui passe par le point M, a son pôle A sur DF. De même, les pôles B, C des deux autres droites données sont situés sur FD, DE. FIG. 195.

Il faut donc, pour résoudre le problème proposé : 1° chercher les pôles A, B, C des droites données ; 2° construire le triangle inscrit DEF, dont les côtés passent par ces trois points (Probl. LI) ; 3° mener, par les sommets de ce triangle, des tangentes à la circonférence O.

Remarque. La solution que nous venons d'indiquer est une application de la *Théorie des polaires réciproques*.

Problème LV.

Construire un cercle tel, que les angles circonscrits, dont les sommets seraient trois points donnés A, B, C, soient respectivement égaux à des angles donnés 2α, 2β, 2γ.

FIG. 214. Soit O le cercle cherché. Menons les tangentes AD, AD′, BE, BE′, CF, CF′. Menons aussi les rayons OD, OE, OF. L'angle DAO, moitié de DAD′, est égal à α. De même, les angles EBO, FCO sont respectivement égaux à β et γ. D'ailleurs, les triangles ADO, BEO, CEO sont rectangles.

Si donc, d'un point arbitraire O′, pris en dehors d'une droite indéfinie XY, nous menons la perpendiculaire O′I, puis les obliques O′A′, O′B′, O′C′ faisant avec XY des angles égaux à α, β, γ; cette construction déterminera des triangles A′IO′, B′IO′, C′IO′, semblables aux premiers.

La comparaison des côtés homologues donne

$$\frac{O'I}{OD}=\frac{O'A'}{OA}, \quad \frac{O'I}{EO}=\frac{O'B'}{OB}, \quad \frac{O'I}{OF}=\frac{O'C'}{OC};$$

d'où, à cause de $OD = OE = OF$:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{O'A'}{O'B'}, \quad \frac{OA}{OC}=\frac{O'A'}{O'C'}.$$

Les distances du point O aux points A, B, C étant proportionnelles à des longueurs connues, ce point sera déterminé par l'intersection de deux circonférences que l'on construira facilement.

Problème LVI.

Construire un cercle O tel, que les tangentes menées à ce cercle, par trois points donnés A, B, C, aient des longueurs données *a*, *b*, *c*.

Des points A, B, C, comme centres, avec *a*, *b*, *c* pour rayons, décrivons trois circonférences. Chacune d'elles coupe orthogonalement le cercle cherché ; car, par exemple, le rayon OD de ce cercle, étant perpendiculaire au rayon AD, est une tangente à la circonférence AD. FIG. 215.

Il résulte, de cette observation, que le cercle cherché est celui qui coupe orthogonalement les trois autres cercles. Il a pour centre leur centre radical (Th. XXXVII et XLII).

Problème LVII.

Quelle est la route ABC que doit suivre une bille sur un billard circulaire, pour revenir au point de départ A, après deux réflexions successives sur la bande ? FIG. 219.

D'après la loi de la réflexion des corps élastiques (Liv. I, Probl. X), les rayons OB, OC divisent en deux parties égales, respectivement, les angles ABC, ACB. Mais, dans le triangle isoscèle OBC, les angles B, C sont égaux; donc les angles ABC, ACB, doubles des premiers, sont égaux entre eux ; et le triangle ABC est isoscèle. Conséquemment, la figure est symétrique par rapport au diamètre EF passant par le point A, et BC est perpendiculaire à ce diamètre.

Cela posé, prolongeons le rayon OB jusqu'à sa rencontre, en G, avec la perpendiculaire à EF menée par le point A ; et décrivons, de ce point comme centre, la circonférence OHL. Ainsi qu'on le voit aisément, le triangle BAG est isoscèle, et la circonférence coupe BG en un point H tel, que $GH = OB$. Donc, la différence des segments BG, BH est connue, et égale au rayon R du cercle donné.

D'un autre côté, si nous menons LH, nous formons un triangle rectangle OHL, évidemment semblable au triangle rectangle OAG. La comparaison des côtés homologues donne

$$\frac{OH}{OA} = \frac{OL}{OG},$$

ou

$$OG \, . \, OH = OA \, . \, OL.$$

ɪ., p. 130 Le rectangle et la différence des segments cherchés étant connus, le problème peut être regardé comme résolu.

Calcul du chemin parcouru par la bille. Représentons par a la distance donnée OA, par x le segment OG, par y le côté AB du triangle ABC. La longueur l du chemin parcouru se compose de $2AB + 2BD$. Or

$$BD = AB \frac{OB}{OG};$$

et, dans le triangle rectangle OAG, $y = \sqrt{x^2 - a^2}$; donc

$$l = 2\left(1 + \frac{R}{x}\right)\sqrt{x^2 - a^2}.$$

D'après ce qui précède, on a

$$x(x - R) = 2a^2,$$

équation d'où l'on tire, en prenant seulement la racine positive,

$$x = \frac{1}{2}\left(R + \sqrt{R^2 + 8a^2}\right).$$

Avant de substituer dans la valeur de l, on peut observer que $x^2 - a^2 = Rx + a^2$; et l'on obtient

$$l = \frac{3R + \sqrt{R^2 + 8a^2}}{R + \sqrt{R^2 + 8a^2}} \sqrt{2\left[R^2 + 2a^2 + R\sqrt{R^2 + 8a^2}\right]};$$

ou, en simplifiant,

$$l = \frac{1}{a\sqrt{2}} \sqrt{8a^4 + 20a^2R^2 - R^4 + R(8a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ (*)}.$$

Problème LVIII.

Trouver un point M tel, que la somme de ses distances à trois points donnés A, B, C, soit un minimum.

Du point C comme centre, décrivons une circonférence passant par le point inconnu M. La somme des distances d'un point quelconque M′ de cette ligne, aux points A, B, C, doit être plus grande que la somme des distances AM, BM, CM. Ainsi FIG. 220.

$$AM' + BM' + CM' > AM + BM + CM;$$

ou, à cause de $CM' = CM$:

$$AM' + BM' > AM + BM. \qquad (1)$$

M est donc le point de la circonférence MM′, pour lequel la somme des distances aux points A, B est un minimum.

Menons la tangente TMT′; et soient a, b les points où elle est coupée par AM′ et BM′. Menons aussi Ab. Le triangle AbM′ donne

$$AM' + M'b > Ab;$$

et, en ajoutant Bb de part et d'autre,

$$AM' + BM' > Ab + Bb. \qquad (2)$$

Si donc nous disposons du point M de manière à véri-

(*) Pour la discussion du problème, le lecteur peut consulter les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tomes I et IX.

fier l'inégalité

$$Ab + Bb > AM + BM, \qquad (3).$$

l'inégalité (1) aura lieu, à plus forte raison.

Or, pour que la somme des distances AM, BM soit inférieure à $Ab + Bb$, b étant un point quelconque de MT, il faut (Liv. I, Probl. X) que les droites AM, BM soient également inclinées sur la normale MC. En d'autres termes: *la droite* CMC′, *qui joint le sommet* C *au point* M, *doit diviser en deux parties égales l'angle formé par les droites menées, de ce même point, aux autres sommets.*

Ce que nous disons du sommet C s'applique aux points A, B; c'est-à-dire que *le point dont la somme des distances à trois points donnés est un minimum est tel, que chacune des trois droites qui le joignent aux points donnés est la bissectrice de l'angle formé par les deux autres.*

On conclut aisément de là que chacun des trois angles formés autour du point M est égal à 120°. Conséquemment, le point M est celui d'où les côtés du triangle ABC sont vus sous un même angle (Liv. II, Th. III). Il est donc facile de le construire (Liv. II, Th. II).

Remarque. Cette solution devient illusoire si un angle A du triangle ABC surpasse 120°. Dans ce cas, le point M coïncide avec A ; et le minimum égale AB + AC (*).

Problème LIX.

M étant le point dont la somme des distances aux sommets d'un triangle donné ABC est un minimum, on demande d'exprimer cette somme en fonction des côtés.

FIG. 220. Désignons par a, b, c les longueurs des côtés ; par x, y, z les distances MA, MB, MC ; et par s leur somme. Les

(*) Bertrand, *Journal de Liouville*, tome VI, p. 158.

triangles ABM, BCM, ACM donnent, comme il est aisé de le vérifier :

$$a^2 = y^2 + z^2 + yz,$$
$$b^2 = z^2 + x^2 + zx,$$
$$c^2 = x^2 + y^2 + xy.$$

Nous aurons ensuite, en exprimant que l'aire T du triangle ABC est égale à la somme des aires des trois autres triangles,

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,(xy + yz + zx).$$

On déduit, de ces quatre équations,

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4T\sqrt{3} = 2(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz),$$

ou

$$s^2 = 2T\sqrt{3} + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Problème LX.

Trouver un point M tel, que la somme des carrés de ses distances aux trois côtés d'un triangle ABC soit un minimum.

Du point cherché M, abaissons les perpendiculaires MP, MQ, MR, sur les côtés du triangle donné, et menons PQ, QR, RP ; puis, d'un autre point quelconque M', abaissons les perpendiculaires M'P', M'Q', M'R', et les obliques M'P, M'Q, M'R. Nous aurons FIG. 221.

$$\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 + \overline{MR}^2 < \overline{M'P'}^2 + \overline{M'Q'}^2 + \overline{M'R'}^2;$$

et, à plus forte raison,

$$\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 + \overline{MR}^2 < \overline{M'P}^2 + \overline{M'Q}^2 + \overline{M'R}^2.$$

Conséquemment le point M est tel, que la somme des carrés de ses distances aux points P, Q, R, est un minimum. Ce point est donc (Th. III) le centre des moyennes distances du triangle PQR.

FIG. 222. Menons la droite CM, et soit C′ le point où elle coupe le côté AB. Abaissons C′D, C′E perpendiculaires sur AC, BC. Menons encore, des points P, Q, les perpendiculaires PG, QF sur la médiane RM : ces droites sont égales entre elles. Enfin, soit CI la hauteur du triangle ABC.

Pour évaluer le rapport de AC′ à BC′, observons d'abord que les triangles rectangles AC′D, ACI, évidemment semblables, donnent

$$AC' = AC \cdot \frac{C'D}{CI}.$$

De même,

$$BC' = BC \cdot \frac{C'E}{CI}.$$

Donc

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{C'D}{C'E}.$$

Les distances C′D, C′E sont proportionnelles à MQ, MP : il ne s'agit donc plus que de chercher le rapport de ces dernières droites.

Or, les triangles rectangles QMF, CIA, ayant les côtés respectivement perpendiculaires, sont semblables ; donc

$$\frac{QM}{AC} = \frac{QF}{CI}.$$

De même,

$$\frac{PM}{BC} = \frac{PG}{CI}.$$

On déduit, de ces proportions,

$$\frac{QM}{PM} = \frac{AC}{BC};$$

puis

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}.$$

Ainsi : 1° *les distances du point* M, *aux côtés du triangle, sont proportionnelles à ces côtés*; 2° *la droite menée du point* M, *à un sommet, partage le côté opposé en deux segments proportionnels aux carrés des côtés adjacents.*

Remarque. Nommons a, b, c les côtés du triangle, dont l'aire sera représentée par T; et soient α, β, γ les distances MP, MQ, MR. On a

$$2T = a\alpha + b\beta + c\gamma;$$

puis, par ce qui précède,

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}.$$

Ces relations donnent

$$\alpha = a\frac{2T}{a^2+b^2+c^2}, \quad \beta = b\frac{2T}{a^2+b^2+c^2}, \quad \gamma = c\frac{2T}{a^2+b^2+c^2}.$$

Le minimum cherché est donc

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{4T^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Problème LXI.

Exprimer, en fonction des côtés d'un triangle ABC, le périmètre du triangle A′B′C′ ayant pour sommets les pieds des hauteurs de ABC.

On a vu (Liv. II, Th. I) que, de tous les triangles inscrits à ABC, A′B′C′ est celui dont le périmètre $2p'$ est minimum. FIG. 403.

On calcule aisément $2p'$ si l'on observe que *les triangles*

AB'C', BC'A', CA'B' *sont semblables au triangle* ABC, *et*, conséquemment, *semblables entre eux* (*).

On a donc, en appelant a, b, c, a', b', c' les côtés des triangles ABC, A'B'C' :

$$\frac{a'}{a}=\frac{\mathrm{AC}'}{b}.$$

D'ailleurs,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c\,.\,\mathrm{AC}',$$

ou

$$\mathrm{AC}' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c};$$

donc

$$a' = \frac{a\,(b^2+c^2-a^2)}{2bc} = \frac{a^2\,(b^2+c^2-a^2)}{2abc}. \quad (1)$$

Un simple changement de lettres donne ensuite :

$$b' = \frac{b^2\,(c^2+a^2-b^2)}{2abc},\quad c' = \frac{c^2\,(a^2+b^2-c^2)}{2abc}.$$

Il résulte, de ces trois valeurs,

$$2p' = \frac{-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2}{2abc}. \quad (2)$$

Le numérateur représente $16\mathrm{T}^2$, T étant l'aire de ABC. Ainsi

$$2p' = \frac{8\mathrm{T}^2}{abc}. \quad (3)$$

(*) Cette propriété résulte, soit de ce que C' *est le supplément de* 2C (Liv. II, Th. I), soit de ce que *la circonférence décrite sur le côté* BC, *pris comme diamètre, passe par les sommets* B', C'.

Problème LXII.

Étant donnés un cercle O et une droite AB, trouver, sur le diamètre OE perpendiculaire à cette droite, un point P tel, que, menant par ce point une corde quelconque CC′, et abaissant, des extrémités de cette corde, les perpendiculaires CD, C′D′ sur la droite donnée, on ait

$$\frac{1}{CD} + \frac{1}{C'D'} = \text{constante.}$$

FIG. 234.

Remarquons d'abord que la condition donnée équivaut à

$$\frac{CD \,.\, C'D'}{CD + C'D'} = \text{constante.} \qquad (1)$$

Conséquemment, nous allons évaluer la somme et le rectangle des perpendiculaires CD, C′D′.

Soit R le point de rencontre de CC′ avec la droite donnée, nous aurons

$$CD = \frac{PE}{RP} CR, \quad C'D' = \frac{PE}{PR} C'R\,;$$

d'où

$$CD \,.\, C'D' = \left(\frac{PE}{PR}\right)^2 CR \,.\, C'R, \quad CD + C'D' = \frac{PE}{PR}\,(CR + C'R).$$

Pour transformer la première relation, menons la tangente RT : elle est moyenne proportionnelle entre CR et C′R ; donc

$$CD \,.\, C'D' = \left(\frac{PE}{PR}\right)^2 \overline{RT}^2;$$

ou, à cause des triangles rectangles OTR, OER,

$$CD \,.\, C'D' = \left(\frac{PE}{PR}\right)^2 (\overline{OE}^2 + \overline{ER}^2 - R^2), \qquad (2)$$

R étant le rayon du cercle.

Abaissons OF perpendiculaire à la corde CC′ : nous aurons

$$CR + C'R = 2RF = 2(FP + PR);$$

puis

$$CD + C'D' = 2\frac{PE}{PR}(FP + PR).$$

Les triangles OFP, REP sont semblables; donc nous pouvons remplacer FP par $PE\frac{PR}{OP}$. Nous obtenons ainsi

$$CD + C'D' = 2\frac{PE}{\overline{PR}^2}(PE \,.\, OP + \overline{PR}^2),$$

ou, par une transformation simple,

$$CD + C'D' = 2\frac{PE}{\overline{PR}^2}(\overline{OE}^2 + \overline{ER}^2 - OP \,.\, OE). \quad (3)$$

Au moyen des valeurs (2) et (3), la relation (1) devient

$$\frac{PE}{2} \cdot \frac{\overline{OE}^2 + \overline{ER}^2 - R^2}{\overline{OE}^2 + \overline{ER}^2 - OP.OE} = \text{constante}. \quad (4)$$

La fraction contenue dans le premier membre varie avec la position du point R, à moins que $OP \,.\, OE = R^2$, auquel cas cette fraction se réduit à l'unité. En même temps, la relation (1) est remplacée par

$$\frac{CD \,.\, C'D'}{CD + C'D'} = \frac{1}{2}PE = \text{constante};$$

ce qui est exact.

Remarques. I. Le point P est le pôle de la droite AB.

II. On a

$$\frac{1}{CD} + \frac{1}{C'D'} = \frac{2}{PE}.$$

Problème LXIII.

Étant données deux circonférences O, O′, on prend un point A sur la première et un point B sur la seconde ; et l'on propose de trouver, sur l'axe radical de ces lignes, un point C tel, que si l'on mène les sécantes CAD, CBE, la droite DE, qui joint les seconds points d'intersection de ces sécantes et des circonférences données, soit perpendiculaire à l'axe radical.

Menons la perpendiculaire AC′ à CD, et soit C′ le point où elle coupe l'axe radical. Soit G le point de rencontre de cet axe avec la droite DE. Les triangles rectangles CGD, GAC′, évidemment semblables, donnent FIG. 223.

$$CG \cdot CC' = CA \cdot CD.$$

De même, si l'on menait par le point B une perpendiculaire à CE, on aurait, en appelant C″ le point d'intersection avec l'axe radical,

$$CG \cdot CC'' = CB \cdot CE.$$

Mais le point C appartient à cet axe ; donc

$$CA \cdot CD = CB \cdot CE\,;$$

et aussi

$$CG \cdot CC' = CG \cdot CC''\,;$$

ce qui apprend que les points C″, C′ se confondent. Et comme les angles A et B sont droits, les points A, B sont situés sur une circonférence ayant CC′ pour diamètre.

Il suffit donc, pour trouver les points C, C′, qui satisfont tous deux à la question, de décrire une circonférence passant par les points A, B, et dont le centre soit sur l'axe radical.

Problème LXIV.

Décomposer un carré en trois carrés égaux (*).

FIG. 387. *Première solution.* Le carré ABCD étant partagé en sept parties, par les parallèles CG, EI, et par les droites NK, LF, BM, HP, perpendiculaires aux premières, il s'agit de déterminer les dimensions de ces divers segments, de manière qu'en les réunissant comme l'indique la figure 388, on obtienne les carrés KNLP, MBNK, PLEM, égaux entre eux.

Si le problème est possible, le côté de chacun des petits carrés doit être $\frac{a}{\sqrt{3}}$, a désignant le côté du grand carré. Donc (*fig.* 387) :

$$BM = MP = NK = CN = NL = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Les triangles CMB, BMG étant semblables, on a

$$\frac{CM}{BM} = \frac{CB}{BG};$$

pnis, à cause de

$$CM = a\sqrt{\frac{2}{3}}:$$

$$BG = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi, la possibilité de la décomposition demandée étant toujours admise, *la distance* BG *est égale à la moitié de*

(*) Ce problème appartient à une partie de la Géométrie dont le jeu du *Casse-tête chinois* offre de curieuses applications. Les deux solutions *empiriques* suivantes m'ont été communiquées par M. Busschop, de Bruges.

la diagonale du carré donné. Les diverses parties dont se compose la figure 387 ne dépendant que de cette distance BG, nous laissons au lecteur le soin d'en faire le calcul, et de vérifier qu'elles satisfont à toutes les conditions du problème.

Seconde solution. Le carré ABCD, au lieu d'être décomposé en sept parties, peut l'être en *huit*, disposées comme l'indique la figure 389. Alors ces huit parties, groupées ainsi qu'on le voit dans la figure 390, formeront trois carrés égaux, *si le problème est possible.*

On a d'abord (fig. 389) :

$$LC = LR = RP = QS = AQ = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

En second lieu, la similitude des triangles ABK, LDE donne

$$DE = x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

x représentant BK.

Enfin, la somme des droites DE, CK devant être égale au côté du troisième petit carré (*fig.* 390), on a aussi

$$x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (a - x) = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

On tire, de cette équation,

$$x = a\,(\sqrt{3} - 1);$$

en sorte que le point K se construit aisément.

La vérification de la possibilité du problème ne présente ensuite aucune difficulté.

Problème LXV.

On donne une circonférence O et un point A de cette ligne. Par ce point on mène une sécante quelconque sur laquelle on prend un point C tel, que le rectangle de la sécante entière et de sa partie extérieure soit égal à un carré donné m^2. Quel est le lieu géométrique du point C?

Fig. 196. Si, par le point C, on mène la tangente CM, on aura

$$\overline{CM}^2 = AC \cdot CB ;$$

donc

$$CM = m.$$

Dans le triangle rectangle OMC, on connaît le côté OM égal au rayon de la circonférence, et le côté MC égal à M ; on peut donc construire ce triangle, et trouver ainsi la distance OC du centre O à un point C quelconque du lieu; par conséquent ce lieu est la circonférence décrite du point O comme centre, avec OC pour rayon.

Problème LXVI.

Étant donnés quatre points A, B, C, D sur une droite indéfinie, on demande quel est le lieu géométrique des points M tels, que les angles AMB, CMD soient égaux entre eux.

Fig. 197. Les triangles AMB, CMD ont un angle égal ; ils ont aussi même hauteur ; donc

$$\frac{AMB}{CMD} = \frac{AM \cdot BM}{CM \cdot DM} = \frac{AB}{CD}.$$

Les triangles AMC, BMD donnent, pareillement,

$$\frac{AMC}{BMD} = \frac{AM \cdot CM}{BM \cdot DM} = \frac{AC}{BD}.$$

Si l'on multiplie terme à terme, on trouve

$$\frac{\overline{AM}^2}{\overline{DM}^2} = \frac{AB \cdot AC}{CM \cdot BD}.$$

Soit p la moyenne proportionnelle entre AB et AC; soit q la moyenne proportionnelle entre CD et BD : la relation précédente équivaut à

$$\frac{AM}{BM} = \frac{p}{q}.$$

Les distances AM, BM étant dans un rapport constant, le lieu demandé est une circonférence que l'on construit facilement.

Problème LXVII.

Par deux points A, B d'une circonférence O, on fait passer une circonférence quelconque AMB. Par deux autres points C, D de la circonférence O, on fait passer une circonférence CMB, tangente à AMB. Quel est le lieu des points de contact M ?

Le point R, où se coupent les cordes AB, CD, est le centre radical des trois circonférences. Par conséquent, la droite RM est la tangente commune aux circonférences AMB, CMD. Le lieu du point M est donc la circonférence décrite du point R comme centre, avec un rayon égal à la moyenne proportionnelle entre RA et RB. FIG. 198.

Problème LXVIII.

Quel est le lieu des points de contact mutuels de deux circonférences variables C, C′, tangentes à deux circonférences fixes O, O′?

Supposons, pour fixer les idées, que les quatre circonférences soient extérieures deux à deux; et soient A′, A, B, B′, M les cinq points de contact. D'après le Théo- FIG. 199.

rème XCI, le point de concours P des cordes AA′, BB′ est le centre de similitude directe des cercles donnés. D'un autre côté (Probl. LXVI) :

$$\overline{PM}^2 = PA \cdot PA' = PB \cdot PB' ;$$

et il est facile de voir que la distance PM est conslante.

En effet, soit D le point ou la transversale PA′A coupe, de nouveau, la circonférence O, et soit EE′P une tangente commune aux cercles O, O′ On a, simultanément :

$$PA \cdot PD = \overline{PE}^2, \quad \frac{PA'}{PD} = \frac{PE'}{PE} ;$$

donc

$$PA \cdot PA' = PE \cdot PE'.$$

Le lieu du point M est la circonférence décrite du point P comme centre, avec un rayon égal à la moyenne proportionnelle entre PE et PE′.

Remarque. Ce problème donne lieu à une discussion intéressante, que nous supprimons.

Problême LXIX.

Par l'une des extrémités d'un diamètre AB du cercle O, on mène une transversale ACD, sur laquelle on prend $CD = m AC$, m étant un nombre donné. On joint le point D au centre du cercle, par la droite OD; enfin l'on trace la corde BC, qui rencontre CD en M. Quel est le lieu du point M?

FIG. 200. Du centre O, abaissons OE perpendiculaire à AC : le point E est le milieu de cette corde. De plus, OE étant parallèle à BC,

$$OD = (2m+1)\, OM ;$$

donc les lieux décrits par les points M, D sont semblables, et ont, pour centre de similitude, le point O.

Pour la même raison, le lieu décrit par le point D est une circonférence qui touche en A la circonférence O. Donc le lieu du point M est pareillement une circonférence.

On peut observer que cette ligne touche en B la circonférence donnée, et qu'elle coupe le rayon AG en un point G tel, que

$$OG = \frac{OA}{2m+1}.$$

Problème LXX.

Quel est le lieu des points tels, que la différence des carrés des distances de chacun à deux points donnés A, B, soit égale à un carré donné m^2?

M étant un point du lieu cherché, abaissons MP perpendiculaire à la droite qui joint les deux points, et menons MA, MB. Nous aurons FIG. 201.

$$\overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{MP}^2, \quad \overline{BM}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{MP}^2;$$

d'où

$$\overline{AM}^2 - \overline{BM}^2 = \overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = m^2.$$

Cette relation donne

$$AP - PB = \frac{m^2}{AB};$$

en sorte que le point P est fixe. Le lieu demandé est donc une perpendiculaire à AB, dont on peut aisément construire un point quelconque.

Problème LXXI.

Étant donnés deux points A, B, trouver le lieu des points C satisfaisant à la relation

$$m\overline{AC}^2 + n\overline{BC}^2 = l^2,$$

dans laquelle m, n, l sont des nombres donnés et une longueur donnée.

FIG. 202. Partageons la distance AB en deux parties AD, BD qui soient en raison inverse des nombres m, n ; nous aurons (Th. LXIV) :

$$BD.\overline{AC}^2 + AD.\overline{BC}^2 = (\overline{CD}^2 + AD.BD)\,AB\,;$$

ou, à cause de

$$BD = \frac{m}{m+n}AB, \quad AD = \frac{n}{m+n}AB :$$

$$m\overline{AC}^2 + n\overline{BC}^2 = (m+n)\,\overline{CD}^2 + \frac{mn}{m+n}\overline{AB}^2.$$

La relation proposée devient donc

$$(m+n)\overline{CD}^2 + \frac{mn}{m+n}\overline{AB}^2 = l^2.$$

Celle-ci exprime que la distance CD est constante; donc le lieu du point C est une circonférence.

Remarque. Si m et n étaient des nombres entiers, on pourrait supposer que m points sont confondus en A et que n points sont confondus en B. Alors le point D serait le centre des moyennes distances de ces deux groupes de points; et le problème proposé serait un cas particulier de celui-ci : *trouver le lieu des points tels, que la somme des carrés des distances de chacun, à des points donnés, soit équivalente à un carré donné.* Nous savions déjà (Th. III) que ce lieu est une circonférence ; mais comme les nombres m, n pourraient n'avoir pas de commune mesure, une solution directe était nécessaire.

Problème LXXII.

Étant donnés deux points A, B, trouver le lieu des points C satisfaisant à la relation

$$m\overline{AC}^2 - n\overline{BC}^2 = l^2,$$

dans laquelle m, n, l sont des nombres donnés et une longueur donnée.

Ce problème se résout comme le précédent : le lieu est une circonférence dont le centre partage AB en deux segments *soustractifs* AD′, BD′, inversement proportionnels aux nombres m, n. FIG. 202.

Problème LXXIII.

Étant donnés deux groupes de points, trouver le lieu des points tels, que la somme des carrés des distances de chacun aux points du premier groupe, diminuée de la somme des carrés de ses distances aux points du second groupe, soit égale à un carré donné m^2.

Soient A, B, C..., les points, en nombre n, appartenant au premier groupe, et A′, B′, C′..., les points, en nombre n', composant le second groupe. Soient O, O′ les centres des moyennes distances relatifs à ces deux groupes de points. FIG. 203.

Nous aurons (Th. III) :

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2 + \ldots = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \ldots + n\overline{OM}^2,$$
$$\overline{A'M}^2 + \overline{B'M}^2 + \overline{C'M}^2 + \ldots = \overline{A'O'}^2 + \overline{B'O'}^2 + \ldots + n'\overline{O'M}^2;$$

d'où, en retranchant,

$$m^2 = (\overline{AO}^2 + \ldots) - (\overline{A'O'}^2 + \ldots) + n\overline{OM}^2 - n'\overline{O'M}^2.$$

Cette relation donne

$$n\overline{\text{OM}}^2 - n'\overline{\text{O'M}}^2 = k^2,$$

k représentant une droite que l'on peut supposer connue.

Le problème est donc ramené à celui qui précède, et le lieu est une circonférence.

Problème LXXIV.

Quel est le lieu des points tels, que les tangentes MT, MT', menées de chacun à deux cercles donnés O, O', soient entre elles comme deux longueurs données m, m'?

FIG. 204. Si nous menons les rayons OT, OT' passant par les points de contact, nous aurons

$$\overline{\text{MT}}^2 = \overline{\text{OM}}^2 - \overline{\text{OT}}^2, \quad \overline{\text{MT'}}^2 = \overline{\text{O'M}}^2 - \overline{\text{O'T'}}^2;$$

conséquemment,

$$\frac{\overline{\text{OM}}^2 - \overline{\text{OT}}^2}{\overline{\text{O'M}}^2 - \overline{\text{O'T'}}^2} = \frac{m^2}{m'^2}.$$

Cette proportion donne

$$m'^2 \,.\, \overline{\text{OM}}^2 - m^2 \,.\, \overline{\text{O'M}}^2 = m'^2 \,.\, \overline{\text{OT}}^2 - m^2 \,.\, \overline{\text{O'T'}}^2.$$

Ainsi, la différence des carrés des distances OM, OM', respectivement multipliés par des nombres donnés, est constante. Donc le lieu est une circonférence.

Problème LXXV.

Quel est le lieu géométrique d'un point M tel, que sa distance à la base AB d'un triangle isoscèle donné, soit moyenne proportionnelle entre ses distances aux deux autres côtés ?

Abaissons MQ, MN, MP perpendiculaires sur les côtés du triangle. Nous aurons FIG. 205.

$$\frac{MQ}{MN}=\frac{MN}{MP}.$$

Les angles QMN, ABC sont égaux, comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires. De même, l'angle NMP est égal à BAC. Donc les angles QMN, NMP sont égaux entre eux.

Par suite, les triangles MNQ, MNP sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels ; et les triangles QBN, NAP sont équiangles entre eux. Donc les quadrilatères MQBN, MNAP sont semblables.

Menons les diagonales MB, MA : nous formons ainsi deux triangles rectangles MQB, MNA, semblables à cause de la similitude des quadrilatères ; donc les angles MBQ, MAB sont égaux entre eux ; d'où il suit que l'angle AMB est constamment égal à l'angle CBA du triangle donné. Le point M décrit donc la circonférence tangente en A et en B aux côtés AC, BC.

Remarque. Les extrémités D, E du diamètre COE sont les centres du cercle inscrit et de l'un des cercles ex-inscrits au triangle ABC.

Problème LXXVI.

Quel est le lieu des points M d'où deux cercles O, O′ sont vus sous des angles égaux?

Menons, du point M, deux tangentes MA, MB au cercle O : l'angle AMB est celui sous lequel un observateur, FIG. 206.

placé en M, verrait le cercle O. Menons aussi les tangentes MA′, MB′. Il faut, d'après l'énoncé, que les angles AMB, A′MB′ soient égaux entre eux.

Si nous joignons les centres au point M et aux points de contact A, A′, par les droites OM, O′M, OA, O′A′, nous formons deux triangles rectangles dans lesquels les angles en M, moitiés d'angles égaux, sont égaux entre eux; donc ces triangles sont semblables, et

$$\frac{OM}{O'M} = \frac{OA}{O'A'}.$$

Les distances du point M aux centres O, O′ étant dans un rapport constant, le lieu de ce point est une circonférence ayant son centre sur la ligne des centres.

Pour la déterminer complétement, menons les tangentes communes CC′, DD′, et soient T, T′ les points où elles coupent la ligne des centres; nous aurons,

$$\frac{OT}{O'T} = \frac{OT'}{O'T'} = \frac{OA}{O'A'}.$$

La ligne cherchée est donc la circonférence décrite sur TT′ comme diamètre.

Remarque. Chacun des points M *est situé de la même manière* à l'égard des cercles donnés. Ce point est donc, conformément à la définition, un véritable *centre de similitude*. Ainsi, *deux cercles donnés, situés dans un même plan, ont une infinité de centres de similitude* (*).

(*) Cette généralisation, que nous croyons nouvelle, peut être étendue à d'autres figures.

Problème LXXVII.

Étant données une droite fixe AB et deux perpendiculaires AC, BD, on coupe ces dernières par une transversale quelconque EF ; on prend sur AB un point P tel, que le rectangle des segments de AB soit équivalent au rèctangle des segments déterminés sur les perpendiculaires; puis, du point P, on abaisse PM perpendiculaire à EF. Quel est le lieu du point M ?

Dans le quadrilatère APME, les angles en A et en M sont droits; donc ce quadrilatère est inscriptible à la circonférence décrite sur EP comme diamètre. De même, la circonférence décrite sur PF comme diamètre passe par les points M, P. Fig. 212.

Menons AM et MB : nous formons ainsi deux angles AMP, BMP, respectivement égaux à AEP, BFP, comme ayant mêmes mesures que ceux-ci.

Les triangles rectangles EAP, PBF sont semblables ; car, par hypothèse,

$$AE \,.\, BF = PA \,.\, PB \;;$$

donc les angles AEP, BFP sont complémentaires ; et, par conséquent, les angles AMP, BMP le sont aussi.

De là résulte que l'angle AMB est droit. Le lieu cherché est donc la demi-circonférence décrite sur AB comme diamètre.

Remarque. Lorsque le point E reste fixe et que la transversale EF tourne autour de ce point, le point M décrit la circonférence AMB. Pour une seconde position du point E, on obtient la même circonférence ; et ainsi de suite. Le lieu géométrique proposé se compose donc, en réalité, d'*une infinité de circonférences superposées.*

Problème LXXVIII.

Par l'un des points d'intersection de deux circonférences o, o', on mène deux droites rectangulaires Pa, Pa', qui rencontrent la ligne des centres en a, a', et les circonférences en b, c et b', c'. Démontrer que l'on a toujours

$$\frac{ab}{ac} = \frac{a'b'}{a'c'}.$$

FIG. 229. Les angles en P étant droits, les cordes cc', bb', sont des diamètres. D'ailleurs, les triangles bPb', cPc', coupés par la transversale oo', donnent

$$ab \, . \, Pa' \, . \, b'o' = bo' \, . \, a'b' \, . \, Pa,$$
$$co \, . \, a'c' \, . \, Pa = ac \, . \, Pa' \, . \, c'o \, ;$$

d'où, à cause de $bo' = b'o'$, $co = c'o$:

$$ab \, . \, a'c' = a'b' \, . \, ac \, ;$$

etc.

Problème LXXIX.

Par un point O, pris sur le prolongement d'un diamètre BA du cercle C, on mène une sécante quelconque OMM' ; on prend les milieux N, N' des arcs AM, AM' ; on joint le centre C aux points N, N', par les droites CN, CN', lesquelles rencontrent en D, D' la perpendiculaire menée au diamètre AB par le point O. Prouver que le rectangle de OD par OD' est constant, quelle que soit la direction de la sécante (*).

FIG. 231. Menons la droite BME : elle est parallèle à CND. En effet, l'angle ABM a pour mesure la moitié de l'arc AM ; donc il est égal à ACN ; donc, etc. Pour la même raison, BM'E' est parallèle à CN'D'.

Cela étant, nous avons, à cause des parallèles :

$$OD = OE \, . \, \frac{OB}{OC}, \quad OD' = OE' \, . \, \frac{OC}{OB} \, ;$$

(*) Grand Concours de 1844.

d'où

$$OD \cdot OD' = OE \cdot OE' \cdot \left(\frac{OC}{OB}\right)^2 .$$

Il suffit donc de vérifier que le rectangle de OE par OE′ est constant.

Or l'angle M′MB, ayant pour mesure la moitié de l'arc BM′, est complémentaire de l'angle OBM′, c'est-à-dire égal à E′. Par suite, le quadrilatère EE′M′M, dans lequel les angles E′, EMM′ sont supplémentaires, est inscriptible à une circonférence. Donc

$$OE \cdot OE' = OM \cdot OM' = OA \cdot OB.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Problème LXXX.

Prouver qu'il existe, sur la ligne CC′ des centres de deux cercles qui ne se coupent pas, deux points O, O′ satisfaisant aux relations

$$CO \cdot CO' = R^2, \quad C'O \cdot C'O' = R'^2,$$

dans lesquelles R, R′ désignent les rayons (*).

D'après le premier Corollaire du Théorème XXXVII (p. 88), les points O, O′ sont ceux où la droite CC′ est coupée par une circonférence I, orthogonale aux circonférences données. Nous pouvons donc regarder le problème comme résolu. FIG. 232.

Remarque. On trouve aisément, en représentant par d la distance des centres,

$$CO + CO' = \frac{d^2 + R^2 - R'^2}{d} ;$$

en sorte que l'on pourrait encore déterminer les points O, O′ en cherchant un rectangle équivalent à R^2, et dont la somme des dimensions serait donnée ; mais la première construction vaut mieux.

(*) Grand Concours de 1845.

Problème LXXXI.

Prouver qu'il existe, sur la ligne CC′ des centres de deux cercles intérieurs l'un à l'autre, deux points O, O′ tels, que les distances de chacun aux extrémités d'une corde commune MM′, perpendiculaire à la ligne des centres, sont dans un rapport constant (*).

FIG. 233. Considérons, comme dans le problème précédent, les points de rencontre O, O′ de la ligne des centres avec la circonférence I, qui coupe orthogonalement les deux cercles donnés. Joignons les extrémités M, M′ de la corde commune MM′, avec l'un de ces deux points, par exemple avec le point O, par les droites OM, OM′. Nous pouvons démontrer que le rapport de ces droites est indépendant de la position de la corde.

En effet, le triangle OCM donne :

$$\overline{OM}^2 = \overline{OC}^2 + R^2 - 2OC \,.\, CP = \overline{OC}^2 + R^2 - 2OC \,.\, (OC - OP),$$

ou

$$\overline{OM}^2 = R^2 - \overline{OC}^2 + 2OC \,.\, OP\ ;$$

ou encore, à cause de $R^2 = CO \,.\, CO'$:

$$\overline{OM}^2 = CO\,(CO' - CO + 2OP)\ ;$$

ou enfin :

$$\overline{OM}^2 = 2CO \,.\, IP.$$

De même,

$$\overline{OM'}^2 = 2C'O \,.\, IP\ ;$$

donc

$$\frac{\overline{OM}^2}{\overline{OM'}^2} = \frac{CO}{C'O}.$$

Ainsi, le rapport des distances OM, OM′ est constant, et son carré est égal au rapport des distances du point O aux centres des cercles donnés.

(*) Grand Concours de 1845.

Problème LXXXII.

Étant donnés un cercle O et une droite AB qui ne se rencontrent pas ; on prend, sur la droite, un point quelconque M, d'où l'on mène deux tangentes au cercle ; on prolonge la corde de contact CD jusqu'à sa rencontre, en M′, avec la droite donnée. Existe-t-il un point P d'où le segment MM′ soit vu sous un angle droit, quelle que soit la position du point M (*) ?

Si le point P existe, il appartient à la perpendiculaire abaissée du centre O sur AB. En effet, quand le point M s'éloigne indéfiniment du pied E de cette droite, le point M′ s'en rapproche ; de façon que l'angle MPM′ devient, à la limite, XPE, PX étant parallèle à AB. Mais cette même droite PX doit être perpendiculaire à PE : donc, etc. FIG. 144.

Dans le triangle rectangle MPM′,

$$\overline{PE}^2 = EM \cdot EM' ;$$

donc le point P sera fixe, si le second membre a une valeur constante. Or, les triangles MEO, M′EF, évidemment semblables, donnent

$$\frac{EM}{EF} = \frac{EO}{EM'},$$

ou

$$EM \cdot EM' = EF \cdot EO .$$

Le point F, intersection de CD avec OE, est le pôle de AB ; ainsi

$$EM \cdot EM' = \text{constante} ;$$

etc.

Remarque. Si, du point E comme centre, on décrit une circonférence ayant pour rayon la tangente TE, elle coupe la perpendiculaire OE en deux points P, P′ qui satisfont à la question.

(*) Grand Concours de 1846.

Problème LXXXIII.

Un triangle PQR étant circonscrit à un cercle O, on forme un second triangle ABC dont les sommets sont situés sur les côtés du premier, et tel, en outre, que les droites AP, BQ, CR se coupent en un même point D. Des sommets A, B, C, on mène les tangentes Aa, Bb, Cc : elles coupent en a, b, c les côtés BC, CA, AB respectivement opposés à ces sommets. On propose de démontrer que les trois points a, b, c sont en ligne droite (*).

FIG. 391. Si les points a, b, c sont sur une même droite, leurs polaires se coupent en un même point, et réciproquement.

La polaire du point a passe par le point de contact E de la tangente AE et par le pôle de BC. Ce pôle est l'intersection α des droites FM, GN, polaires respectives des sommets B, C. Ainsi, la polaire de a est la droite Eα (**). De même, Fβ et Gγ sont les polaires des points b, c.

D'après la réciproque du Théorème de Ptolémée, appliquée au triangle $\alpha\beta\gamma$, les trois polaires se coupent en un même point si

$$\alpha G \,.\, \beta E \,.\, \gamma F = \alpha F \,.\, \beta G \,.\, \gamma E. \qquad (1)$$

Remarquons maintenant que, d'après l'énoncé, les points de concours des côtés opposés, dans les triangles ABC, PQR, sont en ligne droite (Th. X) ; donc les polaires de ces points se coupent en un même point. La polaire du point de concours des côtés BC, QL est la droite αL (***). De même, βM et γN sont les polaires des deux autres points de concours. Ces trois droites se coupant

(*) Un cas particulier de ce problème a été proposé au grand Concours, en 1847 (Mathématiques supérieures).

(**) Non tracée sur la figure.

(***) Non tracée sur la figure.

en un même point, on a, par le Théorème de Ptolémée,

$$\alpha M \,.\, \beta N \,.\, \gamma L = \alpha N \,.\, \beta L \,.\, \gamma M. \qquad (2)$$

Le Théorème de Carnot, appliqué au triangle $\alpha\beta\gamma$ et au cercle O, donne

$$\alpha F \,.\, \alpha M \,.\, \beta G \,.\, \beta N \,.\, \gamma E \,.\, \gamma L = \alpha G \,.\, \alpha N \,.\, \beta E \,.\, \beta L \,.\, \gamma F \,.\, \gamma M. \quad (3)$$

Or l'égalité (1) est une conséquence des égalités (2) et (3) ; donc le théorème est démontré.

Remarques. I. Si l'on construit la figure polaire réciproque de la première, relativement au cercle O, on est conduit au théorème suivant :

Un triangle LMN *étant inscrit à un cercle* O, *on forme un second triangle* $\alpha\beta\gamma$, *dont les côtés passent par les sommets du premier, et tel, en outre, que les points de concours* e, f, g, *des côtés correspondants, soient situés sur une même droite. On joint ensuite les sommets* α, β, γ *avec les points* E, F, G *où les côtés* $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ *coupent, de nouveau, la circonférence* O : *les droites* αE, βE, γG *concourent en un même point* I.

II. Les deux théorèmes précédents, comme ceux de Pascal, de Brianchon, de Carnot, etc., subsistent quand on remplace le cercle O par une ligne quelconque du second degré.

Problème LXXXIV.

Étant donnés deux points fixes A, B et deux longueurs λ, μ, on prend, sur la direction de AB, un point quelconque M qu'on regarde comme le centre d'un cercle décrit d'un rayon R, déterminé par la relation

$$R . AB = \lambda . AM + \mu . BM.$$

Prouver que les différents cercles, ainsi décrits pour les différents points M de la droite AB, sont tous tangents à deux mêmes droites fixes (*).

Fig. 228. Décrivons, des points A, B comme centres, avec μ et λ pour rayons, les circonférences CC', DD'; menons, à ces lignes, les tangentes communes CD, C'D' ; abaissons, sur ces droites, les perpendiculaires ME, ME', évidemment égales entre elles; enfin décrivons, du point M comme centre, la circonférence EE', laquelle est tangente aux droites CD, C'D'. Cette circonférence sera précisément celle qui est déterminée par la relation ci-dessus. En effet, à cause des parallèles AC, ME, BD, nous avons (Th. I)

$$ME . AB = \lambda . AM + \mu . BM ;$$

donc ME = R.

Problème LXXXV.

Étant donnés deux axes fixes Ox, Oy, autour d'un point fixe P on fait tourner un angle aPb de grandeur donnée α. On demande de prouver qu'il existe sur l'axe Ox un point fixe A, et sur l'axe Oy un point fixe B, tels que le rectangle des segments Aa, Bb reste constant pour toutes les positions de l'angle (**).

Fig. 230. Si la proposition énoncée est vraie, il sera facile de déterminer les positions des points A et B. En effet, supposons que le point variable a coïncide avec A ; alors le

(*) Grand Concours de 1850.

(**) Grand Concours de 1850.

segment Aa s'annule ; donc, pour que le rectangle des deux segments puisse être différent de zéro, le segment Bb doit devenir infini, ou le côté Bb être parallèle à Oy.

Ainsi, pour trouver le point A, nous menons PD parallèle à Oy, et nous faisons l'angle DPA $= \alpha$.

De même, après avoir mené PC parallèle à Ox, nous ferons CPB $= \alpha$.

Il s'agit donc de *vérifier* que, les points A, B étant déterminés comme il vient d'être dit, le rectangle Aa . Bb est constant.

Or, si des angles égaux bPa, DPA, nous retranchons la partie commune DPa, il reste les angles bPD, aPA, égaux entre eux. D'ailleurs les angles bPD, BbP sont égaux, comme alternes internes ; donc aPA $=$ BbP.

On prouverait, de la même manière, que les angles bPB, AaP sont égaux. De là résulte que les triangles AaP, BbP sont semblables. Par suite,

$$Aa \,.\, Bb = AP \,.\, BP.$$

Problème LXXXVI.

Étant donnés deux cercles O, O′ qui ne se touchent pas ; de chaque point M de l'un, O, on mène deux droites aux centres de similitude S, S′ des deux cercles ; ces droites rencontrent l'autre cercle O′ en quatre points a, a', b, b'. Prouver que deux de ces points sont sur un diamètre du cercle O′, et que la droite qui joint les deux autres passe par un point fixe, quel que soit le point M pris sur le cercle O (*).

1° Les points homologues M, b sont sur deux rayons parallèles, MO, bO′. De même, M, a' sont sur deux rayons parallèles, MO, a'O′. Donc bO′a' est un diamètre. FIG. 394.

2° Si le point mobile M vient en A ou en B, aux ex-

(*) Grand Concours, année 1851.

trémités du diamètre situé sur OO', les droites MS, MS' coïncident avec OO' ; donc le point fixe P, s'il existe, est l'intersection de la corde ab' avec la ligne des centres.

En considérant le triangle SMS, et les transversales aPb, $a'O'b$, on a, par le Théorème de Ptolémée :

$$\begin{aligned} Sa \,.\, Mb' \,.\, S'P &= SP \,.\, S'b' \,.\, Ma, \\ Sa' \,.\, Mb \,.\, S'O' &= SO' \,.\, S'b \,.\, Ma' ; \end{aligned}$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$Sa \,.\, Sa' \,.\, Mb \,.\, Mb' \,.\, S'P \,.\, S'O' = SP \,.\, SO' \,.\, S'b \,.\, S'b \,.\, Ma \,.\, Ma'. \quad (1)$$

A cause de

$$\begin{aligned} Mb \,.\, Mb' &= Ma \,.\, Ma', \\ Sa \,.\, Sa' &= SA' \,.\, SB', \\ S'b \,.\, S'b' &= S'A' \,.\, S'B' . \end{aligned}$$

l'égalité (1) se réduit à

$$SA' \,.\, SB' \,.\, S'P \,.\, S'O' = SP \,.\, SO' \,.\, S'A' \,.\, S'B' ,$$

ou encore, à

$$\frac{SP}{S'P} = \frac{SA'}{S'A'} \cdot \frac{SB'}{S'A'} \cdot \frac{S'O'}{SO'} \cdot \qquad (2)$$

Le second membre est indépendant de la position du point M ; donc le rapport des distances SP, S'P est constant, et le point P est fixe.

Problème LXXXVII.

Par un point A, situé sur la bissectrice d'un angle xOy, on mène une transversale BAC, qui rencontre en B, C les côtés de l'angle. On abaisse BD, CE perpendiculaires à la bissectrice ; puis, ayant pris le milieu G de OA, on décrit une circonférence sur GE comme diamètre. Quel est le lieu des intersections de cette ligne avec la perpendiculaire BD (*) ?

IG. 395. M étant l'un de ces points d'intersection, la corde GM est moyenne proportionnelle entre GD et GE.

(*) Grand Concours, 1852.

D'un autre côté, si l'on prolonge la transversale CB jusqu'à sa rencontre avec la perpendiculaire OF à OE, la droite AF sera partagée harmoniquement en B, C (Th. XIII, Rem. II). De là résulte, que OA est partagée harmoniquement aux points D, E; donc (Th. XVI, Rem.) GA est moyenne proportionnelle entre GD et GE; ou, par ce qui précède,

$$GM = GA.$$

Le lieu du point M est donc la circonférence décrite sur OA comme diamètre.

Problème LXXXVIII.

Par le point de contact A de deux circonférences O, O', on mène deux cordes AC, AC', dont le rapport m est donné. Des centres O, O', on abaisse des perpendiculaires OP, O'P sur ces cordes. Quel est le lieu du point P (*)?

Il est visible que le lieu du point P est semblable au lieu décrit par l'intersection M des cordes BC, B'C', *supplémentaires* des premières; de plus, A est le centre de similitude des deux lignes inconnues : cherchons donc le lieu du point M. FIG. 396.

Si le rapport donné est *un*, c'est-à-dire si les cordes AC, AC' sont égales, les triangles MCA, MC'A, rectangles en C, C', sont égaux; donc MA est la bissectrice de l'angle BMB'. Conséquemment, FIG. 397.

$$\frac{MB}{MB'} = \frac{AB}{AB'}.$$

Dans ce cas particulier, le lieu du point M se réduit donc à une circonférence tangente, en A, aux circonfé-

(*) Grand Concours, 1859.

rences données, et dont le diamètre partage harmoniquement BB'.

FIG. 398. Pour ramener le cas général au cas particulier, remplaçons la circonférence AB' par une circonférence auxiliaire AB'', telle que

$$AB'' = mAB' :$$

les cordes homologues AC'', AC' seront dans le rapport m ; donc il y aura égalité entre les cordes AC, AC'', et le point auxiliaire M' décrira une circonférence passant en A. Mais, à cause des parallèles B'M, B''M' :

$$\frac{BM}{BM'} = \frac{BB'}{BB''} = \frac{AB + AB'}{AB + mAB'} ;$$

donc le lieu du point M est encore une circonférence.

LIVRE IV.

Théorème I.

Dans tout pentagone régulier, les diagonales se coupent mutuellement en moyenne et extrême raison.

Soient AD, CE deux diagonales du pentagone régulier ABCDE, inscrit au cercle O. Je dis que l'on a FIG. 235.

$$\frac{DF}{AF}=\frac{AF}{AD}.$$

En effet, les triangles DEF, DAE sont isoscèles et ont un angle commun ; donc ils sont semblables, c'est-à-dire que

$$\frac{DF}{DE}=\frac{DE}{AD}.$$

De plus, le triangle AEF est isoscèle, parce que les angles AEF, AFE ont des mesures égales ; donc

$$DE=AE=AF.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Théorème II.

Le côté du décagone régulier étoilé inscrit est égal au côté du décagone régulier inscrit, augmenté du rayon.

Supposons qu'après avoir partagé la circonférence O en dix parties égales, on joigne le *premier* point de division A au *quatrième* point B, par la corde AB ; puis le point B au *septième* point de division C ; et ainsi de suite. On FIG. 237.

obtiendra un décagone ABCDEFGHIK qui est, à la fois, équiangle et équilatéral, mais dont les côtés se coupent dans l'intérieur du cercle. Ce polygone est le *décagone régulier étoilé.*

Cela posé, soient AB le côté de ce décagone, et AH le côté du décagone régulier convexe. Menons les rayons OB, OH. Nous formons ainsi deux triangles AMH, BMO, semblables, attendu que les arcs AG, BH étant égaux entre eux, la corde AH est parallèle au diamètre BOG. De plus, les angles en M et en H ont des mesures égales; donc ils sont égaux ; donc les triangles sont isoscèles. Il suit de là que

$$AB = AM + BM = AH + BO.$$

Remarques. I. La similitude des triangles donne

$$\frac{OB}{AH} = \frac{OM}{MH}.$$

Mais, dans le triangle AMO, les angles en A et en O ont des mesures égales ; donc ce triangle est isoscèle ; donc $OM = AM = AH$, et la proportion devient

$$\frac{OH}{OM} = \frac{OM}{MH}.$$

On retrouve ainsi ce théorème : *le côté du décagone régulier convexe est égal à la plus grande partie du rayon, partagé en moyenne et extrême raison.*

II. La proportion précédente donne

$$\frac{OH + OM}{OH} = \frac{OM + MH}{OM},$$

ou

$$\frac{BM + AM}{BM} = \frac{BM}{AM},$$

ou encore

$$\frac{AB}{BM} = \frac{BM}{AM};$$

c'est-à-dire que : *si l'on partage, en moyenne et extrême raison, le côté du décagone régulier étoilé, le plus grand segment est égal au rayon, et le plus petit segment est égal au côté du décagone régulier convexe.*

Théorème III.

Si, sur les segments AC, BC du diamètre AB d'un cercle O, on décrit, de part et d'autre de cette droite, deux demi-circonférences ADC, CEB; la ligne ADCEB, formée par l'ensemble de ces demi-circonférences, partage le cercle en deux segments proportionnels aux segments du diamètre.

Les demi-cercles décrits sur AB, AC, BC sont entre eux comme les carrés des diamètres ; donc FIG. 254. G., 376.

$$\frac{AFBECD}{AGBECD} = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2}.$$

Mais

$$\overline{AB}^2 = (AC + BC)^2, \quad \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = (AC + BC)\ (BC - AC);$$

donc

$$\frac{AFBECD}{AGBECD} = \frac{(AC + BC) + (BC - AC)}{(AC + BC) - (BC - AC)} = \frac{BC}{AC}.$$

Remarque. La somme des demi-circonférences ADC, CEB est équivalente à la demi-circonférence décrite sur AB. Il résulte de là et de ce qui vient d'être démontré, que, *si l'on divise le diamètre d'un cercle en* n *parties égales, puis que, sur chacun des couples de segments ainsi déterminés, on décrive, de part et d'autre du diamètre, des demi-circonférences, on aura partagé le cercle en* n *parties, équivalentes en surface et en périmètre.*

Théorème IV.

Si deux arcs AC, BD ont une somme moindre que la demi-circonférence ABD, le rectangle de leurs cordes est équivalent à celui qui aurait pour dimensions le rayon et l'excès de la corde du supplément de la différence des arcs sur la corde du supplément de leur somme.

FIG. 239. Menons AD, BC, CD : le quadrilatère ACBD étant inscrit,

$$AD \,.\, BC = AC \,.\, BD + AB \,.\, CD.$$

Soit C′ le point symétrique de C, relativement au diamètre AB ; menons BC′, AC′, DC′ ; nous aurons aussi

$$AB \,.\, C'D = AC \,.\, BD + AD \,.\, BC.$$

Ajoutant membre à membre, et réduisant, on trouve, R étant le rayon,

$$AC \,.\, BD = R\,(C'D - CD).$$

Or l'arc CD est égal à la demi-circonférence, diminuée de la somme des arcs AC, BD, et l'arc C′BD se compose de la demi-circonférence AC′B, diminuée de l'arc AC′ égal à AC, et augmentée de l'arc BD ; donc, etc.

Théorème V.

Si deux arcs AD, BC ont une somme plus grande que la demi-circonférence, le rectangle de leurs cordes est équivalent à celui qui aurait pour dimensions le rayon et la somme des cordes du supplément de la différence et du supplément de la somme de ces arcs.

FIG. 239. On vient de voir que

$$AC \,.\, BD = R\,(C'D - CD).$$

D'ailleurs, dans le quadrilatère AC′BD,

$$AC' \,.\, BD + AD \,.\, BC' = 2R \,.\, C'D.$$

Donc, en retranchant membre à membre, nous avons, à cause de $AC' = AC$, $BC' = BC$:

$$AD \cdot BC = R\,(C'D + CD).$$

Remarque. Si les deux arcs sont supplémentaires, comme AC, BC, les deux théorèmes qui viennent d'être démontrés donnent

$$AC \cdot BC = R \cdot CC';$$

relation évidente.

Théorème VI.

Une circonférence étant partagée en un nombre impair de parties égales, si l'on joint le point diamétralement opposé à l'un des points de division avec tous ceux qui sont situés sur la même demi-circonférence, le produit des cordes ainsi menées est égal à une puissance du rayon marquée par le nombre des cordes.

Cette proposition est une conséquence immédiate de la remarque précédente ; car FIG. 240.

$$OA_1 \cdot AA_1 = R \cdot AA'_1,$$

ou

$$OA_1 \cdot AA_1 = R \cdot AA_2.$$

De même :

$$OA_2 \cdot AA_2 = R \cdot AA_4,$$
$$OA_3 \cdot AA_3 = R \cdot AA_6,$$
$$OA_4 \cdot AA_4 = R \cdot AA_5,$$
$$OA_5 \cdot AA_5 = R \cdot AA_3,$$
$$OA_6 \cdot AA_6 = R \cdot AA_1.$$

Donc, en multipliant membre à membre :

$$OA_1 \cdot OA_2 \cdot OA_3 \cdot OA_4 \cdot OA_5 \cdot OA_6 = R^6.$$

Théorème VII.

Une circonférence étant partagée en un nombre impair de parties égales; si l'on joint le point diamétralement opposé à celui dont l'indice est zéro avec les points dont les indices sont les termes de la progression 1, 2, 4, 8..., le produit des cordes ainsi menées est égal à une puissance du rayon marquée par le nombre des cordes.

Fig. 240. En effet,

$$OA_1 \cdot AA_1 = R \cdot AA_2,$$
$$OA_2 \cdot AA_2 = R \cdot AA_4,$$
$$OA_4 \cdot AA_4 = R \cdot AA_1;$$

d'où

$$OA_1 \cdot OA_2 \cdot OA_4 = R^3.$$

Théorème VIII.

On peut, au moyen de la règle et du compas, diviser la circonférence en dix-sept parties égales.

Par le Théorème VI, on a

$$OA_1 \cdot OA_2 \cdot OA_3 \cdot OA_4 \cdot OA_5 \cdot OA_6 \cdot OA_7 \cdot OA_8 = R^8.$$

Par le Théorème VII,

$$OA_1 \cdot OA_2 \cdot OA_4 \cdot OA_8 = R^4. \quad (1)$$

Donc

$$OA_3 \cdot OB_5 \cdot OA_6 \cdot OA_7 = R^4. \quad (2)$$

Les relations (1), (2) peuvent être écrites ainsi :

$$\{ OA_1 \cdot OA_4 \} \{ OA_2 \cdot OA_8 \} = R^4, \quad (3)$$
$$\{ OA_3 \cdot OA_5 \} \{ OA_6 \cdot OA_7 \} = R^4. \quad (4)$$

Par les Théorèmes IV et V :

$$OA_1 \cdot OA_4 = R\,(OA_3 + OA_5),$$
$$OA_2 \cdot OA_8 = R\,(OA_6 + OA_7),$$
$$OA_3 \cdot OA_5 = R\,(OA_2 + OA_8),$$
$$OA_6 \cdot OA_7 = R\,(OA_1 + OA_4).$$

Posons

$$OA_3 + OA_5 = M, \quad OA_6 - OA_7 = N,$$
$$OA_2 + OA_8 = P, \quad OA_1 - OA_4 = Q$$

les égalités (3), (4) deviendront

$$MN = R^2 \quad (5), \qquad PQ = R^2 \quad (6).$$

Ainsi les produits MN, PQ sont connus.

Remplaçons M, N, P, Q par leurs valeurs, et effectuons les multiplications indiquées : nous obtiendrons, au lieu des équations (5) et (6) :

$$MN = OA_3 \,.\, OA_6 + OA_5 \,.\, OA_6 - OA_3 \,.\, OA_7 - OA_5 \,.\, OA_7,$$
$$PQ = OA_1 \,.\, OA_2 + OA_1 \,.\, OA_8 - OA_2 \,.\, OA_4 - OA_4 \,.\, OA_8.$$

Si, dans MN ou dans PQ, dans PQ, par exemple, on transforme les produits, on a :

$$OA_1 \,.\, OA_2 = R\,(OA_1 + OA_3),$$
$$OA_1 \,.\, OA_8 = R\,(OA_7 - OA_8),$$
$$OA_2 \,.\, OA_4 = R\,(OA_2 + OA_6),$$
$$OA_4 \,.\, OA_8 = R\,(OA_4 - OA_5);$$

donc

$$\{(OA_3+OA_5)-(OA_6-OA_7)\}-\{(OA_2+OA_8)-(OA_1-OA_4)\}=R.$$

ou bien

$$(M - N) - (P - Q) = R. \qquad (7)$$

La différence des quantités $(M - N)$, $(P - Q)$ est donc connue. Pour en déterminer le produit, observons d'abord que

$$\begin{aligned}(M-N)\,(P-Q) = {} & OA_2.OA_3+OA_2.OA_5-OA_2.OA_6+OA_2.OA_4\\ & +OA_3.OA_8+OA_5.OA_8-OA_6.OA_8+OA_7.OA_8\\ & -OA_1.OA_3-OA_1\,OA_5+OA_1.OA_6-OA_1.OA_7\\ & +OA_3.OA_4+OA_4.OA_5-OA_4.OA_6+OA_4.OA_7.\end{aligned}$$

D'ailleurs,

$$
\begin{aligned}
OA_2 \,.\, OA_3 &= R\,(OA_1 + OA_5)\,,\\
OA_2 \,.\, OA_5 &= R\,(OA_3 + OA_7)\,,\\
OA_2 \,.\, OA_6 &= R\,(OA_4 + OA_8)\,,\\
OA_2 \,.\, OA_7 &= R\,(OA_5 - OA_8)\,,\\
OA_3 \,.\, OA_8 &= R\,(OA_5 - OA_6)\,,\\
OA_5 \,.\, OA_8 &= R\,(OA_3 - OA_4)\,,\\
OA_6 \,.\, OA_8 &= R\,(OA_2 - OA_3)\,,\\
OA_7 \,.\, OA_8 &= R\,(OA_1 - OA_2)\,,\\
OA_1 \,.\, OA_3 &= R\,(OA_2 + OA_4)\,,\\
OA_1 \,.\, OA_5 &= R\,(OA_4 + OA_6)\,,\\
OA_1 \,.\, OA_6 &= R\,(OA_5 + OA_7)\,,\\
OA_1 \,.\, OA_7 &= R\,(OA_6 + OA_8)\,,\\
OA_3 \,.\, OA_4 &= R\,(OA_2 + OA_7)\,,\\
OA_4 \,.\, OA_5 &= R\,(OA_1 - OA_8)\,,\\
OA_4 \,.\, OA_6 &= R\,(OA_2 - OA_7)\,,\\
OA_4 \,.\, OA_7 &= R\,(OA_3 - OA_6)\,;
\end{aligned}
$$

donc, par la substitution,

$$(M - N)(P - Q) = 4\,R\,\{(M - N) - (P - Q)\}\,,$$

ou

$$(M - N)(P - Q) = 4R^2. \qquad (8)$$

Les équations (7), (8) déterminent donc $M - N$ et $P - Q$. Comme on connaît MN et PQ, on pourra trouver M et N, P et Q. De plus, le rectangle des cordes OA_6, OA_7 est équivalent à RQ, et leur différence est égale à N. Il sera donc facile de construire ces cordes, et, par suite, de trouver un arc égal à la dix-septième partie de la circonférence.

Remarque. L'illustre *Gauss* a démontré, le premier, dans l'ouvrage intitulé *Disquisitiones Arithmeticæ*, qu'il est possible, *au moyen de la règle et du compas*, de partager la circonférence en dix-sept parties égales.

La démonstration géométrique ci-dessus est attribuée à *Ampère.*

Théorème IX.

Entre tous les triangles formés avec deux côtés donnés, le maximum est celui dans lequel ces côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre.

Soient les triangles CAB, C'AB, ayant le côté AB commun et les côtés AC, AC' égaux : je dis que le premier triangle, dans lequel l'angle CAB est droit, est plus grand que le second. FIG. 242

Menons la hauteur C'D ; nous aurons C'D $<$ C'A, ou C'D $<$ CA. Or, les triangles CAB, C'AB, qui ont même base AB, sont entre eux comme leurs hauteurs ; donc, etc.

Théorème X.

Le cercle est plus grand que toute figure isopérimètre.

La démonstration de cet important théorème sera partagée en plusieurs parties.

1° *Une figure qui a un périmètre donné ne peut avoir une aire infinie.*

En effet, la proposition n'a de sens qu'autant que l'on suppose la figure fermée de toutes parts. Donc cette figure est une portion finie de plan.

2° *Entre toutes les figures qui ont un périmètre donné, il existe un ou plusieurs maximums.*

Cette proposition est évidente d'après celle qui précède.

3° *Une figure qui, avec un périmètre donné, renferme une aire maximum, est convexe.*

Considérons, en effet, la figure non convexe ACBD. S nous faisons tourner la partie rentrante ACB autour de FIG. 24[illegible] droite AB, nous pourrons former une figure AC′BD, de même périmètre que la première, et plus grande que celle-ci.

4° *Toute droite, qui divise le contour d'une figure maximum en deux parties équivalentes, divise aussi la surface de cette figure en deux parties équivalentes.*

FIG. 244. Soit ABCD une courbe qui, avec une longueur donnée, renferme une surface maximum. Supposons que la droite AB partage cette courbe en deux parties ACB, ADB ayant même longueur.

Si la surface ABDA est plus grande que ABCA, faisons tourner ADB autour de AB; nous obtiendrons une figure AD′BD, isopérimètre avec ACBD, et dont l'aire sera plus grande que celle de ACBD. Cette conclusion est contraire à l'hypothèse.

5° *Une figure qui, avec un périmètre donné, a une aire maximum, est un cercle.*

FIG. 244. La remarque précédente fait voir que si ADBC est une figure maximum, ADBD′ en sera pareillement une.

FIG. 245. Cela étant, soit ADBD′ une pareille figure, composée de deux parties symétriques par rapport à AB.

Prenons sur ADB un point quelconque D, et soit D′ le symétrique de D, relativement à AB; menons DA, DB, D′A et D′B.

Si les angles D et D′ ne sont pas droits, transformons le quadrilatère ADBD′ en un autre *adbd′* ayant les côtés respectivement égaux à ceux du premier, et dans lequel les angles *d*, *d′* soient droits. D'après le théorème précédent, ce quadrilatère *adbd′* est plus grand que l'autre. Si donc nous apportons les segments AED, DFB, etc., en *aed*, *dfb*, etc., la figure *aedfbg*... sera plus grande que AEDFBG,..; donc celle-ci ne serait pas un maximum.

Il résulte de là que la courbe AEDFB est le lieu géométrique du sommet d'un angle droit, dont les côtés passent par les points A, B. Donc cette courbe est une demi-circonférence.

Ainsi, dans la figure maximum ADBC, une moitié quelconque, déterminée par une droite telle que AB, est un demi-cercle. Donc la figure entière est un cercle.

Théorème XI.

Entre toutes les figures équivalentes, le cercle a le périmètre minimum.

Si une figure F avait un périmètre moindre que celui du cercle C équivalent, on pourrait la transformer en un cercle C′, isopérimètre avec F, et plus grand que F. Ce second cercle C′, plus grand que le cercle C, aurait donc un périmètre moindre que celui de C ; ce qui est absurde.

Théorème XII.

Il existe toujours une circonférence à laquelle est inscriptible un polygone convexe dont les côtés sont respectivement égaux à des droites données (*).

Soit AB le plus grand des n côtés donnés ; soit O le centre d'un *très-grand* arc BMA, passant par les points A, B, et situé, par exemple, *au-dessus* de AB. A partir du point B, inscrivons à l'arc BMA, les uns à la suite des autres, les $n-1$ côtés BC, CD,... GH : si l'arc BMA est suffisamment grand, la ligne brisée BCD... GH sera tout entière au-dessus de AB.

Actuellement, faisons mouvoir le centre O jusqu'à ce

(*) On suppose, bien entendu, la plus grande des droites données moindre que la somme de toutes les autres.

qu'il passe *au-dessous* de AB : pendant ce mouvement, l'extrémité H de la ligne brisée se rapprochera du point A, puis le dépassera, de manière à descendre *au-dessous* de AB.

En effet, à mesure que le centre O *descend*, l'arc AMB diminue ; et comme il a pour limite la droite AB, il finit par être plus petit que la ligne brisée BCD... GH : à ce moment, l'extrémité H de cette ligne brisée est donc sur le prolongement ANB de l'arc BMA, ou au-dessous de AB.

Remarquons à présent que, par la nature du mouvement de H, ce point ne peut passer au-dessous de AB sans avoir coïncidé, à une certaine époque, avec le point A. Donc *il existe une circonférence, et une seule, à laquelle est inscriptible le polygone convexe* ABC... GA, *ayant ses côtés respectivement égaux à des droites données* (*).

Remarque. La grandeur de la circonférence circonscrite est indépendante de l'ordre dans lequel sont disposés les côtés du polygone.

Théorème XIII.

Entre tous les polygones formés avec des côtés donnés, le maximum est le polygone convexe inscriptible.

FIG. 246. Soient deux polygones ABCDE, *abcde*, équilatéraux entre eux, et dont le premier est inscriptible (Th. XII). Apportons les segments AMB, BNC,... en *amb*, *bnc*,...: nous formerons une figure *ambnc*..., isopérimètre avec le cercle AMBN..., et plus petite que ce cercle (Th. X). Donc, à cause des parties communes, le premier polygone est plus grand que le second.

(*) Cette démonstration est due à Prouhet (*Nouvelles Annales*, t. IX).

Théorème XIV.

Entre tous les triangles isopérimètres et de même base, le maximum est le triangle isoscèle.

Soient le triangle isoscèle ACB et le triangle scalène AC'B, ayant même base AB, et dans lesquels FIG. 247.

$$AC + CB = AC' + C'B.$$

Prolongeons AC d'une longueur égale CE ; menons EC' et EB. Nous aurons

$$AC' + C'E > AE,$$

ou

$$AC' + C'E > AC + CB,$$

ou enfin

$$C'E > C'B.$$

L'oblique C'E étant plus grande que l'oblique C'B, le point C' doit être situé entre le point B et la perpendiculaire CF élevée au milieu de EB ; donc

$$CD > C'D',$$

ou

$$ACB > AC'B.$$

Théorème XV.

Entre tous les polygones isopérimètres et d'un même nombre de côtés, le polygone maximum est équilatéral.

Si, dans le polygone ABCDEF, les deux côtés consécutifs AB, BC sont inégaux, nous pourrons remplacer le triangle ABC par le triangle isoscèle AB'C, isopérimètre avec le premier. D'après le théorème précédent, le polygone AB'CDEF, isopérimètre avec ABCDEF, sera plus grand que celui-ci. Le polygone maximum, entre tous ceux qui ont un périmètre donné, est donc équilatéral. FIG. 248.

Théorème XVI.

Entre tous les polygones isopérimètres et d'un même nombre de côtés, le maximum est le polygone régulier.

En effet, ce polygone maximum est en même temps équilaléral (Th. XV) et inscriptible (Th. XIII).

Théorème XVII.

Entre tous les polygones équivalents et d'un même nombre de côtés, le polygone régulier a le périmètre minimum.

La démonstration est la même que celle du Théorème XI.

Théorème XVIII.

De deux polygones réguliers isopérimètres, le maximum est celui qui a le plus grand nombre de côtés.

Soient deux polygones réguliers isopérimètres, l'un de n côtés, l'autre de $n+1$ côtés.

Prenons un point sur l'un des côtés du premier polygone : nous pouvons considérer cette figure comme un polygone *irrégulier* de $n+1$ côtés ; donc, par le Théorème XVI, elle est plus petite que le second polygone régulier donné (*).

Théorème XIX.

De tous les triangles inscrits à un même segment, le maximum, en surface et en périmètre, est le triangle isoscèle.

FIG. 249. Soient le triangle isoscèle ACB et le triangle scalène AC'B, inscrits au segment ACC'B, ét ayant pour base com-

(*) Cette démonstration, remarquable par la simplicité, est due à Steiner, ainsi que celle du Théorème X. (Voyez *Journal de Liouville*, tome VI.)

mune la base AB du segment. Il est d'abord évident que ACB, qui a pour hauteur la hauteur du segment, surpasse AC′B.

Pour démontrer que ACB a aussi le périmètre maximum, décrivons, du point C comme centre, la circonférence ABD; prolongeons AC′ jusqu'à sa rencontre en D avec cette ligne ; enfin, menons DB.

L'angle D, qui a son sommet à la circonférence, est moitié de l'angle ACB ; donc il est moitié de l'angle AC′B. Conséquemment, le triangle BC′D est isoscèle, et

$$AD = AC' + BC'.$$

Or, la corde AD est moindre que le double du rayon AC donc

$$AC' + BC' < AC + BC.$$

Théorème XX.

Entre tous les polygones d'un même nombre de côtés, inscrits à un même cercle, le maximum, en surface et en périmètre, est le polygone régulier.

La démonstration est la même que celle du Théorème XV.

Théorème XXI.

De deux polygones réguliers, inscrits à un même cercle, celui qui a le plus grand nombre de côtés est le plus grand en surface.

Soient AB, AC les côtés de deux polygones réguliers, l'un de n côtés, l'autre de $n + 1$ côtés, inscrits à un même cercle de rayon AO. Menons BO et CO. Fig. 251

Le premier polygone se compose de n triangles, égaux à ABO ; le second se compose de $n + 1$ triangles, égaux à ACO. Cela étant, je dis que l'on a

$$(n + 1)\ \text{ACO} > n\text{ABO}.$$

Les triangles ABO, ACO ayant même base AO, sont entre eux comme leurs hauteurs BB′, CC′ ; et l'inégalité précédente revient à

$$(n + 1)\ \text{CC}' > n\text{BB}'.$$

Projetons B, C sur le rayon perpendiculaire à OA ; il suffit de faire voir que l'on a

$$\text{CC}' > n\text{B}''\text{C}''.$$

Les arcs AB, AC sont respectivement $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+1}$ de la circonférence ; donc

$$\text{arc BC} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

de cette même circonférence, et

$$\text{arc BC} = \frac{1}{n}\,\text{arc AC}.$$

Portons l'arc BC sur l'arc AC ; soient D, E... les points de division. En projetant ces points, nous aurons, ainsi qu'il est aisé de le reconnaître :

$$\text{C}''\text{D}'' > \text{B}''\text{C}'',$$
$$\text{D}''\text{E}'' > \text{B}''\text{C}'',$$
$$\ldots\ldots\ldots;$$

d'où, en ajoutant,

$$\text{C}''\text{O} > n\text{B}''\text{C}'',$$

ou enfin

$$\text{CC}' > n\text{B}''\text{C}''.$$

Théorème XXII.

De deux polygones réguliers, inscrits à un même cercle, celui qui a le plus grand nombre de côtés a le plus grand périmètre.

AB étant le côté d'un polygone régulier de n côtés, soit p_n le périmètre de cette figure. Divisons l'arc AB en deux parties égales, par le rayon OC, et menons AC, qui sera le côté du polygone régulier de $2n$ côtés. Soit P_{2n} l'aire de ce polygone.

On a $p_n = n\,\mathrm{AB}$. D'ailleurs, le quadrilatère ACBO a pour mesure

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB.\,OC} = \frac{1}{2}\mathrm{R.AB}\,;$$

donc

$$P_{2n} = \frac{1}{2}\,\mathrm{R}\,.\,n\mathrm{AB}.$$

Ces valeurs donnent

$$p_n = \frac{2}{\mathrm{R}}\,P_{2n}.$$

Nous venons de voir que P_{2n} augmente avec n ; de plus, le facteur $\frac{2}{\mathrm{R}}$ est constant ; donc, etc.

Théorème XXIII.

De tous les triangles qui ont même hauteur et même angle opposé à la base, le plus petit est le triangle isoscèle.

Soient le triangle isoscèle ACB et le triangle scalène A'CB', ayant même hauteur CD, et dans lesquels les angles ACB, A'CB' sont égaux entre eux. Je dis que la base AB du premier est moindre que la base A'B' du second. FIG. 252.

Ces bases ont une partie commune A'B ; donc il suffit suffit de faire voir que l'on a $\mathrm{AA'} < \mathrm{BB'}$.

Faisons tourner le triangle ACA′ autour de CD, de manière qu'il vienne prendre la position BCE. Alors, à cause de l'égalité des angles BCB′, ACA′, BC sera bissectrice de l'agnle ECB′. Nous aurons donc

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BB'}} = \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CB'}},$$

ou

$$\frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{BB'}} = \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CB'}}.$$

Mais l'oblique CE est plus petite que l'oblique CB′ : donc, etc.

Théorème XXIV.

De tous les polygones d'un même nombre de côtés, circonscrits à un même cercle, le plus petit, en surface et en périmètre, est le polygone régulier.

FIG. 253. Soit un polygone irrégulier ABCD, circonscrit à un cercle O. Parmi les côtés de cette figure, il y en aura au moins un, tel que BC, dont le point de contact F avec la circonférence ne sera pas le milieu de BC. Remplaçons ce côté par une droite B′C′ qui soit divisée en deux parties égales par son point de contact F′. Je dis que le nouveau polygone AB′C′D a un périmètre moindre que celui de ABCD.

La somme des angles B, C du premier polygone est égale à celle des angles B′, C′ du second. Si donc nous menons les droites OB, OC, OB′, OC′, bissectrices de ces angles, nous aurons

$$\mathrm{OBC} + \mathrm{OCB} = \mathrm{OB'C'} + \mathrm{OC'B'};$$

d'où, en prenant les suppléments,

$$\mathrm{BOC} = \mathrm{B'OC'}.$$

De là résulte que les triangles BOC, B′OC′ peuvent être regardés comme ayant même hauteur et même angle opposé à la base ; donc, par le théorème précédent,

$$B'C' < BC.$$

Cette inégalité équivaut à

$$B'F' + F'C' < BF + FC ;$$

d'où

$$B'E + B'F' + F'C' + C'G < BE + BF + FC + CG ;$$

etc.

Ainsi, tant que le polygone considéré n'est pas régulier, on peut diminuer son périmètre et sa surface. Le polygone minimum est donc régulier.

Théorème XXV.

De deux polygones réguliers, circonscrits à un même cercle, celui qui a le plus grand nombre de côtés est le plus petit, en surface et en périmètre.

En effet, un polygone régulier circonscrit, de n côtés, peut être regardé comme un polygone irrégulier de $n + 1$ côtés ; donc, d'après le théorème précédent, il est plus grand que le polygone régulier circonscrit, de $n + 1$ côtés, etc.

Problème I.

On construit, sur le diamètre AB d'une circonférence C, un triangle équilatéral ABD ; on divise AB en n parties égales, et l'on joint l'extrémité E de la deuxième division, avec le point D, par la sécante DEF. Quelle est l'expression de la corde AF?

Prenons pour unité le rayon de la circonférence ; désignons, pour abréger, par δ la distance CE, égale à $1 - \frac{4}{n}$. Représentons AF par x. Enfin, abaissons FP perpendiculaire sur DF. FIG. 261.

Le trapèze ACPF a deux angles droits, en C et en P; donc

$$\overline{AF}^2 = \overline{CP}^2 + (AC - FP)^2;$$

ou, à cause du triangle rectangle CPF :

$$x^2 = 2 - 2FP. \qquad (1)$$

D'un autre côté,

$$\frac{FP}{EC} = \frac{PD}{CE},$$

ou

$$\frac{FP}{\delta} = \frac{CP + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Conséquemment

$$CP = \sqrt{3}\left(\frac{FP}{\delta} - 1\right).$$

Le triangle CPF donne ensuite

$$\overline{FP}^2 + 3\left(\frac{FP}{\delta} - 1\right)^2 = 1,$$

ou

$$(3 + \delta^2)\,\overline{FP}^2 - 6\delta\,.\,FP + 2\delta^2 = 0. \qquad (2)$$

On tire, de cette équation,

$$FP = \delta\,.\,\frac{3 + \sqrt{3 - 2\delta^2}}{3 + \delta^2}\ (*);$$

donc la formule (1) devient

$$x^2 = 2 - 2\delta\frac{3 + \sqrt{3 - 2\delta^2}}{3 + \delta^2}; \qquad (3)$$

puis, à cause de $\delta = 1 - \frac{4}{n}$:

(*) La seule valeur admissible pour FP est celle qui est représentée par la plus grande racine de l'équation (2). En effet, la somme des racines est inférieure à 2δ, et FP doit surpasser δ.

$$x^2 = 2 - \frac{n-4}{2}\,\frac{3n+\sqrt{n^2+16n-32}}{(n-1)^2+3}. \quad (4)$$

Supposons n égal, successivement, à 3, 4, 5, 6 ; nous aurons :

pour $n = 3,\quad \delta = -\frac{1}{3},\quad x = \sqrt{3}$;

$n = 4,\quad \delta = 0,\quad x = \sqrt{2}$;

$n = 5,\quad \delta = \frac{1}{5},\quad x = \sqrt{\frac{61-\sqrt{73}}{38}}$;

$n = 6,\quad \delta = \frac{1}{3},\quad x = 1.$

Les deux premières valeurs et la quatrième représentent rigoureusement les côtés du triangle équilatéral, du carré et de l'hexagone régulier, inscrits au cercle C.

Quant à la valeur de x qui répond à $n = 5$, elle n'est pas égale au côté du pentagone régulier, dont l'expression est

$$c = \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

mais elle en diffère assez peu ; car on trouve :

$$x = 1{,}1785\ldots,\qquad c = 1{,}1749\ldots$$

La construction indiquée dans l'énoncé du problème permet donc d'inscrire, à une circonférence donnée, un certain nombre de polygones réguliers, soit rigoureusement, soit par approximation (*).

(*) Cette construction. ou plutôt cette règle pratique, m'a été indiquée, il y a quarante ans, par un ouvrier : on la trouve dans le *Traité de la construction et des principaux usages des Instruments de Mathématiques*, par Bion (4e édit., Paris, 1752). Voyez, sur ce sujet' une intéressante Note de M. Housel (*Nouvelles Annales*, tome VII p. 77).

Problème II.

On construit, sur le diamètre AB d'une circonférence C, un triangle équilatéral ADB; on divise le rayon CA en n parties égales, et l'on joint l'extrémité E de la quatrième division, avec le point D, par la sécante DEF. Quelle est l'expression de la corde FG, G étant l'extrémité du diamètre DCG ?

FIG. 261. Représentons par δ' le segment CE du rayon, et par x' la corde FG. Cette droite est moyenne proportionnelle entre sa projection PG et le diamètre ; donc

$$x'^2 = 2 - 2\text{CP}.$$

D'ailleurs (Prob. I)

$$\text{CP} = \sqrt{3}\left(\frac{3 + \sqrt{3 - 2\delta'^2}}{3 + \delta'^2} - 1\right);$$

donc

$$x'^2 = 2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3 - 2\delta'^2} - \delta'^2}{3 + \delta'^2},$$

ou enfin, à cause de $\delta' = \frac{4}{n}$:

$$x'^2 = 2 - 2\sqrt{3}\,\frac{n\sqrt{3n^2 - 32} - 16}{3n^2 + 16}. \qquad (5)$$

Cette formule, un peu plus simple que la formule (4) (Prob. I), donne, plus approximativement que celle-ci, le côté du polygone régulier inscrit, de n côtés ; du moins à partir de $n = 8$. La construction indiquée dans l'énoncé (*) doit donc être préférée à la règle pratique de Bion.

(*) Elle est due à M Tempier, sous-directeur des Écoles primaires à Montpellier (Voyez les *Nouvelles Annales*, tomes XII et XIII).

Remarque. Si l'on prenait $CE = \frac{2}{n}$, la perpendiculaire FP serait, à fort peu près, la moitié du côté cherché. On peut donc remplacer les formules (4) et (5) par celle-ci :

$$x'' = 2 \cdot \frac{2}{n} \frac{3 + \sqrt{3 - \frac{8}{n^2}}}{3 + \frac{4}{n^2}},$$

c'est-à-dire

$$x'' = 4 \frac{3n + \sqrt{3n^2 - 8}}{3n^2 + 4} \quad (*).$$

Problème III.

A l'extrémité B du rayon CB d'un cercle donné C, on élève une tangente BD égale au diamètre ; on prolonge cette tangente d'une longueur Da égale au cinquième du rayon, et d'une longueur Db égale aux trois cinquièmes du rayon ; on prend BA égale à Ca ; enfin, par le point A, on mène AE parallèle à Cb. Quelle est l'expression de BE ?

Prenons le rayon pour unité : nous aurons, successivement, FIG. 262.

$$Ba = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}; \quad Bb = \frac{13}{5};$$

$$BA = Ca = \sqrt{1 + \frac{121}{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{146}; \quad BE = \frac{13}{5} \cdot BA = \frac{13}{25}\sqrt{146}.$$

(*) Cette nouvelle formule et la construction d'où elle est tirée sont fort approchées lorsque $n = 4, 5, 6.....$ Si n est très-grand, au lieu de prendre $CD = \sqrt{3} = 1,732...$, il vaut mieux supposer $CD = \frac{7}{4} = 1,75$. Entre ces positions extrêmes du point D, il y en une pour laquelle l'approximation moyenne du résultat est la plus grande possible.

La droite BE est, à fort peu près, égale à la circonférence rectifiée.

En effet, en employant les logarithmes, on trouve

$$\log 146 = 2,16435286.$$

$$\frac{1}{2} = 1,08217643,$$

$$\log 13 = 1,11394335,$$

$$\log 50 = 1,69897000.$$

$$\log \frac{1}{2} \text{BE} = 0,49714978,$$

$$\frac{1}{2} \text{BE} = 3,1415915.$$

Or, le rapport de la circonférence au diamètre est égal

G., 378. à 3,141592... ; etc.

Cette construction a été donnée par M. Specht.

Problème IV.

Connaissant les périmètres p, P de deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit, déterminer les périmètres p', P' des polygones réguliers, l'un inscrit, l'autre circonscrit, d'un nombre double de côtés.

FIG. 257. AB étant le côté d'un polygone régulier de n côtés, inscrit à un cercle O, menons la tangente CD, parallèle à AB, et terminons-la aux rayons prolongés OA, OB : CD sera le côté du polygone régulier circonscrit, homologue à AB.

Joignons le point de contact E, milieu de l'arc AB, au point A ; la corde AE est le côté du polygone régulier inscrit, de $2n$ côtés. Enfin, si nous menons les bissectrices OF, OG des angles AOE, EOB, la partie FG de CD sera le côté du polygone régulier de $2n$ côtés, circonscrit au cercle O.

Nous aurons donc, en premier lieu :

$$p = n \,.\, \mathrm{AB}, \quad \mathrm{P} = n \,.\, \mathrm{CD}, \quad p' = 2n \,.\, \mathrm{AE}, \quad \mathrm{P}' = 2n \,.\, \mathrm{FG}.$$

Pour évaluer P′ en fonction de p et de P, observons que la bissectrice OF et les parallèles CD, AB donnent

$$\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FE}} = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OE}} = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{AO}} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}};$$

d'où

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{FE}} = \frac{\mathrm{CD} + \mathrm{AB}}{\mathrm{AB}}.$$

Si l'on multiplie par $4n$ les deux termes du premier rapport, et par n les deux termes du second, on trouve, à cause des valeurs ci-dessus,

$$\mathrm{P}' = \frac{2\mathrm{P}p}{\mathrm{P} + p}. \qquad (1)$$

Pour déterminer p, considérons les triangles semblables EIF, AHF : il en résulte

$$\frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{AH}} = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{AE}};$$

d'où

$$\overline{\mathrm{AE}}^2 = 2\mathrm{AH} \,.\, \mathrm{EF}.$$

En multipliant les deux membres par $4n^2$, et extrayant les racines, nous aurons donc

$$p' = \sqrt{\mathrm{P}'p}. \qquad (2)$$

Remarque. Au moyen des formules (1), (2) on peut prouver que *la différence* P′—p′ *entre les périmètres des polygones réguliers de* 2n *côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit à un cercle donné, est moindre que le quart de la différence* P — p *entre les périmètres des polygones réguliers de* n *côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit.*

Mais on parvient plus rapidement au même résultat en employant la démonstration géométrique suivante, donnée par M. *Henri Bertot.*

FIG. 258. Soient, comme précédemment, AB, CD les côtés des polygones réguliers de n côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit; et soit AE le côté du polygone régulier inscrit, de $2n$ côtés. Si nous menons la tangente FG parallèle à AE, et que nous la terminions aux prolongements des rayons OA, OE, cette tangente sera le côté du polygone régulier circonscrit, de $2n$ côtés. Nous aurons donc

$$p = 2n.\mathrm{AH}, \quad \mathrm{P} = 2n.\mathrm{CE}, \quad p' = 2n.\mathrm{AE}, \quad \mathrm{P}' = 2n.\mathrm{FG};$$

en sorte qu'il suffit de démontrer la relation suivante :

$$\mathrm{FG} - \mathrm{AE} < \frac{1}{4}(\mathrm{CE} - \mathrm{AH}).$$

Menons AML parallèle à OE; il en résulte

$$\mathrm{FM} = \mathrm{FG} - \mathrm{AE}, \quad \mathrm{CL} = \mathrm{CE} - \mathrm{AH},$$

et l'inégalité devient

$$\mathrm{FM} < \frac{1}{4}\,\mathrm{CL}.$$

La corde KE étant bissectrice de l'angle CEA, on a $\mathrm{IK} < \frac{1}{2}\,\mathrm{IN}$; d'où, en menant APQ parallèle à OKN :

$$\mathrm{AP} < \frac{1}{4}\,\mathrm{AQ}.$$

Conséquemment, une parallèle à CL, menée par le point P, et terminée aux côtés de l'angle CAL, serait plus petite que le quart de CL. Or, FM étant également inclinée sur les côtés de cet angle, est moindre que cette parallèle; donc, etc.

Problème V.

Connaissant les aires A, B de deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit, trouver les aires A', B' des polygones réguliers, l'un inscrit, l'autre circonscrit, d'un nombre double de côtés.

En conservant les constructions précédentes, et en appelant n le nombre des côtés de chacun des deux premiers polygones, nous aurons : FIG. 257.

$$A = 2n.\mathrm{AOH}, \quad B = 2n.\mathrm{COE},$$
$$A' = 2n\ \mathrm{AOE}, \quad B' = 4n\ \mathrm{FOE}.$$

Cherchons donc des relations entre les aires des triangles AOH, COE, AOE, FOE.

Les triangles AOH, AOE ayant même hauteur,

$$\frac{\mathrm{AOH}}{\mathrm{AOE}} = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OE}}.$$

De même, les triangles AOE, COE ont même hauteur; par suite,

$$\frac{\mathrm{AOE}}{\mathrm{COE}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OC}}.$$

Mais, à cause des parallèles,

$$\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OE}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OC}};$$

conséquemment,

$$\frac{\mathrm{AOH}}{\mathrm{AOE}} = \frac{\mathrm{AOE}}{\mathrm{COE}};$$

d'où

$$\frac{A}{A'} = \frac{A'}{B}.$$

La première relation est donc

$$A' = \sqrt{AB}.$$

Pour trouver la seconde, observons d'abord que les triangles COE, FOE, qui ont même hauteur, donnent, à cause de la bissectrice OF,

$$\frac{\mathrm{COE}}{\mathrm{FOE}} = \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{FE}} = \frac{\mathrm{OC} + \mathrm{OE}}{\mathrm{OE}}.$$

Mais OE = OA, et l'on a

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OH}} = \frac{\mathrm{AOE}}{\mathrm{AOH}};$$

donc

$$\frac{\mathrm{COE}}{\mathrm{FOE}} = \frac{\mathrm{AOE} + \mathrm{AOH}}{\mathrm{AOH}}.$$

Multipliant les deux termes de chaque rapport par $4n$, nous trouvons

$$\frac{2\mathrm{B}}{\mathrm{B}'} = \frac{\mathrm{A}' + \mathrm{A}}{\mathrm{A}},$$

ou

$$\mathrm{B}' = \frac{2\mathrm{AB}}{\mathrm{A} + \mathrm{A}'}. \qquad (2)$$

Remarque. On peut démontrer, assez simplement, que *la différence* B′ — A′ *entre les aires des polygones de* 2n *côtés, est moindre que le quart de la différence* B — A *entre les aires des polygones de* n *côtés.*

Observons d'abord que ces différences sont proportionnelles à AFE et ACEH. Conséquemment, il suffit de faire voir que le triangle AFE est moindre que le quart du trapèze ACEH, ou que l'on a

$$\mathrm{FE} < \frac{1}{4}(\mathrm{CE} + \mathrm{AH}).$$

Soit K le point de rencontre de la bissectrice OF avec AH : nous aurons

$$\mathrm{FE} = \mathrm{AF} = \mathrm{AK} = \mathrm{KE},$$

attendu que AE est la bissectrice de l'angle FAB. L'inégalité précédente se réduit donc à

$$FE < \frac{1}{2}(CF + KH).$$

Or, les triangles rectangles CAF, EHK, sont semblables, et ils donnent

$$\frac{CF}{EK} = \frac{AF}{KH},$$

ou

$$\frac{CF}{FE} = \frac{FE}{KH}.$$

Mais on sait que la moyenne par quotient est moindre qne la moyenne par différence : l'inégalité est donc démontrée.

Problème VI.

Connaissant le rayon R et l'apothème r d'un polygone régulier, trouver le rayon R′ et l'apothème r' d'un polygone régulier isopérimètre, d'un nombre double de côtés.

Soient AB le côté du premier polygone ; O, son centre ; OA, le rayon du cercle circonscrit ; OD, l'apothème. Prenons le milieu C de l'arc ACB. Menons AC, CB, puis OA′ perpendiculaire à AC, et OB′ perpendiculaire à BC. FIG. 259.

La corde A′B′ est moitié de AB, et l'angle A′OB′ est moitié de AOB ; d'où il résulte que OA′ et OD′ sont le rayon R′ et l'apothème r' du second polygone (*).

Cela posé, le point D′ est le milieu de OC, et OA′ est

(*) Cette élégante construction est due à Léger, ancien chef d'institution à Montmorency. (Voyez *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome V.)

moyenne proportionnelle entre OC et OD ; donc

$$r' = \frac{1}{2}(r + \mathrm{R}), \quad \mathrm{R}' = \sqrt{\mathrm{R}r'}.$$

Ainsi : 1° *le second apothème est moyen, par différence, entre le premier apothème et le premier rayon ;* 2° *le second rayon est moyen, par quotient, entre le premier rayon et le second apothème.*

Remarques. I. La *flèche* CD est égale à $\mathrm{R} - r$; et si, du point O pris comme centre, nous décrivons l'arc A'EB', nous aurons $\mathrm{R}' - r' = \mathrm{ED}'$. Or la corde A'E est bissectrice de l'angle CA'D' ; donc, à cause de $\mathrm{A'D'} < \mathrm{A'C}$, on a

$$\mathrm{ED}' < \frac{1}{2}\,\mathrm{CD}', \quad \mathrm{ED}' < \frac{1}{4}\,\mathrm{CD},$$

ou enfin

$$\mathrm{R}' - r' < \frac{1}{4}(\mathrm{R} - r).$$

Ainsi, *la différence entre le second rayon et le second apothème est moindre que le quart de la différence entre le premier rayon et le premier apothème.*

II. Les formules ci-dessus sont beaucoup plus simples que celles qui résolvent les Problèmes IV et V. Mais, ainsi que Vincent l'a fait voir, on peut ramener celles-ci aux premières. Prenons, par exemple, les relations

$$\mathrm{A}' = \sqrt{\mathrm{AB}}, \quad \mathrm{B}' = \frac{2\mathrm{AB}}{\mathrm{A} + \mathrm{A}'}.$$

Si l'on suppose

$$\mathrm{A} = \frac{1}{a}, \mathrm{B} = \frac{1}{b}, \mathrm{A}' = \frac{1}{a}, \mathrm{B}' = \frac{1}{b};$$

on trouve, par un calcul très-simple,

$$a' = \sqrt{ab}, \quad b' = \frac{1}{2}(a' + b).$$

Problème VII.

Connaissant les périmètres de deux polygones réguliers inscrits, l'un de n côtés, l'autre de $2n$ côtés, trouver le périmètre du polygone régulier inscrit, de $4n$ côtés.

Nommons p, p', p'' les périmètres successifs ; nommons P, P', P'' les périmètres des polygones réguliers circonscrits, respectivement semblables aux premiers polygones. Nous aurons, par le Problème IV :

$$P' = \frac{2Pp}{P+p}, \quad p'^2 = P'p,$$
$$P'' = \frac{2P'p'}{P'+p'}, \quad p''^2 = P''p'.$$

Si, entre les trois dernières équations, on élimine P' et P'', on aura la relation cherchée.

Or, $P' = \dfrac{p'^2}{p}$; d'où, en substituant,

$$P'' = \frac{2p'^2}{p+p'};$$

puis

$$p''^2 = \frac{2p'^3}{p+p'}.$$

Remarques. I. Si, à un cercle donné, on inscrit une série indéfinie de polygones réguliers, dont les nombres de côtés aillent sans cesse en doublant, on aura, en représentant par $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{k-1}, p_k, p_{k+1}, \ldots$ les périmètres de ces polygones :

$$(p_{k+1})^2 = 2\,\frac{(p_k)^3}{p_k + p_{k-1}}.$$

II. Cette formule peut être écrite ainsi :

$$\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)^2 = 2\,\frac{\left(\dfrac{p_k}{p_{k-1}}\right)}{\left(\dfrac{p_k}{p_{k-1}}\right)+1}.$$

Si donc nous représentons généralement par m_k le rapport du périmètre p_{k+1} au périmètre p_k, nous aurons

$$m_k = \sqrt{\frac{2m_{k-1}}{1+m_{k-1}}}.$$

III. Si, au lieu d'éliminer P′ et P″ entre les équations ci-dessus, on éliminait p et p', on trouverait des résultats moins simples que les précédents.

Problème VIII.

Connaissant les aires de deux polygones réguliers inscrits, l'un de n côtés, l'autre de $2n$ côtés, trouver l'aire du polygone régulier inscrit, de $4n$ côtés.

Les formules du Problème V donnent, par un calcul semblable à celui que nous venons d'effectuer

$$A''^2 = \frac{2A'^3}{A+A'}.$$

Remarques. I. *La loi des aires est la même que la loi des périmètres.*

III. Nommons A_1, A_2, A_3, ..., A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, ... les aires des polygones dont les périmètres ont été représentés par p_1, p_2, p_3 ... ; nous aurons

$$(A_{k+1})^2 = 2\,\frac{(A_k)^3}{A_k + A_{k-1}},$$

$$\left(\frac{A_{k+1}}{A_k}\right)^2 = 2\,\frac{1+\dfrac{A_k}{A_{k-1}}}{\dfrac{A_k}{A_{k-1}}};$$

et, en appelant λ_k le rapport $\dfrac{A_{k+1}}{A_k}$:

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{2\lambda_{k-1}}{1+\lambda_{k-1}}}.$$

Problème IX.

Connaissant les rayons R, R′ de deux polygones réguliers isopérimètres, l'un de n côtés, l'autre de $2n$ côtés, trouver le rayon R″ du polygone régulier isopérimètre, de $4n$ côtés.

Les formules du Problème VI donnent

$$R''^2 = \frac{R'^2(R + R')}{2R};$$

d'où, en général,

$$\frac{R_{k+1}}{R_k} = \sqrt{\frac{1 + \dfrac{R_k}{R_{k-1}}}{2}}.$$

Remarques. I. Si l'on emploie les plus simples formules de la trigonométrie, on arrive, au moyen de la relation précédente, à un résultat assez remarquable.

Les rayons R_1, R_2, ... vont en diminuant ; donc le rapport $\frac{R_2}{R_1}$, inférieur à l'unité, est égal au *cosinus* d'un certain arc α. Dès lors,

$$\frac{R_3}{R_2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2};$$

et, par conséquent,

$$\frac{R_{k+1}}{R_k} = \cos\frac{\alpha}{2^{k-1}}.$$

Cette conclusion est, du reste, évidente à l'inspection de la figure 259. En effet,

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{R_2}{R_1} = \cos AOA';$$

donc, semblablement,

$$\frac{R_3}{R_2} = \cos\frac{AOA'}{2};$$

etc.

II. Multiplions entre elles les valeurs de tous les rapports ; nous obtiendrons

$$R_{k+1} = R_1 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^2} \dots \cos\frac{\alpha}{2^{k-1}}.$$

Problème X.

Calculer les aires et les périmètres des polygones réguliers de 4, 8, 16,... côtés, inscrits à un cercle donné.

Prenons pour unité le rayon de ce cercle, et commençons par déterminer les aires et les périmètres du carré et de l'octogone. Un calcul facile donne

$$A_1 = 2, \quad A_1 = 2\sqrt{2}, \quad p_1 = 4\sqrt{2}, \quad p_2 = 8\sqrt{2\sqrt{2}}\,;$$

d'où

$$\lambda_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad m_1 = 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Nous trouvons ensuite, par les formules

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{2\lambda_{k-1}}{1+\lambda_{k-1}}},$$

$$m_k = \sqrt{\frac{2m_{k-1}}{1+m_{k-1}}}:$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = m_1,$$

$$\lambda_3 = \sqrt{\frac{4}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = m_2,$$

$$\lambda_4 = \sqrt{\frac{4}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} = m_3\,;$$

etc.

La loi de ces valeurs est manifeste ; et d'ailleurs, par un procédé bien connu, on pourrait démontrer qu'elle est générale.

Maintenant, l'aire et le périmètre du polygone de 2^{k+1} côtés sont représentés par A_k et p_k; et nous avons

$$A_k = A_1.\lambda_1.\lambda_2.\lambda_3\ldots\lambda_{k-1},\quad p_k = p_1 m_1.m_2.m_2\ldots m_{k-1}\ ;$$

donc

$$A_k = \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\ldots,$$

k étant le nombre des facteurs ; et

$$p_k = 4.\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\ldots,$$

$k+1$ étant le nombre des facteurs.

Par exemple, l'aire et le périmètre du polygone régulier de 64 côtés ont pour valeurs :

$$A_5 = 2.\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}},$$

$$p_5 = 4.\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}\times$$

$$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}.$$

Remarques. I. Si on voulait passer au calcul *numérique*, ces formules seraient fort incommodes ; mais il est aisé de les transformer. En effet, si nous considérons, par exemple, la valeur de A_5, nous aurons, en divisant les deux membres par $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$:

$$\frac{A_5}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}=2\frac{2}{\sqrt{2}}\,\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\,\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}=$$

$$2\,\frac{2}{\sqrt{2}}\,\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,\frac{2^2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2_3}=2^4\,;$$

donc

$$A_5=2^4\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\,.$$

De même,

$$p_5=2^6\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}\,.$$

En général

$$A_k=2^{k-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}\,,$$

k étant le nombre des radicaux ;
et

$$p_k=2^{k+1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}\,,$$

$k+1$ étant le nombre des radicaux.

II. La comparaison de ces valeurs donne la relation simple

$$p_k=2A_{k-1}.$$

III. En général,

$$A_k=\frac{1}{2}\,p_k\cdot a_k,$$

a_k représentant l'apothème ; donc

$$a_k=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}\,,$$

le nombre des radicaux étant $k+1$.

IV. Quand le nombre des côtés du polygone augmente, l'apothème tend vers le rayon ; donc

$$2 = \lim . \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} \quad (*).$$

Problème XI.

Les côtés d'un décagone régulier étoilé ABC..., inscrit à un cercle O, forment, par leurs intersections successives, un polygone régulier $AaHhEe$..., ayant vingt côtés. Quels sont, en fonction du rayon R du cercle O, l'aire P et le périmètre p de ce polygone ?

1° Menons la corde AH : nous formerons deux triangles AaH, AHM, isoscèles et semblables. FIG. 263.
Conséquemment,

$$Aa = \frac{\overline{AH}^2}{AM}.$$

On sait que

$$AH = \frac{1}{2} R (\sqrt{5}-1), \quad AM = R \text{ (Th. H)} ;$$

donc

$$Aa = \frac{1}{4} R (\sqrt{5}-1)^2 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \quad (**).$$

Cette valeur donne, pour expression du périmètre,

$$p = 10 R (3-\sqrt{5}).$$

2° Le polygone $AaHh$... se compose de vingt triangles égaux à AaO ; donc l'aire de ce polygone est égale au produit du périmètre p par la moitié de l'apothème OP.

(*) Les Prob. IX et suivants peuvent servir à approcher du rapport de la circonférence au diamètre. On peut consulter, sur ce sujet, les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (tome 1, p. 190).

(**) Il résulte de cette expression, ou de l'inspection de la figure, que $Aa + AH = R$. On reconnaît aussi que le côté Aa de notre polygone est égal à la plus grande partie du côté du décagone régulier convexe, partagé en moyenne et extrême raison.

Celui-ci a pour expression (Th. II, Rem. II) :

$$a = \sqrt{R^2 - \frac{1}{2}\overline{AB}^2} = R\sqrt{1 - \frac{1}{(\sqrt{5}-1)^2}};$$

ou, en simplifiant,

$$a = \frac{1}{4} R \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Conséquemment,

$$P = \frac{5}{4} R^2 (3 - \sqrt{5}) \sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

ou

$$P = \frac{5}{2} R^2 \sqrt{50 - 22\sqrt{5}}.$$

Problème XXII.

Inscrire, à une circonférence donnée, un polygone régulier de trente-quatre côtés.

FIG. 241. Nous avons démontré ci-dessus (Th. VII) qu'il est possible de partager la circonférence en dix-sept parties égales, au moyen de la règle et du compas. De là résulte qu'à une circonférence donnée, l'on peut inscrire le polygone régulier de dix-sept côtés, et aussi celui de trente-quatre côtés. Pour plus de simplicité, nous nous occuperons seulement de ce second polygone.

Remarquons d'abord que si la circonférence C, de rayon R, est partagée en dix-sept parties égales, la corde OA_8, qui joint le point A_8 avec le point O diamétralement opposé au point A_0, est le côté cherché. Or :

$$OA_2 + OA_8 = P, \quad OA_2 . OA_8 = R(OA_6 - OA_7);$$

ou

$$OA_2 + OA_8 = P, \quad OA_2 . OA_8 = RN.$$

Lorsque P et N seront connus, ces deux équations détermineront OA_2, côté d'un polygone étoilé, et AO_8, côté du polygone convexe de trente-quatre côtés : OA_8 est évidemment donné par la plus petite des deux racines.

Pour déterminer P et N, posons

$$M - N = x, \; P - Q = x';$$

alors, x et x' étant supposés connus, nous aurons, en premier lieu,

$$M - N = x, \qquad MN = R^2,$$

et ensuite

$$P - Q = x', \qquad PQ = R^2.$$

Enfin, x et x' sont donnés par les équations

$$x - x' = R, \qquad xx' = 4R^2.$$

Nous pouvons maintenant nous proposer, soit la résolution de ces diverses équations, soit la construction qui en résulte.

Résolution. La première question ne présente aucune difficulté : on obtient en effet, par les propriétés les plus simples de l'équation du second degré, les valeurs qui suivent :

$$x = \frac{1}{2} R \left(1 + \sqrt{17}\right), \qquad x' = \frac{1}{2} R \left(-1 + \sqrt{17}\right) ;$$

$$P = \frac{1}{4} R\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right), \quad N = \frac{1}{4} R\left(-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right),$$

$$OA_8 = \frac{1}{8} R\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right) -$$

$$\frac{1}{2} R \sqrt{\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)^2 - 16\left(-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)},$$

Cette dernière valeur, développée, devient

$$OA_8 = c =$$

$$\frac{1}{8} R\left[-1-\sqrt{17}+\sqrt{34-\sqrt{2}17}-\sqrt{68+12\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}+2\sqrt{34(17-\sqrt{17})}}\right]$$

On peut réunir les termes

$$-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}\ ,\quad 2\sqrt{34(17-\sqrt{17})}\ ;$$

et l'on obtient, finalement,

$$c=\frac{1}{8}R\left[-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170-26\sqrt{17}}-4\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right] \text{(*)}$$

FIG. 264. *Construction.* Sur le rayon OA du cercle donné, pris comme diamètre, décrivons une circonférence ; élevons la tangente AD égale à 2R ; joignons le point D au milieu C de OA, par la transversale DC, et soient E, E′ les points où elle coupe la petite circonférence. Nous aurons

$$DE\,.\,DE' = \overline{AD}^2 = 4R^2, \qquad DE - DE' = R\ ;$$

donc

$$DE = x, \qquad DE' = x'.$$

Sur ces deux segments DE, DE′, décrivons les demi-circonférences DHE, DH′E′ ; menons, perpendiculairement à CD, la droite DF égale à R ; joignons le point F aux centres G, G′ des demi-circonférences DE, DE′. Soient H, H′ les points où les droites de jonction coupent ces lignes : il est facile de voir que

$$FH = N, \quad FH' = P.$$

Actuellement, à cause de l'équation

$$OA_2\,.\,OA_8 = RN,$$

(*) On peut encore réduire cette expression ; car si l'on pose

$$4\sqrt{34+2\sqrt{17}}-\sqrt{170-26\sqrt{17}}=r,$$

on trouve, par une méthode indiquée dans tous les Traités d'algèbre,

$$r=\sqrt{170+38\sqrt{17}}\ ,$$

$$c=\frac{1}{8}R\left[-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}\right].$$

et d'après ce qui a été dit ci-dessus, OA_8, ou c, est égal au plus petit côté d'un rectangle équivalent à celui dont les dimensions seraient R et N. Nous devons donc, préalablement, chercher le côté du carré équivalent à cette dernière figure. C'est ce que l'on fait en décrivant, sur DF comme diamètre, une demi-circonférence DLF, portant FH de F en K, élevant KL perpendiculaire à DF, et menant FL.

Décrivons maintenant, sur $FH' = P$, comme diamètre, une nouvelle demi-circonférence FMH' ; menons MN parallèle à FA' et à une distance de cette droite égale à FL ; puis abaissons MP perpendiculaire à FH'. Nous aurons

$$FP + PH' = P, \; FP \,.\, PH' = PM = RN \,;$$

donc

$$PF = c.$$

Remarque. A cause de l'imperfection des instruments et de la multiplicité des constructions, il est bien difficile, dans la pratique, que PF soit rigoureusement la corde du trente-quatrième de la circonférence. Aussi, lorsqu'il est question d'un problème graphique, doit-on préférer, à la construction précédente, l'une des méthodes indiquées ci-dessus (Prob. II et III).

Problème XIII.

Calculer, à moins de 0,001, le rapport entre le côté du polygone régulier de trente-quatre côtés et le rayon du cercle circonscrit.

Reprenons l'expression

$$\frac{c}{R} = \frac{1}{8}\left[-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170-26\sqrt{17}}-4\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right].$$

Afin d'arriver plus rapidement au résultat, nous appliquerons les logarithmes. Mais, comme on ne peut effectuer par leur moyen ni addition ni soustraction, nous calculerons séparément les diverses parties :

$$-1+\sqrt{17}=A,\quad \sqrt{34-2\sqrt{17}}=B,\quad 17+3\sqrt{17}=C,\quad \sqrt{170-26\sqrt{17}}=D,$$
$$\sqrt{34+2\sqrt{17}}=E,\quad \sqrt{C+D-4E}=F.$$

Les opérations prennent alors la disposition suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}\ 17 &= 1,23044892 \\ \frac{1}{2} &= 0,61522446 \\ \sqrt{17} &= 4,12310 \\ A &= 3,12310 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\log 17 &= 0,61522446 \\ \mathrm{Log}\ 26 &= 1,41497335 \\ & \overline{2,03019781} \\ 26\sqrt{17} &= 107,2018 \\ 170-26\sqrt{17} &= 62,7982 \\ \mathrm{Log} &= 1,7979472 \\ \frac{1}{2} &= 0,8989736 \\ D &= 7,92453 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 3,12310+ \\ B &= 5,07482+ \\ 2F &= 6,72160- \\ & \overline{1,47632} \\ \frac{1}{8} &= 0,18454=\frac{c}{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{17} &= 8,24620 \\ 34-2\sqrt{17} &= 25,75380 \\ \frac{1}{2}\log &= 0,7054206 \\ B &= 5,072482 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{17} &= 8,24620 \\ 34+2\sqrt{17} &= 42,24620 \\ \frac{1}{2}\log &= 0,8128944 \\ E &= 6,49972 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\sqrt{17} &= 12,36930 \\ C &= 29,36930+ \\ D &= 7,92453+ \\ 4E &= 25,99888- \\ & \overline{11,29495} \\ \mathrm{Log} &= 1,0528846 \\ \frac{1}{2} &= 0,5264423+ \\ \mathrm{Log}\ 2 &= 0,3010300+ \\ & \overline{0,8274723} \\ 2F &= 6,72160 \end{aligned}$$

Le rapport cherché est donc

$$\frac{c}{R} = 0,18454.$$

Cette valeur, bien qu'obtenue par l'emploi des logarithmes, est approchée à moins de 0,000 01 ; car on trouve, par une autre méthode,

$$\frac{c}{R} = 0{,}184\,538\ldots$$

Problème XIV.

Calculer, à moins de 0,0001, le rapport entre le côté du polygone régulier de dix-sept côtés et le rayon du cercle circonscrit.

On sait qu'en appelant c et C les côtés des polygones réguliers, de $2n$ côtés et de n côtés, inscrits au cercle de rayon R, on a

$$\frac{C}{R} = \frac{c}{R}\sqrt{\left(2 + \frac{c}{R}\right)\left(2 - \frac{c}{R}\right)}.$$ G., 351

Appliquons cette formule, en remplaçant $\frac{c}{R}$ par la valeur 0,18454, trouvée ci-dessus.

Nous aurons

$$2 + \frac{c}{R} = 2{,}18454, \qquad 2 - \frac{c}{R} = 1{,}81546;$$

puis

$$\begin{array}{rl}
\text{Log } 2{,}18454 = & 0{,}3393600 \\
\text{Log } 2{,}81546 = & \underline{0{,}2589867} \\
 & 0{,}5983467 \\
\dfrac{1}{2} = & 0{,}2991733 \\
\text{Log } 0{,}18454 = & \underline{\bar{1}{,}2660905} \\
 & \bar{1}{,}5652630 = \log \dfrac{C}{R}.
\end{array}$$

$$\frac{C}{R} = 0{,}367\,505.$$

On vérifie, par d'autres méthodes, que cette valeur est approchée à moins de 0,001.

Remarques. I. Nous avons vu, précédemment, combien est compliquée la construction du polygone régulier de trente-quatre côtés : il en est de même pour le polygone de dix-sept côtés. Une construction *approximative* peut donc être utile. Or, si l'on compare la valeur ci-dessus avec celle qui donne le côté du triangle équilatéral inscrit, on reconnaît que *le côté du polygone régulier inscrit, de dix-sept côtés, égale, à fort peu près, la demi-différence entre le côté du triangle équilatéral inscrit et le côté de l'hexagone régulier inscrit.*

En effet, le rayon étant pris pour unité,

le côté du triangle équilatéral $= \sqrt{3} = 1,73205$,
le côté de l'hexagone régulier $= \phantom{\sqrt{3}} 1.$
différence $= 0,73205$,

$$\frac{1}{2} = 0,36602.$$

Cette quantité diffère de C d'environ 0,001; donc, etc.

II. Si l'on appliquait le procédé de Bion (Prob. I), on arriverait à un résultat moins approché, mais assez curieux. On a, en effet, pour $n = 17$, $\delta = \frac{13}{17}$; puis $x^2 = \frac{1}{7}$, valeur rationnelle et fort simple.

Elle donne $x = 0,37796...$, quantité qui surpasse C d'environ 0,02.

Problème XV.

A un cercle donné O, inscrire cinq carrés égaux, de manière que l'un d'eux soit concentrique au cercle, et que chacun des quatre autres ait deux sommets sur la circonférence.

Si l'on désigne par R le rayon du cercle et par x le côté de chacun des carrés cherchés, on a, par le triangle rectangle OPL : FIG. 39

$$R^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 ;$$

d'où

$$x^2 = \frac{2}{5} R^2.$$

Ainsi, *le côté de chaque carré est moyen proportionnel entre le rayon et les deux cinquièmes du rayon.*

Remarque. Les sommets du carré intérieur sont situés sur deux diamètres RT, US perpendiculaires entre eux. Or, la demi-diagonale OC est égale à OP $\sqrt{2}$. Donc, à cause de $x = R\sqrt{\frac{2}{5}}$:

$$OC = \sqrt{\frac{1}{5} R^2};$$

en sorte que *la demi-diagonale* OC *est moyenne proportionnelle entre le rayon et le cinquième du rayon.*

Problème XVI.

A un cercle donné, inscrire six pentagones réguliers égaux, de manière que l'un d'eux soit concentrique au cercle, et que chacun des cinq autres ait un sommet sur la circonférence.

Première solution. Si, sur un même côté ab, on construit deux pentagones réguliers $abcde$, $abfgh$, la droite FIG. 40

od, menée du centre de celui-ci au sommet *d*, est le rayon d'un cercle auquel on pourrait inscrire six pentagones égaux aux deux premiers, et disposés conformément à l'énoncé. Il suffit donc, pour achever aisément la construction, de chercher une quatrième proportionnelle aux droites r, R et oa.

G. 401. *Seconde solution.* Le diamètre DOS se compose de DG et de GS. Or

$$GS = LT = LU + OU - OT.$$

Conséquemment, si l'on désigne par R, r et a le rayon donné, le rayon OT et l'apothème OU, on a

$$2R = 2(r + a) + (r + a) + a - r,$$

ou

$$R = r + 2a.$$

Mais, dans tout pentagone régulier,

., 345. $$a = \frac{1}{4} R (\sqrt{5} + 1);$$

donc

$$R = \frac{1}{2} r (3 + \sqrt{5}).$$

On tire, de cette équation,

$$r = \frac{1}{2} R (3 - \sqrt{5});$$

en sorte que le rayon r se construit facilement.

Remarque. Le côté d du décagone régulier, inscrit au cercle donné, est donné par la formule

$$d = \frac{1}{2} R (\sqrt{5} - 1).$$

Si l'on compare cette valeur à la précédente, on trouve

$$r + d = R.$$

On conclut, de cette relation, que *le rayon* OG *est égal au plus petit segment du rayon* OD, *partagé en moyenne et extrême raison.*

Problème XVII.

A un cercle donné, inscrire sept hexagones réguliers égaux, de manière que l'un d'eux soit concentrique au cercle, et que chacun des six autres ait deux sommets sur la circonférence.

Un raisonnement analogue à celui qui a été employé ci-dessus (Probl. XV) donne

$$x^2 = \frac{R^2}{7};$$

x étant le côté de chaque hexagone. *Ce côté est donc moyen proportionnel entre le rayon et le septième du rayon.*

Remarque. D'après le Problème I (*Rem.* II), *ce même côté est, à fort peu près, égal à la corde qui sous-tend le* $\frac{1}{17}$ *de la circonférence.*

LIVRE V.

Théorème I.

Dans tout angle trièdre, les plans bissecteurs des angles dièdres se coupent suivant une même droite.

FIG. 267. Soient ASO le plan bissecteur de l'angle dièdre SA, et BSO le plan bissecteur de l'angle dièdre SB. Ces deux plans se coupent suivant une droite SO, *intérieure* à l'angle trièdre. Un point quelconque M de cette ligne, appartenant à la fois aux plans ASO, BSO, est également distant des trois faces du trièdre ; donc il appartient au plan bissecteur de l'angle dièdre SC ; etc.

Remarques. I. Le lieu des points tels, que chacun soit également distant des trois faces du trièdre se compose de la droite SO, et de trois autres droites SP, SQ, SR. Chacune de ces dernières droites est située, à la fois, dans *un plan bissecteur intérieur,* et dans *deux plans bissecteurs extérieurs.*

FIG. 268. II. Coupons le trièdre S par un plan quelconque L, perpendiculaire à la droite SO. Soient A′B′C′ la section obtenue et O′ le point où la droite SO perce le plan L. Les *traces* des plans bissecteurs intérieurs sont les droites A′O′, B′O′, C′O′. Quant aux traces des plans bissecteurs

extérieurs, ce sont des droites N′P′, P′M′, M′N′, respectivement perpendiculaires aux premières. En effet, la droite N′P′, par exemple, a été menée dans le plan L, perpendiculairement à la trace A′O′ du plan ASO ; donc elle est perpendiculaire à ce dernier plan ; donc le plan bissecteur extérieur, perpendiculaire au plan ASO, et passant par le point A′, contient la droite N′P′ ; etc.

Remarquons maintenant que les trois plans bissecteurs, dont les traces sont P′M′, N′M′, A′O′, se coupant suivant une même droite, leurs traces doivent converger en un même point ; et A′O′, prolongée, passe en M′. Ainsi : *tout plan, mené perpendiculairement à l'intersection des trois plans bissecteurs intérieurs d'un trièdre, coupe les six plans bissecteurs suivant les trois côtés et les trois hauteurs d'un même triangle*. (Voyez Th. I, Liv. I.)

III. Nous savons que les droites A′O′, B′O, C′O′ sont les bissectrices des angles du triangle A′B′C′ (Th. I, Liv. II). Donc *les traces des six plans bissecteurs d'un trièdre, sur un plan* L *perpendiculaire à l'intersection des trois plans bissecteurs intérieurs, sont les six bissectrices du triangle suivant lequel ce plan coupe le trièdre*.

Cette remarque peut recevoir son application dans certaines *épûres* de Géométrie descriptive.

Théorème II.

Dans tout angle trièdre, les plans menés par les arêtes et par les bissectrices des faces opposées se coupent suivant une même droite.

Prenons sur les trois arêtes, à partir du sommet, des distances SA, SB, SC, égales entre elles ; puis faisons passer un plan par les points A, B, C. FIG. 269.

Le triangle SBC étant isoscèle, la bissectrice SM de l'angle BSC passe par le milieu M du côté BC. Donc la trace du plan ASM, sur le plan ABC, est une médiane du triangle ABC. De même pour les plans BSN, CSP. Or les trois médianes se coupent en un même point; etc.

Remarque. Si l'on considère, indépendamment des bissectrices intérieures SM, SN, SP, les bissectrices *extérieures* des angles BSC, ASC, BSA ; puis que, par chacune de ces droites et par l'arête qui n'appartient pas à la même face, on mène un plan, on obtient trois nouveaux plans qui, combinés avec les trois premiers, déterminent trois nouvelles droites SA′, SB′, SC′. Il est facile de reconnaître que, A′ étant la trace de SA′ sur le plan ABC, le point M est le milieu de AA′. De même pour SB′ et SC′.

Théorème III.

Dans tout angle trièdre, les plans menés par les bissectrices des faces, perpendiculairement à ces faces, se coupent suivant une même droite.

FIG. 270. Prenons sur les trois arêtes, à partir du sommet S, les distances égales SA, SB, SC, et menons le plan ABC. La bissectrice SM de la face SBC est perpendiculaire au côté BC, en son milieu M ; et il en est de même des bissectrices SN, SP, à l'égard des deux autres faces. Conséquemment, les plans menés par ces droites, perpendiculairement aux faces correspondantes, ont pour traces, sur le plan ABC, les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés du triangle ABC. Or ces perpendiculaires se coupent en un même point O ; donc, etc.

Théorème IV.

Les plans menés par les arêtes d'un angle trièdre, perpendiculairement aux faces opposées, se coupent suivant une même droite.

Soit ASM le plan mené par l'arête AS du trièdre S, perpendiculairement à la face opposée BSC. Soit, de même, BSN le plan mené par BS, perpendiculairement à la face ASC. Ces deux plans se coupent suivant une droite SO : il s'agit de faire voir que le plan OSC est perpendiculaire à la face ASB. FIG. 271.

Par un point quelconque O de la droite OS, menons le plan perpendiculaire à cette ligne, et soit ABC le triangle déterminé par les intersections de ce plan avec les trois faces de l'angle trièdre. Menons les droites AOM, BON, COP, et joignons le point P au sommet S.

Le plan AMS, qui contient une droite perpendiculaire au plan ABC, est perpendiculaire à ce dernier plan ; d'ailleurs il a été mené perpendiculairement au plan BSC ; donc la droite BC, intersection des plans ABC, BSC, est perpendiculaire à AMS ; donc elle est perpendiculaire à la droite AM ; c'est-à-dire que cette dernière droite est la perpendiculaire menée, par le sommet A du triangle ABC, sur le côté opposé BC. G., 475. G., 477.

Par un raisonnement semblable on voit que BN est la perpendiculaire abaissée du sommet B sur le côté AC ; donc (Th. I, Liv. I) COP est perpendiculaire à AB ; donc le plan CSP est perpendiculaire à AB ; etc.

Théorème V.

Dans tout trièdre, la somme des angles formés par les arêtes, avec les bissectrices des faces opposées, est moindre que la somme des faces.

FIG. 272. Coupons l'angle trièdre S par un plan ABC, perpendiculaire, en un point M, à la bissectrice SM de la face BSC. Menons la droite AM, et prolongeons-la d'une longueur égale MA'. Enfin, tirons SA', CA', BA'.

Le quadrilatère ABA'C, dans lequel les diagonales se coupent mutuellement en parties égales, est un parallélogramme ; donc

$$CA' = AB, \quad BA' = AC.$$

En outre, SM est perpendiculaire au milieu de AA' ; d'où il résulte que SA = SA'. On conclut de là que les trièdres SABC, SA'CB sont *égaux entre eux*. Or, dans l'angle trièdre SABA', la face ASA', double de ASM, est moindre que la somme des deux autres. Conséquemment,

G., 493.

$$ASM < \frac{ASB + ASC}{2}.$$

Ainsi, *l'angle formé par l'arête* AS *et par la bissectrice de la face opposée est moindre que la demi-somme des deux autres faces.*

Cette propriété démontre le théorème. (Voyez Th. III, Liv. I).

Théorème VI.

La somme des dièdres d'un angle polyèdre convexe de n faces est comprise entre $2n$ et $2(n-2)$ dièdres droits.

D'abord, chacun des dièdres d'un angle polyèdre convexe est moindre que 2 droits ; donc la somme des n dièdres est inférieure à $2n$ droits.

En second lieu, si l'on fait passer des plans par une arête de l'angle polyèdre et par toutes les arêtes opposées, on décompose cet angle en $n - 2$ trièdres, dans chacun desquels la somme des dièdres est supérieure à 2 droits; etc. G, 496.

Théorème VII.

Tout plan, parallèle à deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche, partage proportionnellement les deux autres côtés.

Soient E, F les points où le plan MN, parallèle aux côtés AB, CD, coupe les deux autres côtés AD, BC. Je dis que FIG. 274.

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}.$$

Faisons passer, suivant CD, le plan PQ parallèle à AB et à MN. Menons, par le point A, une parallèle à BC, et soient G, H les points où elle perce les plans MN, PQ. Enfin, tirons EG, DH : ces droites sont parallèles, comme étant les intersections de deux plans parallèles par un troisième plan. Conséquemment, G., 452.

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GH}.$$

Mais les droites AG, BF sont égales, comme parallèles comprises entre plans parallèles. De même, GH = FG, etc. G., 456.

RÉCIPROQUE. *Toute droite, qui divise proportionnellement deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche, est dans un plan parallèle aux deux autres côtés.*

Théorème VIII.

Si une première droite EF partage proportionnellement deux côtés opposés AB, CD d'un quadrilatère gauche ABCD, et si une seconde droite GH partage proportionnellement les deux autres côtés du quadrilatère : 1° ces deux droites sont dans un même plan ; 2° chacune d'elles est partagée, par l'autre, en deux segments proportionnels aux segments des côtés qu'elle ne rencontre pas.

FIG. 275. 1° Suivant AB, faisons passer un plan P parallèle à CD, et, conséquemment, parallèle à GH. Par les points C, D, H, G menons CC′, DD′, HH′, GG′ parallèles à EF; el soient C′, D′, H′, G′ les points où ces droites percent le plan P.

Le plan des parallèles CC′, FE, DD′ coupe le plan P suivant une droite C′ED′, parallèle à CD. De plus, les droites BC′, AD′ sont parallèles, comme étant les intersections du plan P par les plans parallèles ADD′, BCC′. Il s'ensuit que les triangles BEC′, AED′ sont semblables.

Nous avons, par hypothèse,

$$\frac{AH}{BG}=\frac{HD}{GC};$$

d'où, à cause des parallèles,

$$\frac{AH'}{BG'}=\frac{H'D'}{G'C'}=\frac{AD'}{BC'}=\frac{AE}{BE}.$$

Si donc nous menons G′E et H′E, les triangles BG′E, AH′E seront semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.

Par suite, les angles BEG′, AEH′ sont égaux, et G′EH est une ligne droite ; donc G′H′HG est un quadrilatère plan ; etc.

2° Soit I le point de rencontre des droites EF, GH. On a

$$EI = HH', EF = DD';$$

d'où, à cause du triangle ADD',

$$\frac{EI}{IF} = \frac{AH}{HD} = \frac{BG}{GC};$$

et, de même,

$$\frac{HI}{IG} = \frac{AE}{EB} = \frac{DF}{FC}.$$

Remarques. I. Chacune des droites EF, GH est dans un plan parallèle aux deux côtés qu'elle ne rencontre pas.

II. Ce théorème est la généralisation d'une propriété relative aux quadrilatères plans (Liv. III, Th. LIII).

Théorème IX.

Tout plan transversal détermine, sur les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, huit segments tels, que le produit de quatre segments non consécutifs est égal au produit des quatre autres.

Soit le quadrilatère gauche ABCD, dont les côtés sont coupés par un même plan P, aux points E, F, G, H. Je dis que l'on a FIG. 276.

$$AH . DF . CG . BE = AE . BG . CF . DH.$$

Soit M le point de rencontre de la diagonale BD avec le plan P : les transversales FG, HE concourront en M ; donc, par le Théorème de Ptolémée :

$$AH . DM . BE = AE . BM . DH,$$
$$DF . CG . BM = DM . BG . CF.$$

Multipliant membre à membre, et supprimant DM et BM, on obtient la relation demandée.

Remarques. I. La réciproque de ce théorème est vraie. Elle renferme, comme cas particulier, le Théorème VII.

II. Si le plan P était parallèle à la diagonale BD, on aurait

$$\frac{AH}{AE} = \frac{HD}{EB}, \qquad \frac{DF}{BG} = \frac{CF}{CG};$$

etc.

Théorème X.

Dans tout quadrilatère gauche, les milieux des côtés sont les sommets d'un parallélogramme.

La démonstration de ce Théorème est la même que celle du Théorème IV, Livre I.

Théorème XI.

Dans tout quadrilatère gauche, le point de rencontre des droites qui joignent les milieux des côtés opposés est situé au milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales.

(Voyez Th. X, Liv. I.)

Théorème XII.

Tout plan transversal XY détermine, sur les côtés d'un triangle ABC, six segments tels, que le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres.

FIG. 277. Le plan XY coupe le plan ABC suivant une transversale MN; et les points de rencontre de cette droite, avec les côtés du triangle, sont ceux où ces côtés percent le plan XY. La proposition est donc ramenée au Théorème de Ptolémée.

Théorème XIII.

Si les côtés d'un polygone gauche sont coupés par un plan transversal, le produit des segments non consécutifs est égal au produit des autres segments.

(Voyez Th. XI, Liv. III.)

Remarque. Cette proposition est la généralisation du Théorème XI.

Théorème XIV.

Si, par une droite quelconque XY, et par les différents sommets d'un polygone gauche ABC... ayant un nombre impair de côtés, on fait passer des plans qui partagent les côtés respectivement opposés à ces sommets, chacun en deux segments, le produit des segments non consécutifs est égal au produit des autres segments.

Projetons la figure sur un plan quelconque P perpendiculaire à XY ; et soit A'B'C'D'E' la projection du polygone gauche. Les traces des différents plans AXY, BXY..., sont des droites A'O, B'O..., passant toutes par un même point O, projection de XY. De plus, les points a', b'..., où ces transversales A'O, B'O..., coupent les côtés C'D', D'E',..., du polygone plan, sont les projections des points a, b,..., où les plans AXY, BXY..., sont rencontrés par les côtés CD, DE..., du polygone gauche. FIG. 278.

Cela posé, les segments déterminés sur un côté quelconque du polygone gauche, par exemple sur le côté CD, sont proportionnels aux segments déterminés sur la projection de ce côté, attendu que CC', DD', aa' sont trois parallèles. Or, dans le polygone plan,

$$A'd'.\ B'e'.\ C'a'.\ D'b'.\ E'c'. = A'c'.\ E'b'.\ D'a'.\ C'e'.\ B'd'$$

(Th. XI, Liv. III).

Donc aussi, dans le polygone gauche,

$$Ad\ .\ Be\ .\ Ca\ .\ Db\ .\ Ec = Ac\ .\ Eb\ .\ Da\ .\ Ce\ .\ Bd.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Le théorème qui précède peut, de la même manière, se déduire du Théorème XI (Liv. III).

Théorème XV.

Lorsqu'une droite AB est partagée en deux segments AC, BC proportionnels aux nombres b, a; si, des points A, B, C on abaisse, sur un plan quelconque XY, des perpendiculaires AA', BB', CC', on a

$$(a + b)\,CC' = a.AA' + b\,BB'.$$

Cette proposition se démontre, à fort peu près, comme le Théorème I du Livre III.

Théorème XVI.

Étant donné un système de points A, B, C..., on peut toujours déterminer un point O tel, que sa distance à un plan quelconque XY soit égale à la moyenne arithmétique entre les distances, au même plan, des points A, B, C...

(Voyez Th. II, Liv. III.)

Théorème XVII.

La somme des carrés des distances de n points A, B, C..., à un point quelconque S, est égale à la somme des carrés des distances des mêmes points à leur centre O, augmenté de n fois le carré de SO.

(Voyez Th. III, Liv. III.)

Théorème XVIII.

Le lieu géométrique des points tels que la somme des carrés des distances de chacun d'eux à des points donnés A, B, C..., soit constante, est une sphère qui a pour centre le centre O des moyennes distances des points A, B, C...

(Voyez Th. IV, Liv. III.)

Théorème XIX.

Si, dans un angle polyèdre convexe, dont toutes les faces, excepté une, sont constantes, on fait varier un seul des angles dièdres opposés à cette face, de manière que l'angle polyèdre reste convexe, la face variable augmentera si l'angle dièdre augmente, et elle diminuera s'il diminue.

Supposons, par exemple, que dans l'angle polyèdre S, supposé convexe, on fasse varier l'angle dièdre SD, opposé à la face ASB ; supposons, de plus, que les autres angles dièdres SC, SE, SF n'éprouvent aucun changement, et qu'il en soit de même à l'égard des faces BSC, CSD..., FSA. FIG. 279.

Si l'on mène les plans ASD, BSD, on décompose l'angle polyèdre donné, en un angle trièdre SABD, et en deux angles polyèdres SAFED, SBCD. Or il résulte, des hypothèses précédentes, que ces derniers angles sont constants. Par suite, la variation de l'angle dièdre SD, dans l'angle polyèdre donné, est égale à la variation de l'angle dièdre SD, dans l'angle trièdre SABD. D'ailleurs, si un angle trièdre SABD a deux faces constantes ASD, BSD, la troisième face ASB augmente ou diminue suivant que l'angle dièdre opposé augmente ou diminue ; donc, etc.

Remarque. Au lieu de supposer que l'angle dièdre SD varie seul, on pourrait faire varier successivement plusieurs des angles dièdres opposés à la face ASB. Par conséquent, *si, dans un angle polyèdre convexe, dont toutes les faces, excepté une, sont constantes, on fait varier, dans le même sens, quelques-uns des angles dièdres opposés à cette face, de manière que l'angle polyèdre reste convexe, la face variable augmentera si les angles dièdres ont augmenté, et elle diminuera s'ils ont diminué.*

Théorème XX.

Si l'on fait varier d'une manière quelconque les angles dièdres d'un polyèdre convexe dont les faces sont constantes ; que l'on mette le signe $+$ sur l'arête de chaque dièdre qui augmente, le signe $-$ sur l'arête de chaque dièdre qui diminue, puis que l'on fasse le tour entier de l'angle polyèdre, on trouvera au moins quatre variations de signes.

Il faut que l'angle polyèdre considéré ait plus de trois faces, sans quoi l'invariabilité de celles-ci entraînerait l'invariabilité des dièdres. De plus, on suppose que l'angle polyèdre reste convexe, après comme avant la variation de ses angles dièdres. Cela posé :

1° On ne peut pas supposer que tous les dièdres aient varié dans le même sens, car alors, d'après le théorème précédent, il y aurait eu variation d'au moins une des faces.

2° En faisant le tour de l'angle polyèdre, on ne trouvera pas une seule série de signes $+$, suivie d'une seule série de signes $-$.

En effet, supposons que, dans l'angle polyèdre S, les arêtes SB, SA, SF soient affectées du signe $+$, les autres étant affectées du signe $-$. Si nous menons le plan *diagonal* BSE qui laisse d'un côté une série de signes $+$ et de l'autre côté une série de signes $-$, il résulte, du théorème précédent, que l'angle plan BSE aura, tout à la fois, augmenté et diminué ; ce qui est absurde.

3° D'après ce qui vient d'être dit, en faisant le tour entier de l'angle polyèdre, *on trouvera plus de deux variations de signes*. Et, comme on doit revenir à l'arête d'où l'on était parti, il s'ensuit que *le nombre des variations de signes est pair* ; donc il est au moins égal à 4.

Problème I.

Étant donnés un plan XY et deux points A, B, situés d'un même côté de ce plan, trouver, sur XY, un point M tel, que la somme des distances AM, BM soit un minimum.

Construisons le point B′, symétrique du point B, par rapport au plan XY ; menons la droite AB′, et soit M le point où elle perce XY. M est le point demandé. (Voyez Probl. X, Liv. I.) FIG. 280.

Problème II.

Étant donnés un plan XY et deux points A, B, situés de côté et d'autre de ce plan, trouver, sur XY, un point M tel, que la différence des distances AM, BM soit un maximum.

Soit B′ le point symétrique de B, par rapport à XY. Menons la droite AB′ : le point M, où elle perce le plan, est le point demandé. (Voyez Probl. XVI, Liv. I.) FIG. 281.

Problème III.

Trouver, sur une droite donnée AB, un point tel, que la somme de ses distances aux faces VXY, XYZ d'un angle dièdre donné, soit un minimum.

Soient A, B les points où la droite AB perce les faces. Prenons, sur cette ligne, deux points quelconques M, M′ ; abaissons MP, M′P′ perpendiculaires sur la première face VXY, et MQ, M′Q′ perpendiculaires sur la seconde face XYZ : ces droites déterminent les projections APP′, BQ′Q de AB. Enfin, menons MR parallèle à PP′, et MS′ parallèle à QQ′. FIG. 282.

Afin de connaître laquelle est la plus grande des deux sommes MP + MQ, M′P′ + M′Q, posons

$$MP + MQ \gtrless M'P' + M'Q'.$$

A cause de $P'R = MP$, et de $QS = M'Q'$, cette relation se réduit à

$$MS \gtrless M'R.$$

Or les triangles rectangles MRM′, MSM′ ont l'hypoténuse commune. Donc, d'après une propriété connue, suivant
G., 74. que l'angle aigu MM′S est plus grand ou plus petit que l'angle aigu M′MR, on a

$$MS \gtrless M'R.$$

D'un autre côté, les angles MM′S, M′MR sont égaux, respectivement, à MBQ, MAP. Donc, suivant que l'angle MBQ sera plus grand ou plus petit que l'angle MAP, on aura

$$MS \lessgtr M'R,$$

ou

$$MP + MQ \gtrless M'P' + M'Q'.$$

Il résulte, de cette discussion, que *la somme* MP + MQ *est un minimum, quand le point* M *se confond avec la trace de la droite* AB *sur celui des deux plans* VXY, XYZ *qui fait le plus grand angle avec cette droite.* (Voyez Probl. XVII, Liv. I.)

Problème IV.

Couper un angle tétraèdre SABCD par un plan, de manière que la section *mnpq* soit un parallélogramme.

FIG. 285. D'après un théorème connu, les plans BSC, ASD, pas-
G., 441. sant par deux droites parallèles *nq*, *mq*, se coupent suivant une parallèle SF à ces droites. De même, l'intersection SE des deux autres faces de l'angle polyèdre est parallèle à *mn*, *pq*. Conséquemment, pour résoudre le

problème proposé, il suffit de couper par un plan quelconque, parallèle à ESF, l'angle donné.

Problème V.

Couper par un plan un angle trièdre trirectangle SABC, de manière que la section MNP soit égale à un triangle donné.

Du sommet N, abaissons NN′ perpendiculaire au côté MP, et menons SN′ : cette droite, projection de NN′ sur le plan CSA, est perpendiculaire à MP. En même temps, la droite NN′ sera, sur le plan MNP, la projection de l'arête indéfinie SB, attendu que le plan SNN′, évidemment perpendiculaire à la droite PM, est perpendiculaire à MNP. Fig. 286.

De même, les arêtes SA, SC ont pour projections, sur ce dernier plan, les perpendiculaires MM′, PP′, abaissées des sommets M, P sur les côtés opposés. En d'autres termes :

Si l'on coupe, par un plan quelconque, un angle trièdre trirectangle, les arêtes se projettent suivant les hauteurs du triangle déterminé par le plan ; et le sommet de l'angle trièdre a pour projection le point de rencontre des trois hauteurs.

Observons, maintenant, qu'il est facile de construire les trois triangles rectangles MSP, MSN, NSP ; car dans MSP, par exemple, on connaît l'hypoténuse MP, ainsi que le pied N′ de la perpendiculaire abaissée du sommet S sur l'hypoténuse. Le problème peut donc être regardé comme résolu (*).

(*) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive,* 3e édition, 1re partie, p. 81.

Problème VI.

Étant données deux droites fixes X, Y et un angle dièdre D, que l'on fait tourner autour de son arête C, supposée fixe, prouver qu'il existe sur la première droite un point fixe A, et sur la seconde droite un point fixe B, tels que a, b étant les points où ces deux droites percent les faces de l'angle dièdre, dans une position quelconque, le rectangle des segments Aa, Bb soit constant.

Projetons toute la figure sur un plan P, perpendiculaire à l'arête C. Cette arête aura pour projection un point fixe c ; l'angle dièdre sera projeté suivant un angle plan, de grandeur constante, mais mobile autour de son sommet c ; enfin le système des droites X, Y aura pour projection un angle fixe xoy. D'un autre côté, les segments de ces deux droites sont proportionnels aux segments interceptés sur les côtés de l'angle. Si donc le rectangle de ces derniers est constant, le rectangle des deux autres le sera aussi ; et réciproquement. Or, d'après le Problème LXXXV du Livre III, le premier rectangle est constant ; donc, etc.

Problème VII.

Quel est le lieu des points également distants de deux droites qui se coupent ?

FIG. 287. Abaissons, d'un point quelconque M du lieu, les perpendiculaires MP, MQ aux droites données AB, AC ; abaissons aussi MM′ perpendiculaire au plan ABC ; enfin, menons PM′, QM′.

D'après l'énoncé, les droites MP, MQ doivent être égales entre elles ; donc les triangles rectangles MM′P, MM′Q sont égaux, et M′P = M′Q.

Le point M doit donc être situé de manière que sa *projection* M′ sur le plan ABC soit également distante des côtés de l'angle ABC. Par conséquent, le lieu demandé se compose du système de deux plans, perpendiculaires au plan des droites données, et ayant pour traces, sur celui-ci, les bissectrices des angles formés par ces droites.

Problème VIII.

Quel est le lieu des points tels, que la différence des carrés des distances de chacun, à deux points donnés A, B, soit égale à un carré donné m^2 ?

Si l'on se reporte au Problème LXX du Livre III, on verra que ce lieu est un plan perpendiculaire à la droite AB.

Problème IX.

On donne n droites OA, OA'... passant par un point O; et l'on demande sur quelle surface sont situés les points M tels, que si l'on abaisse, de chacun, les perpendiculaires MP, MP', MP''..., sur ces droites, la somme des rectangles construits sur les distances OP, OP', OP''..., et sur des longueurs données b, b', b'',... soit équivalente à un carré donné l^2.

Prenons les distances OB, OB', OB''..., respectivement égales à b, b', b'', ... ; et abaissons, sur OM, les perpendiculaires BC, B'C', B''C''.... Nous aurons, comme il est aisé de le voir : FIG. 284.

$$OP.b = OM.OC,\quad OP'.b' = OM.OC',\quad OP''.b'' = OM.OC'', ..$$

La relation donnée devient donc

$$OM\,(OC + OC' + OC'' + ...) = l^2.$$

Soit I le centre des moyennes distantes des points B, B', B''.... : sa distance à un plan XY, mené par le point O, perpendiculairement à OM, est (Th. XVI)

$$d = \frac{1}{n}\,(OC + OC' + ...).$$

Par suite,

$$OM \,.\, nd = l^2.$$

Mais, si nous abaissons MR perpendiculaire à OI, nous aurons aussi

$$OM \,.\, d = OI \,.\, OR\,;$$

donc enfin

$$OR = \frac{l^2}{nOI}.$$

Cette valeur exprime que *la projection de* OM *sur* OI *est constante* ; ou que *la surface cherchée est un plan, perpendiculaire à la droite qui joint le point* O *au centre des points* B, B′, B″ ....

Problème X.

On donne deux plans P, Q et un point A. Par ce point, on fait passer une droite arbitraire qui coupe les plans donnés en des points C, D ; après quoi l'on construit le point B, conjugué harmonique du point A, relativement aux deux autres points. Quel est le lieu du point B ?

FIG. 287. Par le point donné A, menons un plan perpendiculaire aux plans donnés. Soient EF, EG les traces de ces derniers plans sur le plan auxiliaire ; et soit C′AD′B′ la projection de la droite CADB. Les segments de ces droites sont proportionnels entre eux ; donc le lieu du point B′ est une droite EH, conjuguée harmonique de EA relativement à l'angle FEG. Le lieu demandé est donc un plan R, perpendiculaire à celui de la figure, et ayant pour trace la droite EH.

Remarque. Si les plans P, Q sont parallèles, le plan R est parallèle à chacun d'eux.

Problème XI.

Étant donnés un quadrilatère gauche ABCD et une droite EF qui partage proportionnellement les deux côtés opposés AD, BC de cette figure, trouver une droite GH qui partage proportionnellement les deux autres côtés AB, CD, et qui soit perpendiculaire à la première droite EF.

Première solution. La droite cherchée doit partager proportionnellement AB et CD ; donc elle est située dans un plan parallèle à AD et BC (Th. VII). De plus, cette ligne doit être perpendiculaire à EF ; elle est donc située aussi dans un plan perpendiculaire à EF. D'après cela, si l'on imagine, par un point quelconque de l'espace, un plan parallèle aux côtés AD, BC du quadrilatère, et un autre plan perpendiculaire à la droite EF, leur intersection sera parallèle à la droite GH ; en sorte que, pour déterminer celle-ci, il suffira d'appliquer ce problème connu : *Trouver une droite parallèle à une droite donnée, et qui rencontre deux droites données* (*). FIG. 288.

Seconde solution. Sur les deux côtés consécutifs AD, DC, construisons le parallélogramme ADCI, et menons BI. La droite donnée EF est parallèle au plan AIB; de même, la droite cherchée GH est parallèle au plan CIB. Soient AL parallèle à EF, et CM parallèle à GH : AEFL et CMGH sont des parallélogrammes. De plus, les droites CM, AL doivent être perpendiculaires entre elles, comme étant respectivement parallèles à des droites perpendiculaires entre elles. Il ne s'agit donc plus, pour déterminer CM, que de résoudre ce problème : *Mener dans un plan donné* CIB, *et par un point* C *de ce plan, une*

(*) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, 3e édition, 1re partie, p. 30.

droite CM *qui soit perpendiculaire à une droite donnée* AL, *située dans un plan donné* AIB.

Or, si l'on abaisse CP perpendiculaire au plan AIB ; que, du pied P de cette droite, on mène PQM perpendiculaire à AL ; qu'enfin l'on joigne le point M, où cette perpendiculaire rencontre l'intersection BI des deux plans, avec le point donné C, on aura la droite cherchée CM.

Remarque. A chaque position de la droite EF correspond une position de la droite GH ; en sorte que si la droite EF se meut, en restant parallèle au *plan directeur* AIB, la droite GH se meut pareillement, et que le point O, où ces deux droites se coupent, décrit un certain lieu géométrique. Ce lieu n'est pas *rectiligne ;* mais nous allons prouver, dans le problème suivant, qu'il est *plan.*

Problème XII.

Une droite EF s'appuie sur les deux côtés opposés AD, BC d'un quadrilatère gauche, en restant parallèle à l'un des deux plans directeurs. Une seconde droite GH s'appuie sur les deux autres côtés opposés AB, CD, en restant parallèle au second plan directeur. De plus, ces droites sont constamment perpendiculaires entre elles. De quelle nature est la ligne décrite par leur point d'intersection?

FIG. 287. Si nous considérons diverses positions EF, E′F′..., GH, G′H′... des deux droites mobiles, nous obtiendrons une infinité de quadrilatères gauches, tels que OTO′S, dans chacun desquels *deux angles opposés sont droits.* Il est clair que chacune de ces figures pourrait tenir lieu du quadrilatère donné. Nous pouvons donc, pour plus de simplicité, et sans rien ôter à la généralité de la solution, supposer que ce quadrilatère a deux angles droits, en B et en D.

Soit ABCD un pareil quadrilatère. Si nous menons la diagonale AC, et que nous joignions le milieu K de cette droite aux sommets B, D, les distances AK, BK, CK, DK seront égales entre elles, comme rayons de deux demi-cercles égaux.

De même, si EF et GH sont deux positions correspondantes des droites mobiles, en sorte que l'angle O soit droit, les quatre points B, F, O, G seront également distants du milieu K' de GF.

Construisons, comme dans le problème précédent, le parallélogramme ADCI : ses diagonales se coupent en leur milieu commun U; donc, par ce qui précède, DU=UB=UI; donc l'angle DBU est droit.

De même, si nous construisons le parallélogramme EDHR, et que nous menions OR et DO, l'angle DOR sera droit. Mais les droites OR, BI sont parallèles, comme étant les intersections de plans respectivement parallèles : donc la droite DO est située dans un plan perpendiculaire à BI, qui coupe le plan DBI suivant UB. Donc le lieu du point O est plan.

Remarque. Les lecteurs à qui les *Surfaces du second ordre* sont familières reconnaîtront que la propriété indiquée dans le problème précédent peut être énoncée en ces termes : *Dans tout paraboloïde hyperbolique, le lieu des intersections de deux génératrices perpendiculaires entre elles est une hyperbole dont le plan est perpendiculaire aux deux plans directeurs* (*).

(*) *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, tome II, p. 137.

Problème XIII.

Étant donnés deux points fixes A, B, et deux plans fixes VY, XZ, on prend dans l'espace un point quelconque M; on mène la droite AM; on joint le point P, où elle perce le plan VY, avec le point B, par la droite PpB, laquelle perce le plan XZ au point p; enfin on tire les droites BM, Ap; et l'on obtient ainsi un quadrilatère plan MPpm. Si le sommet M de ce quadrilatère décrit une droite CD, quel est le lieu décrit par le sommet m?

FIG. 292. Convenons, pour abréger, d'appeler *points homologues* les points M, m. Alors P, p sont des points homologues; et, si C est la trace de la droite CD sur le plan VY, et que c soit la trace de BC sur le plan XZ, les points C, c sont encore des points homologues.

Cela posé, considérons l'angle trièdre dont les arêtes sont BM, BC, BP, et coupons-le par le plan mcp : les points de concours des côtés homologues, dans les triangles MCP, mcp, doivent appartenir à une même droite, intersection des plans de ces triangles. Or, les côtés MP, mp concourent en A; les côtés CP, cp concourent en un point E, évidemment situé sur l'intersection XY des plans donnés; donc le point de concours F des côtés CM, cm est l'intersection de la droite AE avec la droite donnée CD. Par conséquent, le lieu du point m est la droite cF, laquelle est alors l'*homologue* de CD.

Remarques. I. On vient de voir que la trace C de la droite CD, sur le plan VY, a pour point homologue la trace c de la droite cF sur le plan XZ. On verra, de même, que le point où la première droite perce le plan XZ a pour homologue le point où la seconde droite rencontre le plan VY.

II. Si une droite est parallèle à l'un des plans fixes, son homologue est parallèle à l'autre plan.

III. Si une droite est parallèle à l'intersection des plans fixes, son homologue est parallèle à cette intersection.

IV. Si la première droite est située dans le plan VY, son homologue sera située sur le second plan.

V. Les homologues de droites concourantes sont aussi des droites concourantes.

VI. Les homologues de droites parallèles sont, en général, des droites concourantes. Leur *point de concours* F s'obtient en menant, par les points A, B, des parallèles AP, BF à la direction donnée, en joignant la trace P de la première au point B, et en joignant la trace p de cette dernière droite au point A par la droite Ap, que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre avec BF. FIG. 293.

VII. Supposons qu'une droite D s'appuie sur une droite D′, en restant parallèle à une direction donnée ; alors l'homologue d de D rencontre l'homologue d' de D′, et passe constamment par un point fixe : cette droite d engendre donc un plan. Par conséquent, *l'homologue de toute figure plane est une autre figure plane.*

VIII. Le problème que nous venons de résoudre, et dont nous venons d'indiquer quelques conséquences, est une nouvelle application du principe de la *transformation des figures.*

LIVRE VI.

Théorème I.

Tout plan GFHE, mené par les milieux E, B de deux arêtes opposées AB, CD d'un tétraèdre ABCD, partage ce corps en deux parties équivalentes EGFBHCA, EGFBHD.

FIG. 294. Le premier polyèdre EGFHCA se compose d'une pyramide quadrangulaire EGFHC et d'un tétraèdre AECH. De même, EGHFBD se compose d'une pyramide quadrangulaire EGFHD et d'un tétraèdre EBGD.

Les deux pyramides quadrangulaires ont même base EGFH. De plus, à cause de FC = FD, leurs sommets C, D sont également distants de cette base ; donc elles sont équivalentes. Il reste à comparer les tétraèdres AECH, EBGD.

Si nous prenons pour base de ces tétraèdres les triangles ABC, EBG, nous aurons

$$\frac{\text{AECH}}{\text{EBGD}} = \frac{\text{AEC}}{\text{EBG}} = \frac{\text{AH}}{\text{AD}}.$$

Les triangles AEC, EBG ont leurs bases AE, EB en ligne droite; leurs hauteurs sont proportionnelles à BC et BG; ainsi, à cause de AE = EB,

$$\frac{\text{AEC}}{\text{EBG}} = \frac{\text{BC}}{\text{BG}};$$

d'où

$$\frac{\text{AECH}}{\text{EBGD}} = \frac{\text{BC}}{\text{BG}} \cdot \frac{\text{AH}}{\text{AD}}.$$

La figure ABCD est un quadrilatère gauche, dans lequel les côtés opposés AB, BC sont coupés proportionnellement. Donc le plan EGFH doit partager, en segments proportionnels, les deux autres côtés BC, AD (Liv. V, Th. VII). Ainsi,

$$\frac{BG}{GC}=\frac{AH}{AD},$$

ou

$$\frac{BC}{BG}=\frac{AD}{AH};$$

etc.

Théorème II.

Dans tout parallélipipède, le produit de l'aire d'une face par la hauteur correspondante est constant.

Remarquons d'abord que ce théorème est vrai, sans quoi un même parallélipipède aurait, à la fois, *plusieurs volumes*. Il s'agit donc, ici, d'une simple *vérification*.

Par un sommet quelconque E du parallélipipède, menons un plan perpendiculaire à l'arête EH, et soit EMNP la section faite, par ce plan, dans les faces EG, GB, BD, DE. Si, du même sommet E, nous abaissons EI, EK perpendiculaire sur PN, MN, ces droites seront perpendiculaires aux faces BD, BG. FIG. 29

En effet, le plan EMNP, perpendiculaire à l'arête EH, est perpendiculaire à la face EG et à la face BD; donc la droite EI, menée dans EMNP perpendiculairement à l'intersection PN, est perpendiculaire à la face BD. G., 47 G., 47

On verra, de la même manière, que EK est perpendiculaire à BG.

Cela posé, les parallélogrammes BD, BG ont pour mesures, respectivement, $BC \cdot PN$ et $BC \cdot MN$; en sorte que l'égalité à démontrer est

$$BC \cdot PN \cdot EI = BC \cdot MN \cdot EK,$$

ou

$$PN \cdot EI = MN \cdot EK.$$

Or, dans les triangles EPI, EMK, les angles P, M sont égaux, comme angles opposés d'un parallélogramme; donc ces triangles sont semblables; et l'on a

$$\frac{EP}{EM} = \frac{EI}{EK},$$

etc.

Théorême III.

Si une surface polyédrale convexe est terminée par une ligne brisée, dont les côtés soient ou ne soient pas dans un même plan, le nombre des faces, plus le nombre des sommets, égale le nombre des arêtes plus 1.

Désignons par F le nombre des faces, par S le nombre des sommets, par A celui des arêtes. Il s'agit de faire voir que

$$F + S = A + 1.$$

Cette formule est vraie dans le cas de $F = 1$; car alors $S = A$. Admettons donc qu'elle ait été vérifiée dans le cas de F faces, et démontrons qu'elle subsiste pour $F + 1$ faces.

Soit ABC... la ligne brisée qui termine la surface. Construisons, sur le côté AB, une nouvelle face, composée de n sommets et de n côtés. Si cette face a m côtés communs avec ABCD... elle aura $m + 1$ sommets communs avec cette même ligne; car on suppose que le nouveau polygone ne ferme pas complètement la surface, et qu'il laisse une seule ouverture. De cette manière, les nombres

FIG. 296.

F, S, A deviendront, respectivement

$$F' = F + 1,\ S' = S + n - (m + 1),\ A' = A + n - m;$$

d'où, à cause de la formule ci-dessus,

$$F + S' = A' + 1.$$

Théorème IV.

Dans tout polyèdre convexe, le nombre F des faces, plus le nombre S des sommets, égale le nombre A des arêtes plus 2, c'est-à-dire que

$$F + S = A + 2\ (*).$$

Enlevons une face du polyèdre ; nous aurons une surface polyédrale ouverte, terminée à une ligne brisée, et dans laquelle les nombres de faces, de sommets et d'arêtes seront, respectivement, F — 1, S, A ; donc, d'après la proposition précédente,

$$F - 1 + S = A + 1;$$

etc.

Ce théorème remarquable a un grand nombre de conséquences, parmi lesquelles nous indiquerons les suivantes.

Théorème V.

Dans tout polyèdre convexe : 1° les faces d'un nombre impair de côtés sont toujours en nombre pair; 2° les sommets auxquels aboutissent un nombre impair d'arêtes sont toujours en nombre pair.

Soient, respectivement, a, b, c, d..., les nombres de faces triangulaires, quadrangulaires, pentagonales, etc.; représentons de même par α, β, γ, δ,... les nombres d'angles trièdres, tétraèdres, pentaèdres..., de manière que

(*) Théorème d'Euler.

$$F = a + b + c + d + \ldots$$
$$S = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots$$

Chaque arête appartient à deux faces, et aboutit à deux sommets ; si donc nous comptons, soit le nombre des côtés de toutes les faces, soit le nombre des arêtes de tous les angles polyèdres, nous aurons le double 2A du nombre des arêtes. Ainsi

$$2A = 3a + 4b + 5c + 6d + 7e + \ldots,$$
$$2A = 3\alpha + 4\beta + 5\gamma + 6\delta + 7\varepsilon + \ldots.$$

Or, ces deux dernières égalités exigent que

$$a + c + e + \ldots, \quad \alpha + \gamma + \varepsilon + \ldots$$

soient des nombres pairs.

Théorème VI.

Dans tout polyèdre convexe de F faces, le nombre S des sommets et le nombre A des arêtes satisfont aux conditions

$$S \leqq 2\,(F - 2), \qquad A \leqq 3\,(F - 2),$$
$$S \geqq \frac{1}{2}F + 2, \qquad A \geqq \frac{3}{2}F.$$

Les valeurs de F, S et 2A, écrites plus haut, donnent

$$2A - 3F = b + 2c + 3d + \ldots,$$
$$2A - 3S = \beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots;$$

donc : 1°,

$$A \geqq \frac{3}{2}F;$$

et

$$A \geqq \frac{3}{2}S.$$

Cette relation devient, par le Théorème d'Euler,

$$A \overline{\overline{>}} \frac{3}{2}(A + 2 - F);$$

ou : 2°,

$$A \overline{\overline{>}} 3(F - 2).$$

Remplaçant A par $F + S - 2$, on trouve les deux autres conditions.

Remarque. Il est facile de construire des polyèdres dans lesquels le nombre des sommets soit, d'après les relations précédentes, le plus grand ou le plus petit possible. En effet :

1° Dans un prisme ayant F faces, le nombre des côtés de la base est $F - 2$; donc le nombre S des sommets du polyèdre est $2(F - 2)$.

2° Considérons un polyèdre formé de deux pyramides ayant une base commune. Si le nombre des côtés de cette base est n, on aura, en supposant que deux faces adjacentes quelconques ne soient pas dans un même plan :

$$F = 2n, \quad S = n + 2;$$

donc

$$S = \frac{1}{2} F + 2.$$

Et si les deux pyramides ont deux faces dans un même plan :

$$F = 2n - 1, \quad S = n + 2;$$

ou

$$S = \frac{1}{2}(F + 1) + 2.$$

Théorème VII.

Dans tout polyèdre convexe, le nombre des faces triangulaires, augmenté du nombre des angles trièdres, donne une somme qui ne peut être inférieure à 8.

D'après les valeurs de F, de S et de A, l'équation

$$F + S = A + 2$$

devient

$$2(a+b+c+d+\ldots)+2(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)=4+3a+4b+5c+6d+\ldots,$$
$$2(a+b+c+d+\ldots)+2(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)=4+3\alpha+4\beta+5\gamma+6\delta+\ldots;$$

ou

$$2(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)-(a+2b+3c+4d+\ldots)=4, \quad (1)$$
$$2(a+b+c+d+\ldots)-(\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta+\ldots)=4. \quad (2)$$

Ajoutons membre à membre ces deux égalités; nous obtiendrons

$$(a+\alpha)-(c+\gamma)-2(d+\delta)-3(e+\varepsilon)-\ldots=8\,; \quad (3)$$

d'où

$$a+\alpha \geqq 8.$$

Remarques. I. *Tout polyèdre convexe a des faces triangulaires ou des angles trièdres.*

II. L'équation (3) exprime que, *dans tout polyèdre convexe, la somme du nombre des faces triangulaires et du nombre des angles trièdres est égale à 8, plus la somme du nombre des faces pentagonales et du nombre des angles pentaèdres, plus deux fois la somme du nombre des faces hexagonales et du nombre des angles hexaèdres*, etc.

Théorème VIII.

1° Tout polyèdre convexe a des faces triangulaires, ou quadrangulaires, ou pentagonales; 2° tout polyèdre convexe a des angles trièdres, ou tétraèdres, ou pentaèdres.

Entre les équations (1) et (2), éliminons, successivement, α et a ; nous trouvons :

$$3a+2b+c-e-2f-\ldots-2\beta-4\gamma-\ldots=12, \quad (4)$$
$$3\alpha+2\beta+\gamma-\varepsilon-2\varphi-\ldots-2b-4c-\ldots=12. \quad (5)$$

Or les relations (4), (5) exigent que $3a+2b+c$ et $3\alpha+2\beta+\gamma$ soient des nombres égaux on supérieurs à 12 ; donc, etc.

Remarques. I. A l'inspection de l'équation (4), on reconnaît que :

1° *Si la surface d'un polyèdre est formée seulement de triangles, ou si elle est formée de triangles et d'hexagones, le nombre des triangles est égal ou supérieur à* 4;

2° *Si la surface d'un polyèdre est formée seulement de quadrilatères, ou si elle est formée de quadrilatères et d'hexagones, le nombre des quadrilatères est égal ou supérieur à* 6 ;

3° *Si la surface d'un polyèdre est formée seulement de pentagones, ou si elle est formée de pentagones et d'hexagones, le nombre des pentagones est égal ou supérieur à* 12.

II. L'équation (5) conduit à des conséquences analogues,

III. Supposons $a = 0$, $b = 0$, $e = 0$, $f = 0\ldots$, $\beta = 0$, $\gamma = 0\ldots$; alors l'équation (4) devient $c = 12$. C'est-à-dire que :

Si un polyèdre a seulement des angles trièdres, et que ses faces soient des pentagones et des hexagones, le nombre des pentagones égale 12.

IV. L'équation (5) prouve pareillement que :

Si un polyèdre a toutes ses faces triangulaires, et que ses angles soient en partie pentaèdres, en partie hexaèdres, le nombre des pentaèdres égale 12 (*).

V. On démontre, avec la même facilité, les propriétés suivantes :

1° *Si un polyèdre convexe n'a ni angles trièdres ni angles tétraèdres, il a au moins* 20 *faces triangulaires ;*

2° *Si un polyèdre convexe n'a ni faces triangulaires ni faces quadrangulaires, il a au moins* 20 *angles trièdres ;*

(*) *Géométrie de Legendre*, 12e édition, page 308.

3° *Si un polyèdre convexe a un seul angle trièdre, et qu'il n'ait aucun angle tétraèdre, il a au moins* 16 *faces triangulaires ;*

4° *Si un polyèdre convexe a une seule face triangulaire, et qu'il n'ait aucune face quadrangulaire, il a au moins* 16 *angles trièdres;*

Etc., etc.

Théorème IX.

La somme des angles plans d'un polyèdre convexe est égale à autant de fois quatre droits que le polyèdre a de sommets moins deux (*).

Représentons par P cette somme, et conservons les notations précédentes : nous aurons, en prenant l'angle droit pour unité,

$$P=2a(3-2)+2b(4-2)+2c(5-2)+2d(6-2)+\ldots,$$

ou

$$P=2(3a+4b+5c+6d+\ldots)-4(a+b+c+d+\ldots),$$

ou encore

$$P=4A-4F.$$

Mais

$$A-F=S-2;$$

donc

$$P=4(S-2).$$

Théorème X.

Dans tout polyèdre convexe, la somme des angles polyèdres est équivalente à l'excès de la somme des angles dièdres sur autant de fois deux dièdres droits que le polyèdre a de faces moins deux (**).

D'après un théorème connu, chacun des angles trièdres du polyèdre est équivalent à l'excès de la *demi-somme*

(*) Théorème de Simon Lhuilier.

(**) Dû à *M. Brianchon* (*Journal de l'École Polytechnique, XXV*e *Cahier*).

de ses angles dièdres sur 1 dièdre droit. De même, chaque angle tétraèdre est équivalent à l'excès de la demi-somme de ses angles dièdres sur 2 dièdres droits ; et ainsi de suite. D'ailleurs, chaque angle dièdre du polyèdre appartient à deux angles polyèdres. Si donc nous prenons l'angle dièdre droit pour unité, la somme de tous les angles polyèdres égalera à l'excès de la somme des angles dièdres sur la quantité G., 676. G., 677.

$$\alpha\ (3-2)+\beta\ (4-2)+\gamma\ (5-3)+\ldots$$

Or cette quantité est égale à 2A — 2S; ou, par le Théorème d'Euler, égale à 2 (F — 2).

Théorème XI.

Si une surface polyédrale convexe présente une seule ouverture, ayant *m* côtés non situés dans un même plan, on peut toujours fermer cette ouverture au moyen d'une surface polyédrale ayant au plus *m* — 2 faces, de manière à obtenir un polyèdre convexe fermé de toutes parts.

Soit ABCDEF le contour brisé qui termine la surface convexe. On pourra toujours faire passer un plan qui contienne au moins trois des sommets A, B, C, D, E, F, et qui laisse d'un même côté les autres sommets et la surface polyédrale. Soit, pour fixer les idées, AEC la face ainsi obtenue. Par les sommets A, C, faisons passer un plan qui laisse encore d'un même côté tous les sommets de la surface, et supposons que ce plan tourne jusqu'à ce qu'il rencontre un nouveau sommet, B par exemple : ACB sera une nouvelle face. En continuant de la sorte, nous obtiendrons une série de faces planes, dont l'ensemble fermera l'ouverture ABCDEF. Le nombre de ces faces sera le plus grand possible quand elles seront triangulaires et qu'elles auront un sommet commun A; mais alors ce nombre égale $m - 2$. De plus, le polyèdre résultant sera convexe ; car si le plan EDC, par exemple, coupait la surface polyedrale proposée, le côté CB, prolongé, devrait aussi couper cette surface, laquelle, contrairement à l'hypothèse, ne serait pas convexe.

Théorème XII.

Si la surface d'un polyèdre convexe est partagée en P parties séparées les unes des autres par A arêtes formant R réseaux isolés, et que S soit le nombre des sommets situés sur ces arêtes, on aura

$$P + S = A + R + 1 \text{ (*)}.$$

Considérons d'abord le cas où les A arêtes sont liées entre elles, de manière à ne former qu'un seul réseau.

L'égalité $P + S = A + 2$ est évidente si la surface totale du polyèdre est décomposée en deux parties seulement, par une succession d'arêtes formant un circuit fermé. Car alors $P = 2$, $S = A$. Subdivisons l'une de ces parties en deux autres, au moyen d'une ligne de séparation formée par des arêtes consécutives, et terminée à deux sommets déjà considérés. Alors P augmente d'une unité ; mais, en même temps, l'augmentation de A surpasse d'une unité l'augmentation de S ; d'où il résulte que $P + S - A$ ne change pas. La même conclusion subsistant pour chacune des subdivisions nouvelles qu'on peut effectuer, la première partie du théorème est démontrée.

Admettons maintenant que les A arêtes ne soient pas toutes liées entre elles, de sorte que leur ensemble constitue R réseaux, isolés les uns des autres.

(*) Cette ingénieuse généralisation du Théorème d'Euler a été donnée par le regrettable professeur Thibault (Voyez les *Nouvelles Annales*, t. II).

Lions entre eux, par une succession d'arêtes intermédiaires, deux réseaux consécutifs, et considérons le nouvel ensemble composé d'un réseau de moins.

P n'a pas changé, mais l'augmentation de A surpasse d'une unité l'augmentation de S ; ainsi $P + S - A$ diminue d'une unité. En diminuant ainsi successivement d'une unité le nombre des réseaux, on aura, à la fin, diminué $P + S - A$ de $R - 1$ unités : mais alors toutes les arêtes seront liées entre elles, et l'on aura

$$P + S - A - (R - 1) = 2,$$

ou

$$P + S = A + R + 1.$$

Le théorème est donc démontré.

Théorème XIII.

Deux polyèdres convexes P, P′ sont égaux lorsqu'ils ont toutes leurs faces égales chacune à chacune, et semblablement disposées (*).

Pour démontrer que les polyèdres sont égaux, il suffit de faire voir que chaque angle polyèdre du premier a son égal dans le second. Si cela n'a pas lieu, c'est que les angles polyèdres de P sont, en tout ou en partie, différents des angles polyèdres de P′. Ce second cas peut facilement être ramené au premier.

En effet, soit SABCDE un angle polyèdre de P, lequel a son égal dans le polyèdre P′. Si nous enlevons cet angle S, et que nous fermions l'ouverture ABCDE par une surface polyédrale convexe (Th. XI), nous remplacerons le polyèdre P par un polyèdre Q, ayant moins de faces, moins de sommets et moins d'arêtes que le

(*) Théorème de Cauchy.

polyèdre P. De même nous pourrons supprimer dans P′ l'angle polyèdre S′ égal à S, et nous formerons un polyèdre Q′ dont toutes les faces seront égales à celles du polyèdre Q. En continuant de la sorte, nous arriverons nécessairement (puisque les polyèdres P, P′ sont supposés inégaux) à deux derniers polyèdres convexes T, T′ ayant toutes leurs faces égales, chacune à chacune, et tels qu'aucun angle polyèdre du premier n'aura son égal dans le second. Le second cas que nous avions à examiner est ainsi réduit au premier.

Admettons donc, s'il est possible, que chacun des angles polyèdres de P soit différent de l'angle correspondant du polyèdre P′. Regardons ce dernier polyèdre comme une transformation du polyèdre P, et, dans cette hypothèse, mettons le signe + sur l'arête de chaque dièdre qui a augmenté, et le signe — sur l'arête de chaque dièdre qui a diminué. D'après le Théorème XX du Livre V, le nombre N des changements de signes obtenus en faisant le tour de chacun des angles polyèdres de P, et le nombre S des sommets de P, vérifient la relation

$$N \overline{\overline{>}} 4S.$$

Deux arêtes consécutives d'un angle polyèdre appartiennent toujours à une même face de P, et n'appartiennent qu'à cette face : donc le nombre N doit être égal au nombre total des variations de signes rencontrées en faisant successivement le tour de chacune des faces du polyèdre P.

Or, pour chaque face triangulaire, le nombre des variations de signes est, au plus, égal à 2.

Pour chaque face quadrangulaire, le nombre des variations de signes est, au plus, égal à 4.

En général, si le nombre des côtés d'une face est pair et égal à $2n$, le nombre des variations de signes obtenues en faisant le tour de cette face sera, au plus, $2n$; et, si le nombre des côtés d'une face est impair et égal à $2n+1$, le nombre des variations de signes ne surpassera pas $2n$.

Cela posé, soient a le nombre des faces triangulaires, b le nombre des faces quadrangulaires, etc.; nous aurons

$$N \leqq 2a + 4b + 4c + 6d + 6e + 8f + 8g + \ldots$$

D'ailleurs,

$$2A = 3a + 4b + 5c + 6d + 7e + \ldots$$
$$F = a + b + c + d + e + \ldots;$$

d'où

$$4A - 4F = 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \ldots$$

Mais, par le Théorème d'Euler,

$$S + F = A + 2;$$

donc

$$4S = 8 + 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \ldots:$$

et, à cause de l'inégalité ci-dessus,

$$N \leqq 4S - 8.$$

Or, nous avons trouvé

$$N \geqq 4S.$$

Par conséquent, le nombre N serait inférieur à $4S - 8$ et supérieur à $4S$; ce qui est absurde. Donc il n'est pas possible que les polyèdres convexes P, P', qui ont toutes leurs faces égales chacune à chacune, n'aient pas en même temps tous leurs angles polyèdres égaux, chacun à chacun. Donc ces polyèdres sont égaux.

Théorème XIV.

1° Dans tout tétraèdre, les droites menées des sommets, aux centres des moyennes distances des faces opposées se coupent toutes les quatre en un même point, centre des moyennes distances des sommets du tétraèdre. Ce point est situé aux trois quarts de chaque droite, à partir du sommet d'où elle est menée.

2° Dans tout tétraèdre, les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées se coupent mutuellement en deux parties égales, au centre des moyennes distances des sommets du tétraèdre.

Ces deux théorèmes résultent, immédiatement, des propriétés du centre des moyennes distances, énoncées dans le Livre V. Ajoutons que la démonstration *directe* serait fort simple.

Théorème XV.

Les droites qui joignent les sommets homologues de deux polyèdres semblables, et semblablement placés, se coupent en un même point.

(Voyez Th. V, Liv. III.)

Théorème XVI.

Les centres de similitude de trois polyèdres, semblables et semblablement placés, sont en ligne droite.

(Voyez Th. VII, Liv. III.)

Théorème XVII.

Les six centres de similitude de quatre polyèdres P, P′, P″, P‴, semblables et semblablement placés, sont dans un même plan.

D'après le théorème précédent, les quatre polyèdres, considérés trois à trois, ont *quatre* axes de similitude, lesquels contiennent chacun *trois* des six centres de similitude. De plus, chaque centre de similitude est à la fois sur deux axes : par exemple, le centre de similitude des polyèdres P′, P″, est situé sur l'axe des polyèdres P, P′, P″, et aussi sur l'axe des polyèdres P, P″, P‴. Donc les quatre axes et, par suite, les six centres, sont dans un même plan, nommé *plan de similitude.*

Théorème XVIII.

Dans tout tétraèdre, le plan bissecteur de chaque angle dièdre partage l'arête opposée en deux segments proportionnels aux aires des faces adjacentes.

Considérons le plan AED, qui divise en deux parties égales l'angle dièdre dont l'arête est AD. Il s'agit de démontrer que FIG. 297.

$$\frac{\text{BE}}{\text{CE}}=\frac{\text{ABD}}{\text{ACD}}.$$

Projetons la figure sur un plan quelconque, perpendiculaire à AD. Cette droite a pour projection un point I; et les plans ABD, AED, ACD, étant perpendiculaires au plan de projection, auront pour traces des droites IB′, IE′, G., 466.
IC′ telles, que IE′ *sera la bissectrice de l'angle formé par* IB *et* IC′. Enfin la droite BEC se projettera suivant une droite B′E′C′.

Cela posé, on a, dans le triangle B′IC′,

$$\frac{\text{B}'\text{E}'}{\text{C}'\text{E}'}=\frac{\text{IB}'}{\text{IC}'}.$$

Mais il est facile de voir que B′E, C′E′ sont proportionnelles à BE, CE, et que B′I, C′I sont égales, respectivement, aux perpendiculaires abaissées des points B, C sur AD, base commune des triangles AAD, ACD. La proportion précédente revient donc à celle qu'il s'agissait de démontrer.

Problème I.

Déterminer la hauteur d'un tétraèdre dont les arêtes sont données.

FIG. 298. Soit SABC un tétraèdre, dans lequel nous prendrons ABC pour base, et SP pour hauteur correspondante. Du point P, projection du sommet S, abaissons PD perpendiculaire sur BC, puis menons SD : cette dernière droite sera perpendiculaire à BC. G., 435.

Faisons tourner la face SB autour de BC, jusqu'à ce qu'elle vienne se rabattre dans le plan ABC. Dans ce mouvement, la droite DS n'a pas cessé d'être perpendiculaire à BC ; donc, lorsque les plans des deux faces coïncideront, cette droite DS viendra en DS′, sur le prolongement de PD. Ainsi, quand on fait tourner une des faces du tétraèdre autour du côté commun à cette face et à la base, jusqu'à ce qu'elle vienne coïncider avec le plan de la base, le rabattement du sommet et le pied de la hauteur du tétreèdre, sont situés sur une même perpendiculaire à l'axe de rotation.

FIG. 299. Soit actuellement, en vraie grandeur, ABC la base du tétraèdre, et soient BCS′, ACS″, ABS‴ les rabattements des trois autres faces. Nous aurons

$$AS'' = AS''', \quad BS' = BS''', \quad CS' = CS''.$$

Si, des points S′, S″, S‴, nous abaissons des perpendiculaires sur les côtés correspondants, ces trois droites se coupent en un même point P, projection du sommet inconnu. En outre, la hauteur SP est un côté de l'angle droit du triangle APS, dans lequel AS = AS″ est l'hypoténuse. Si donc nous décrivons une demi-circonférence sur AS″ comme diamètre ; qne, du point A comme centre, nous tracions l'arc PD ; et que nous menions S''D, cette droite sera égale à la hauteur du tétraèdre.

Lorsque les arêtes sont données en nombres, on peut calculer, d'après cette construction, l'expression de la hauteur du tétraèdre, et ensuite déterminer le volume de ce corps ; mais cette méthode est moins simple que la suivante.

Problème II.

Calculer, en fonction des arêtes, le volume d'un tétraèdre.

Fig. 298.

Considérons d'abord le cas où les arêtes SA, SB, SC seraient égales entre elles. Alors le point P, projection du sommet S, est évidemment le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ; et la droite AP est le rayon R de ce cercle. Si donc nous représentons par α, β, γ les côtés BC, AC, AB de la base, par δ la longueur commune des arêtes, par h la hauteur du tétraèdre, et par A l'aire de sa base, nous aurons :

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\gamma-\alpha)},$$

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4A}, \qquad h^2 = \delta^2 - R^2.$$

Le volume v sera ensuite donné par la formule $v = \frac{1}{3}Ah$; d'où, en faisant la substitution indiquée,

$$v = \frac{1}{12}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\gamma-\alpha)\delta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2}. \text{(A)}$$

Fig. 300.

Soit actuellement un tétraèdre quelconque SABC ; désignons par a, b, c les côtés de la face ABC, et par a', b', c' les arêtes SA, SB, SC, respectivement opposées à

ces côtés. Si nous prenons les distances SA′, SB′, SC′ égales à une longueur quelconque δ, nous formerons un tétraèdre SA′B′C′ dont le volume sera donné par la formule précé-
G., 587. dente. D'ailleurs, ces deux tétraèdres, ayant un angle trièdre commun, sont entre eux comme les produits des arêtes qui comprennent cet angle ; de telle sorte que si nous appelons V le volume cherché, nous aurons

$$V = \frac{a'b'c'}{\delta^3};$$

et il ne s'agira plus que d'exprimer, en fonction des données et de δ, les arêtes α, β, γ.

FIG 301. Pour cela, considérons le triangle ABS et le triangle isoscèle A′B′S, qui ont un angle commun S. Abaissons, des sommets B, B′, les perpendiculaires BD, B′D′ sur le côté AS. A cause des triangles semblables :

$$\frac{SD}{SD'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{b'}{\delta};$$

puis, dans les triangles SA′, SAB :

$$\gamma^2 = 2\delta^2 - 2\delta \,.\, SD', \qquad c^2 = a'^2 + b'^2 - 2a' \,.\, SD.$$

On tire, de ces équations,

$$\frac{SD}{SD'} = \frac{a'^2 + b'^2 - c^2}{2\delta^2 - \gamma^2} \cdot \frac{\delta}{a'}.$$

Donc

$$\frac{a'^2 + b'^2 + c^2}{2\delta^2 - \gamma^2} \frac{\delta}{a'} = \frac{b'}{\delta};$$

d'où

$$\gamma^2 = \delta^2 \frac{(c + a' - b')(c - a' + b')}{a'b'}.$$

Une *permutation tournante* donne ensuite

$$\alpha^2 = \delta^2 \frac{(a+b'-c')\,(a-b'+c')}{b'c'},$$
$$\beta^2 = \delta^2 \frac{(b+c'-a')\,(b-c'+a')}{c'a'}.$$

Observons maintenant que le produit

$$\mathrm{P} = (\alpha+\beta+\gamma)\,(\alpha+\beta-\gamma)\,(\alpha+\gamma-\beta)\,(\beta+\gamma-\alpha)$$

devient, étant développé,

$$-\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 + 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2.$$

Si donc, pour abréger, nous posons

$$(a+b'-c')\,(a-b'+c') = m^2,$$
$$(b+c'-a')\,(b-c'+a') = n^2,$$
$$(c+a'-b')\,(c-a'+b') = p^2\,;$$

nous obtiendrons d'abord

$$\mathrm{P} = \frac{\delta^4}{a'^2b'^2c'^2}\,(-a'^2m^4 - b'^2n^4 - c'^2p^4 + 2a'b'm^2n^2 + 2b'c'n^2p^2 + 2c'a'p^2m^2)\,;$$

puis

$$v = \frac{\delta^2}{12a'b'c'}\sqrt{-a'^2m^4 - b'^2n^4 - c'^2p^4 + 2a'b'm^2n^2 + 2b'c'n^2p^2 + 2c'a'p^2m^2 - m^2n^2p^2}\,;$$

et ensuite

$$\mathrm{V} = \frac{1}{12}\sqrt{-a'^2m^4 - b'^2n^4 - c'^4p^4 + 2a'b'm^2n^2 + 2b'c'n^2p^2 + 2c'a'p^2m^2 - m^2n^2p^2}.$$

La quantité placée sous le radical peut être décomposée de cette manière :

$$-(a'm^2 - b'n^2)^2 - p^2(m^2 - 2b'c')(n^2 - 2a'c') + 2a'b'c'^2p^2 - c'^2p^2(p^2 - 2a'b').$$

Conséquemment, si l'on pose

$$m^2 - 2b'c' = m'^2,$$
$$n^2 - 2c'a' = n'^2,$$
$$p^2 - 2a'b' = p'^2,$$

on aura, au lieu de cette même quantité,

$$-(a'm'^2 - b'm'^2)^2 - (p'^2 + 2a'b')m'^2n'^2 + 2a'b'c'^2(p'^2 + 2a'b') - c'^2p^2(p^2 + 2a'b')\,;$$

ou, en réduisant :

$$-a'^2m'^4-b'^2n'^4-c'^2p'^4-m'^2n'^2p'^2+4a'b'^2c'^2.$$

L'expression du volume devient donc

$$V=\frac{1}{12}\sqrt{4a'^2b'^2c'^2-a'^2m'^4-b'^2n'^4-c'^2p'^4-m'^2n'^2p'^2}. \qquad \text{(B)}$$

D'après les valeurs de m^2, n^2, p^2 :

$$\begin{aligned}
m'^2&=a^2-(b'-c')^2-2b'c'=a^2-b'^2-c'^2,\\
n'^2&=b^2-(c'-a')^2-2c'b'=c^2-c'^2-a'^2,\\
p'^2&=c^2-(a'-b')^2-2a'a'=b^2-a'^2-b'^2.
\end{aligned}$$

Dans chaque cas particulier, on calculera les quantités m'^2, n'^2, p'^2, après quoi l'on en substituera les valeurs dans la formule précédente. Mais, si nous voulons exprimer V en fonction *explicite* des arêtes, commençons par former les différents termes de la quantité placée sous le radical. Nous aurons ainsi :

$$\begin{aligned}
a'^2m'^4&=a^4a'^2-2(b'^2+c'^2)a^2a'^2+(b'^2+c'^2)^2a'^2,\\
b'^2n'^4&=b^4b'^2-2(c'^2+a'^2)b^2b'^2+(c'^2+a'^2)^2b'^2,\\
c'^2p'^4&=c^4c'^2-2(a'^2+b'^2)c^2c'^2+(a'^2+b'^2)^2c'^2,\\
m'^2n'^2p'^2&=a^2b^2c^2-(a'^2+b'^2)a^2b^2+(a'^2+b'^2)(a'^2+c'^2)a^2-(c'^2+b'^2)(b'^2+c'^2)(c'^2+a'^2)\\
&\quad-(b'^2+c'^2)b^2c^2+(b'^2+c'^2)(b'^2+a'^2)b^2\\
&\quad-(c'^2+a'^2)c^2a^2+(c'^2+a'^2)(c'^2+b'^2)c^2
\end{aligned}$$

La somme des seconds membres peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned}
&4a'^2b'^2c'^2-a^2a'^2(b^2+c^2-a^2+b'^2+c'^2-a'^2)-b^2b'^2(c^2+a^2-b^2+c'^2+a'^2-b'^2)\\
&-c^2c'^2(a^2+b^2-c^2+a'^2+b'^2-c'^2)+a^2b^2c^2+a^2b'^2c'^2+b^2c'^2a'^2+c'^2a'^2b'^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, si l'on suppose encore :

$$\begin{aligned}
A&=b^2+c^2-a^2+b'^2+c'^2-a'^2,\\
B&=c^2+a^2-b^2+c'^2+a'^2-b'^2,\\
C&=a^2+b^2-c^2+a'^2+b'^2-c'^2,\\
D&=a^2b^2c^2-a^2b'^2c'^2-b^2c'^2a'^2-c^2a'^2b'^2,
\end{aligned}$$

on a, finalement,

$$V = \frac{1}{12} \sqrt{a^2a'^2A + b^2b'^2B + c^2c'^2C - D}\ . \qquad (C)$$

Problème III.

Couper un tétraèdre ABC par un plan P, parallèle aux arêtes opposées AC, BD, de manière que la section EFGH soit maximum.

Le plan P, étant parallèle à BD, doit couper les faces ABD, CBD suivant des parallèles à cette arête. De même, il coupe les deux autres faces du tétraèdre suivant des parallèles à l'arête AC. Conséquemment, le quadrilatère EFGH est un parallélogramme dans lequel l'angle HGF est égal à l'angle des arêtes AC, BD. Fig. 302. G., 443.

Il résulte, de cette observation, que ce parallélogramme sera maximum en même temps que le rectangle construit sur les deux côtés HG, GF.

Or, à cause des parallèles :

$$HG = AC \cdot \frac{BG}{BC}, \qquad GF = BD \cdot \frac{GC}{BC};$$

d'où

$$HG \cdot GF = \frac{AC \cdot BD}{\overline{BC}^2} \cdot BG \cdot GC.$$

Dans le second membre, tout est constant, à l'exception des segments BG, GC de l'arête BC. D'après un théorème connu, le rectangle de ces segments est le plus grand possible quand ils sont égaux, c'est-à-dire quand le point G est le milieu de BC.

Il faut donc, pour résoudre le problème, mener le plan P de manière qu'il soit également distant des arêtes opposées AC, BD.

Problème IV.

Par les milieux E, F de deux arêtes opposées d'un tétraèdre ABCD, on fait passer une infinité de plans. Quel est celui qui détermine la section la plus petite en surface?

FIG. 303. Soit EGFH le quadrilatère déterminé par l'un quelconque des plans sécants. Menons la diagonale EF; puis abaissons, des sommets G, H, les perpendiculaires GG', HH' sur FE.

Le quadrilatère a pour mesure $\frac{1}{2}$ EF . (GG' + HH').

Si le plan sécant tourne autour de EF, le facteur GG' + HH' varie, l'autre étant constant. Il suit de là que le quadrilatère EGFH sera minimum en même temps que la somme des perpendiculaires GG', HH'.

Par la droite EF menons un plan P, parallèle aux arêtes AC, BD (Prob. III). Généralement, les droites GG', HH', parallèles entre elles, sont obliques à ce plan; de plus, elles sont égales entre elles, parce que le plan P est également distant des arêtes AC, BD. Leur somme est donc un minimum quand elles sont perpendiculaires au plan. Alors GG' est la commune perpendiculaire aux droites
G., 485. BD, EF; HH' est la commune perpendiculaire aux droites EF, AC; et le plan EGFH devient perpendiculaire à P.

Ainsi, pour résoudre le problème proposé :

Faites passer, par la droite EF, *un plan* P, *parallèle aux arêtes* AC, BD; *par cette même droite, menez un plan* P' *perpendiculaire au premier : il détermine la section minimum.*

Problème V.

Partager une pyramide quadrangulaire régulière SABCD en deux parties équivalentes, au moyen d'un plan BEFC passant par l'un des côtés de la base.

Par le sommet S, menons un plan SGH, perpendiculaire aux arêtes AD, BC : il partage la figure en deux parties symétriques ; en sorte que si nous abaissons SO perpendiculaire à la base, et SP perpendiculaire au plan cherché CEFB, ces droites, hauteurs des pyramides SABCD, SEFBC, sont contenues dans SGH. FIG. 304.

Les volumes de ces pyramides sont proportionnels à

$$\overline{AD}^2 \cdot SO, \qquad \frac{BC + FE}{2} \cdot IH \cdot SP.$$

Or, si nous abaissons HM perpendiculaire à SG, nous avons

$$AD \cdot SO = GH \cdot SO = SG \cdot HM, \qquad IH \cdot SP = SI \cdot HM.$$

Nous pouvons donc remplacer les quantités ci-dessus par

$$AD \cdot SG, \qquad \frac{AD + EF}{2} \cdot SI.$$

Observons actuellement que la pyramide SEFBC doit être équivalente à la moitié de la pyramide donnée ; d'où

$$AD \cdot SG = (AD + EF)\, SI.$$

Dans cette égalité, remplaçons AD, EF par les longueurs proportionnelles SG, SI ; nous aurons

$$\overline{SG}^2 = (SG + SI)\, SI,$$

ou

$$\frac{SG}{SI} = \frac{SI}{SG - SI}.$$

Cette dernière proportion fait voir que *le plan cherché doit partager, en moyenne et extrême raison, la hauteur* SG *de la face* ASD.

Problème VI.

Étant donné un parallélipipède dont toutes les faces sont des losanges égaux, on demande le volume de ce polyèdre, en fonction des diagonales des faces.

FIG. 305. Ce parallélipipède, dont le cube est un cas particulier, porte, en *Cristallographie,* le nom de *rhomboèdre,* parce que le losange est aussi appelé *rhombe.*

Imaginons qu'au sommet A du rhomboèdre se réunissent trois angles plans égaux BAD, DAE, EAB; et, pour fixer les idées, supposons-les obtus. Alors, si nous menons BD, DE, EB, ces droites seront les grandes diagonales des faces AC, AH, AF ; de plus, elles seront égales entre elles, puisque ces faces sont des losanges égaux.

Par ces droites, faisons passer un plan BDE; nous obtiendrons un tétraèdre ABDE, équivalent au sixième du rhomboèdre.

En effet, ce tétraèdre est équivalent à la moitié de la pyramide quadrangulaire ayant pour base ABCD et pour sommet le point B, et cette pyramide est le tiers du rhomboèdre.

Nommons g la grande diagonale DE, et p la petite diagonale AH ; nous aurons

$$AB = AD = AE = \frac{1}{4}\sqrt{g^2 + p^2}.$$

Par suite, et d'après la formule (A) trouvée ci-dessus (Prob. II), le volume du tétraèdre est

$$\frac{1}{24} g^2 \sqrt{3p^2 - g^2}.$$

Le volume du rhomboèdre est donc

$$V = \frac{1}{4} g^2 \sqrt{3p^2 - g^2}.$$

Remarques. I. Le rhomboèdre que nous venons de considérer est appelé *rhomboèdre obtus*. Il est facile de voir qu'avec les mêmes faces on peut former un autre rhomboèdre dans lequel les trois angles plans égaux, qui se réunissent en un même sommet, sont aigus. Le volume de ce *rhomboèdre aigu* est, d'après la formule précédente, en permutant les lettres,

$$V_1 = \frac{1}{4} p^2 \sqrt{3g^2 - p^2}.$$

II. Le premier rhomboèdre est toujours plus petit que le second, excepté quand $p = g$; alors les deux polyèdres se transforment en deux cubes égaux.

III. V deviendrait imaginaire si l'on avait $3p^2 = g^2$; donc *le rhomboèdre obtus est impossible si le rapport de la grande diagonale à la petite surpasse* $\sqrt{3}$.

Problème VII.

Étant donné un dodécaèdre dont toutes les faces sont des losanges égaux, on demande, en fonction de l'arête, le volume de ce polyèdre.

Ce polyèdre, que l'on rencontre dans la nature, est appelé *dodécaèdre rhomboïdal*. Il est représenté dans la figure 306.

Imaginons que trois angles obtus, égaux entre eux, se réunissent par leur sommet commun G, de manière à former un angle trièdre.

Par le point G, menons, dans l'intérieur de cet angle, une droite GS, également inclinée sur les arêtes. Prenons

GA = GB = GC = GS; achevons les losanges GI, GK, GL; puis, par les sommets A, I, B, K, C, L, menons des droites égales et parallèles à AS : les extrémités de ces lignes seront les sommets d'une ligne bri ée DMENFP, égale à AIBKCL. Enfin, concevons que les plans PDM, MEN, NFB viennent se couper en un point H, opposé au sommet G : le polyèdre GH sera un dodécaèdre, décomposé en quatre parallélipipèdes. Si l'angle obtus AGB a été convenablement choisi, ces parallélipipèdes seront, comme on le reconnaît aisément, des rhomboèdres égaux entre eux, et le polyèdre GH sera le *dodécaèdre rhomboïdal* qu'il s'agissait de construire.

Afin de déterminer l'angle AGB ou le losange AGBI, observons d'abord que, d'après la construction précédente, les trois angles dièdres ayant pour arête commune GS sont égaux entre eux ; donc chacun d'eux vaut les $\frac{4}{3}$ d'un angle dièdre droit.

Cela étant, faisons passer un plan suivant les sommets A, B, M; nous détacherons, du dodécaèdre, le tétraèdre ABIM (fig. 307), dans lequel chacun des angles dièdres AI, BI, MI est égal à $\frac{4^d}{3}$. Abaissons, du sommet I, la perpendiculaire IO sur le plan du triangle équilatéral ABM. Abaissons aussi, des points B, M, les droites BT, MT, perpendiculaires à l'arête AI : elles se coupent en un même point T, parce que les triangles AIB, AIM sont égaux; et comme l'angle de ces droites mesure l'angle dièdre AI, nous aurons

$$BTM = \frac{4^d}{3} = BOA.$$

Il suit de là que les triangles isoscèles BTM, AOB sont égaux : donc, par une propriété connue,

$$BT = BO = \frac{AB}{\sqrt{3}}.$$

Enfin, si nous abaissons IU perpendiculaire sur AM, les triangles AIU, AMT donnent

$$\frac{AI}{AM} = \frac{IU}{MT}.$$

Représentons par g la grande diagonale AB de la face AGBI, et par p la petite ; nous aurons :

$$AM = AB = g, \qquad IU = \frac{1}{2}p,$$

$$AI = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + p^2}\ , \qquad MT = BT = \frac{g}{\sqrt{3}};$$

et la proportion devient

$$\sqrt{g^2 + p^2} = p\sqrt{3};$$

d'où résulte

$$\frac{g}{p} = \sqrt{2}.$$

Ainsi, *dans le dodécaèdre rhomboïdal, les diagonales de chaque face sont entre elles comme* $\sqrt{2}$ *est à* 1.

Conséquemment, si l'on désigne par a l'arête du rhomboèdre,

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + 2p^2} = \frac{1}{2}p\sqrt{3};$$

puis

$$p = \frac{2}{3}a\sqrt{3}, \quad g = \frac{2}{3}a\sqrt{6}.$$

La formule trouvée dans le Problème VI donne donc, pour le volume d'un des quatre rhomboèdres,

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9}\cdot 6a^2\sqrt{4a^2-\frac{8}{3}a^2}=\frac{4}{9}a^3\sqrt{3}\cdot$$

Multipliant cette quantité par 4, on a définitivement le volume cherché :

$$V=\frac{16}{9}a^3\sqrt{3}.$$

Problème VIII.

On prend, sur les arêtes d'un cube, à partir des sommets, les distances EI, EK, EL, AM, ..., égales entre elles (fig. 308). On mène le splans AIF, HLF, AKH, ..., lesquels déterminent un polyèdre ayant pour faces vingt-quatre quadrilatères égaux. On demande d'évaluer la surface et le volume de ce corps.

Ce polyèdre appartient, comme le rhomboèdre et le dodécaèdre rhomboïdal, à la Cristallographie. On l'appelle *trapézoèdre*. Il est représenté dans la figure 309.

Les six faces du cube sont situées de la même manière à l'égard du centre O. Conséquemment, les vingt-quatre faces du trapézoèdre sont égales entre elles et également distantes de ce point ; et les pyramides ayant pour bases les faces et pour sommet commun le centre, sont égales entre elles. Il suffit donc d'évaluer la base de l'une d'elles, ainsi que leur hauteur commune.

Prenons à part (fig. 310) le tétraèdre AIFO, qui a pour base la section AIF faite dans le cube par l'un des plans limitant le trapézoèdre. Désignons par a l'arête du cube, et par b la distance constante IE (fig. 308), laquelle est supposée moindre que $\frac{1}{2}a$. Nous aurons, ainsi qu'il est facile de le voir :

$$AF=a\sqrt{2},\quad IA=IF=\sqrt{a^2+b^2},\quad OF=OA=\frac{1}{2}AG=\frac{1}{2}a\sqrt{3};$$

puis

$$OI=\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}a-b\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}a^2-ab+b^2}.$$

Soit N (fig. 310) le milieu de AF ; menons IN ; abaissons OP perpendiculaire sur cette droite : OP sera la hauteur commune de nos pyramides. Abaissons encore IQ perpendiculaire à ON. Nous aurons, dans le triangle OIN,

$$OP = IQ\,\frac{ON}{IN}.$$

Or, dans la figure 308, ON est parallèle à HE ; donc

$$IQ=\frac{1}{2}\,EB=\frac{1}{2}a\sqrt{2}.$$

D'ailleurs,

$$ON=\frac{1}{2}a,\quad IN=\sqrt{\overline{IE}^2+\overline{EN}^2}=\sqrt{b^2+\frac{1}{2}a^2}\,;$$

donc

$$OP=\frac{1}{2}a\sqrt{2}\,\frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{b^2+\frac{1}{2}a^2}}=\frac{1}{2}\,\frac{a^2}{\sqrt{2b^2+a^2}}.$$

Si nous menons IL et AH, nous aurons

$$\frac{IR}{RA}=\frac{IL}{AH}=\frac{IE}{HE}\,;$$

d'où

$$\frac{IR}{IA}=\frac{IE}{IE+HE}.$$

Ainsi,

$$IR=\frac{b}{a+b}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Considérons maintenant en particulier le triangle isoscèle AIF (fig. 311), dans le plan duquel est située une face du trapézoèdre. Le plan HLF (fig. 308) coupe AIF suivant la droite RF (fig. 311); et, si nous prenons $IR' = IR$, la droite HR′ représentera l'intersection des plans AIF, HKA (fig. 308). De plus, le plan passant par les points B, M, E coupe le plan AIF suivant une droite contenant N, et parallèle à IF. Si donc, par le point N (fig. 311), nous menons NF′ parallèle à FI, et NA′ parallèle à AI, le quadrilatère NSUT est, en vraie grandeur, l'une des faces du trapézoèdre.

Afin de mesurer ce quadrilatère, posons, pour abréger,

$$AF = 2\alpha, \quad AI = \beta, \quad NI = h, \qquad IR = \gamma.$$

Nous aurons, en menant NX parallèle à FR,

$$\frac{UI}{IN} = \frac{IR}{IX} = \frac{\gamma}{\gamma + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)} = \frac{2\gamma}{\beta + \gamma};$$

d'où

$$UI = \frac{2h\gamma}{\beta + \gamma}.$$

Les quadrilatères IRUR′, NTUS sont semblables; donc

$$NTUS = IRUR'\left(\frac{UN}{UI}\right)^2.$$

Or, IRUR′ a pour mesure

$$\frac{1}{2} UI \,.\, RR' = \frac{h\gamma}{\beta + \gamma} \,.\, 2\alpha \frac{\gamma}{\beta} = \frac{2h\alpha\gamma^2}{(\beta + \gamma)\beta};$$

conséquemment

$$NTUS = \frac{2h\alpha\gamma^2}{(\beta + \gamma)\beta} \cdot \left(\frac{\beta - \gamma}{2\gamma}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{h\alpha}{\beta}\,\frac{(\beta - \gamma)^2}{\beta + \gamma} = F,$$

F étant l'aire d'une face.

Mais

$$\alpha = \frac{1}{2} a \sqrt{2}, \quad \beta = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \gamma = \frac{b}{a+b} \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$h = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = \sqrt{b^2 + \frac{1}{2} a^2}\ ;$$

donc

$$F = \frac{1}{4} \frac{a^3}{(a+b)(a+b)} \sqrt{a^2 + 2b^2}.$$

Enfin, si nous multiplions cette quantité par

$$\frac{24}{3} \cdot \frac{1}{2} \frac{a^3}{\sqrt{a^2 + 2b^2}},$$

nous aurons, V étant le volume cherché,

$$V = \frac{a^5}{(a+b)(a+2b)}.$$

Problème IX.

Dans une pyramide quadrangulaire SABCD qui a pour base un trapèze ABCD, on donne : 1° la face SAB; 2° les directions des arêtes parallèles AD, BC ; 3° les angles de la face SCD; et l'on demande de construire la pyramide.

Du sommet S, abaissons SP perpendiculaire au plan de la base, lequel est connu de position. Abaissons ensuite PQ perpendiculaire au côté inconnu CD, et menons SQ : cette droite sera la hauteur de la face SCD, laquelle est donnée d'*espèce*, mais non de grandeur. FIG. 312.

Le rapport des segments CQ, DQ est donné; si donc nous divisons le côté AB, au point E, dans ce même rapport, le point Q sera situé sur EE' parallèle à BC.

D'un autre côté, le rapport $\frac{SQ}{CQ}$ est connu ; donc si nous supposons QR = QS, le point R sera situé sur une parallèle FF′ à BC, passant en un point F déterminé par la proportion

$$\frac{SQ}{CQ} = \frac{EF}{BE}.$$

Menons PR et RS, nous aurons

$$\overline{RS}^2 = \overline{SP}^2 + \overline{PR}^2 = \overline{SP}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 = 2\overline{QR}^2;$$

d'où

$$\overline{QR}^2 - \overline{PQ}^2 = \overline{SP}^2.$$

Ainsi, dans le triangle PQR, rectangle en Q, la différence des carrés construits sur les côtés de l'angle droit est connue. La construction de la pyramide est donc ramenée à ce problème de Géométrie plane :

FIG. 313. *Déterminer un triangle rectangle* PQR, *dont un sommet* P *est donné, dont les autres sommets* Q, R *sont situés sur deux parallèles données* EE′, FF′, *et dans lequel la différence des carrés construits sur les côtés* PQ, QR *de l'angle droit, égale un carré donné* m^2.

Pour résoudre ce problème, abaissons PP′, RR′ perpendiculaires à EE′. Nous aurons d'abord

$$\overline{QR}^2 = \overline{QR'}^2 + \overline{RR'}^2, \qquad \overline{PQ}^2 = \overline{PP'}^2 + \overline{P'Q}^2;$$

d'où

$$m^2 = \overline{QR'}^2 - \overline{P'Q}^2 + \overline{RR'}^2 - \overline{PP'}^2.$$

Les longueurs PP′, RR′ sont connues; donc cette équation devient

$$\overline{QR'}^2 - \overline{P'Q}^2 = a^2,$$

a étant une droite donnée.

En second lieu, les triangles PP′Q, QR′R sont semblables, comme ayant les côtés perpendiculaires ; ainsi

$$QR' \,.\, P'Q = PP' \,.\, RR'.$$

Le rectangle des segments QR′, P′Q étant connu, ainsi que la différence de leurs carrés, le problème ne présente plus aucune difficulté.

Problème X.

Couper par un plan un prisme triangulaire donné, de manière que la section soit semblable à un triangle donné.

On peut toujours supposer que la section passe par un sommet de la base du prisme ; alors elle retranche du prisme une pyramide ayant pour base un trapèze, et l'on est ramené au problème précédent.

Remarque. Cette solution, remarquable par la simplicité, est due à *Simon Lhuilier*. En la modifiant légèrement, on peut l'appliquer à cet autre problème :

Projeter un triangle sur un plan donné, de manière que la projection soit semblable à un triangle donné.

Problème XI.

Sur les côtés d'un hexagone régulier ABCDEF, on élève six plans, perpendiculaires à celui de cette figure. On prend les arêtes non consécutives BB′, DD′, FF′, égales entre elles. Enfin, par chacune des droites B′D′, D′F′, F′B′, et par un point S, situé sur l'axe de l'hexagone, on fait passer des plans SB′C′D′, SD′E′F′, SF′A′B′. Comment doit-on prendre le point S, pour que la somme des faces du polyèdre ainsi formé soit un minimum?

Remarquons d'abord que le volume de ce *décaèdre* est indépendant de la position du point S. En effet, le corps se compose de douze prismes triangulaires égaux à OBCSB′C′, ou symétriques de OBCSB′C′ ; et il est facile de voir que ce dernier prisme a pour mesure OBC . BB′. FIG. 314.

Pour déterminer, parmi tous les polyèdres construits comme il vient d'être dit, celui dont la surface latérale est la plus petite possible, observons que cette surface se compose de six trapèzes égaux à RCB′C′, et de six triangles égaux à SB′C′. Il suffit donc que BCB′C′ + SB′C′ soit un minimum.

Menons les diagonales OC, BD du losange OBCD, et les diagonales SC′, B′D′ du losange SB′C′D′ ; menons encore la droite II′ qui joint les centres de ces figures. Nous aurons, comme il est aisé de le reconnaître :

$$\mathrm{BC} = 2\mathrm{CI} = \frac{2\mathrm{IB}}{\sqrt{3}}, \qquad \mathrm{BB}' = \mathrm{II}', \qquad \mathrm{IB} = \mathrm{I'B'}.$$

Le trapèze BCB′C′ a pour mesure

$$\frac{1}{2}(\mathrm{BB}' + \mathrm{CC}')\,\mathrm{BC} = (\mathrm{BB}' + \mathrm{CC}')\,\frac{\mathrm{I'B'}}{\sqrt{3}}.$$

D'un autre côté, l'aire du triangle SB′C′ est I′B′. I′C′.

La quantité qu'il faut rendre minimum est donc

$$(\mathrm{BB}' + \mathrm{CC}')\,\frac{\mathrm{I'B'}}{\sqrt{3}} + \mathrm{I'B'}\,.\,\mathrm{I'C'}.$$

En négligeant le facteur *constant* I′B′, ainsi que le terme constant BB′, on la réduit à

$$\frac{\mathrm{CC}'}{\sqrt{3}} + \mathrm{I'C'}.$$

Prenons à part (fig. 315) le trapèze ICI′C′, dans lequel les deux côtés perpendiculaires IC, II′ sont donnés; menons C′G parallèle à IC. A cause de $\mathrm{CC}' = \mathrm{II}' - \mathrm{GI}'$, il nous suffira de chercher le minimum de la quantité $\mathrm{I'C'} - \dfrac{\mathrm{GI}'}{\sqrt{3}}$.

A cet effet, désignons C′G par a, GI′ par x, $\mathrm{I'C'} - \dfrac{\mathrm{GI}'}{\sqrt{3}}$

par z : nous aurons

$$\sqrt{a^2+x^2} - \frac{x}{\sqrt{3}} = z\ ;$$

d'où

$$2x^2 - 2zx\sqrt{3} + 3(a^2 - z^2) = o.$$

Cette équation du second degré a ses racines *imaginaires* tant que z^2 est inférieur à $\frac{2}{3}a^2$. Conséquemment, le minimum de z est $a\sqrt{\frac{2}{3}}$, et la valeur correspondante de x est $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

De là résulte que *la surface latérale du polyèdre proposé est la plus petite possible, quand la différence entre les arêtes* BB′ *et* CC′ *égale le quart de la diagonale du carré construit avec* AB *comme côté.*

Remarque. Le polyèdre dont nous venons de nous occuper est celui qui constitue chacun des *alvéoles de l'abeille.*

Problème XII.

Partager un tronc de pyramide en parties proportionnelles à des nombres donnés, par des plans parallèles aux bases.

Ce problème n'est pas susceptible d'une solution graphique, fondée seulement sur l'emploi de la règle et du compas. Nous allons donc chercher les expressions *algébriques* des différents segments de la hauteur du tronc : elles permettront, dans chaque cas particulier, de calculer les valeurs *numériques* de ces lignes.

Soient B, b, H les deux bases et la hauteur du tronc.

Supposons, pour fixer les idées, que ce polyèdre doive être partagé en quatre parties, proportionnelles à m, n, p, q ; et soient x, y, z, t les hauteurs de ces segments.

Prolongeons les faces latérales du tronc, de manière à reconstruire les deux pyramides dont il est la différence. Soit h la hauteur inconnue de la petite pyramide ; alors $\mathrm{H} + h$ est la hauteur de la grande.

Nommons actuellement B′, B″, B‴ les aires des sections faites dans le tronc, par les plans parallèles aux bases ; nous aurons :

G., 515.
$$\frac{\mathrm{B}}{(\mathrm{H}+h)^2} = \frac{\mathrm{B}'}{(\mathrm{H}+h-x)^2} = \frac{\mathrm{B}''}{(\mathrm{H}+h-x-y)^2}$$
$$= \frac{\mathrm{B}'''}{(\mathrm{H}+h-x-y-z)^2} = \frac{b}{h^2}.$$

En comparant chacun des segments au tronc total, nous trouvons :

$$\frac{(\mathrm{B}+\mathrm{B}'+\sqrt{\mathrm{BB}'})\,x}{(\mathrm{B}+b+\sqrt{\mathrm{B}b})\,\mathrm{H}} = \frac{m}{s},$$
$$\frac{(\mathrm{B}'+\mathrm{B}''+\sqrt{\mathrm{B}'\mathrm{B}''})\,y}{(\mathrm{B}+b+\sqrt{\mathrm{B}b})\,\mathrm{H}} = \frac{n}{s};$$
$$\frac{(\mathrm{B}''+\mathrm{B}'''+\sqrt{\mathrm{B}''\mathrm{B}'''})\,z}{(\mathrm{B}+b+\sqrt{\mathrm{B}b})} = \frac{p}{s},$$
$$\frac{(\mathrm{B}'''+b+\sqrt{\mathrm{B}'''b})\,t}{(\mathrm{B}+b+\sqrt{\mathrm{B}b})\,\mathrm{H}} = \frac{q}{s},$$

s étant la somme des quantités m, n, p, q.

Les premières proportions donnent aisément

$$\frac{\sqrt{\mathrm{B}}-\sqrt{b}}{\mathrm{H}} = \frac{\sqrt{\mathrm{B}}-\sqrt{\mathrm{B}'}}{x} = \frac{\sqrt{\mathrm{B}'}-\sqrt{\mathrm{B}''}}{y} = \frac{\sqrt{\mathrm{B}''}-\sqrt{\mathrm{B}'''}}{z} = \frac{\sqrt{\mathrm{B}'''}-\sqrt{b}}{t};$$

d'où

$$x = \mathrm{H}\frac{\sqrt{\mathrm{B}} - \sqrt{\mathrm{B}'}}{\sqrt{\mathrm{B}} - \sqrt{b}}, \quad y = \frac{\sqrt{\mathrm{B}'} - \sqrt{\mathrm{B}''}}{\sqrt{\mathrm{B}} - \sqrt{b}},$$

$$z = \mathrm{H}\frac{\sqrt{\mathrm{B}''} - \sqrt{\mathrm{B}'''}}{\sqrt{\mathrm{B}} - \sqrt{b}}, \quad t = \frac{\sqrt{\mathrm{B}'''} - \sqrt{b}}{\sqrt{\mathrm{B}} - \sqrt{b}}.$$

En substituant ces valeurs dans les autres proportions, on trouve

$$\frac{\mathrm{B}\sqrt{\mathrm{B}} - \mathrm{B}'\sqrt{\mathrm{B}'}}{\mathrm{B}\sqrt{\mathrm{B}} - b\sqrt{b}} = \frac{m}{s},$$

$$\frac{\mathrm{B}'\sqrt{\mathrm{B}'} - \mathrm{B}''\sqrt{\mathrm{B}''}}{\mathrm{B}\sqrt{\mathrm{B}} - b\sqrt{b}} = \frac{n}{s},$$

$$\frac{\mathrm{B}''\sqrt{\mathrm{B}''} - \mathrm{B}'''\sqrt{\mathrm{B}'''}}{\mathrm{B}\sqrt{\mathrm{B}} - b\sqrt{b}} = \frac{p}{s},$$

$$\frac{\mathrm{B}'''\sqrt{\mathrm{B}'''} - b\sqrt{b}}{\mathrm{B}\sqrt{\mathrm{B}} - b\sqrt{b}} = \frac{q}{s}.$$

On déduit, de la dernière proportion,

$$\mathrm{B}'''\sqrt{\mathrm{B}'''} = b\sqrt{b} + \frac{q}{s}(\mathrm{B}\sqrt{\mathrm{B}} - b\sqrt{b});$$

puis, par des substitutions successives :

$$\mathrm{B}''\sqrt{\mathrm{B}''} = b\sqrt{b} + \frac{p+q}{s}(\mathrm{B}\sqrt{\mathrm{B}} - b\sqrt{b}),$$

$$\mathrm{B}'\sqrt{\mathrm{B}'} = b\sqrt{b} + \frac{n+p+q}{s}(\mathrm{B}\sqrt{\mathrm{B}} - b\sqrt{b}).$$

Dans chacune de ces nouvelles équations, formons les carrés des deux membres, et extrayons la racine cubique de part et d'autre; nous obtiendrons

$$B''' = \sqrt[3]{\left[b\sqrt{b} + \frac{q}{s}(B\sqrt{B} - b\sqrt{b})\right]^2},$$

$$B'' = \sqrt[3]{\left[b\sqrt{b} + \frac{p+q}{s}(B\sqrt{B} - b\sqrt{b})\right]^2},$$

$$B' = \sqrt[3]{\left[b\sqrt{b} + \frac{n+p+q}{s}(B\sqrt{B} - b\sqrt{b})\right]^2},$$

puis

$$\sqrt{B'''} = \sqrt[3]{b\sqrt{b} + \frac{q}{s}(B\sqrt{B} - b\sqrt{b})},$$

$$\sqrt{B''} = \sqrt[3]{b\sqrt{b} + \frac{p+q}{s}(B\sqrt{B} - b\sqrt{b})},$$

$$\sqrt{B'} = \sqrt[3]{b\sqrt{b} + \frac{n+p+q}{s}(B\sqrt{B} - b\sqrt{b})}.$$

Il ne reste plus qu'à faire de simples substitutions pour obtenir les valeurs définitives de x, y, z, t. Ce dernier calcul ne présente aucune difficulté.

Problème XIII.

Couper un cube par un plan, de manière que la section soit un hexagone régulier.

FIG. 316. Prenons les milieux M, N, P, Q, R, S de six arêtes consécutives du cube : ces six points sont les sommets d'un hexagone régulier satisfaisant à la question.

D'abord, le polygone MNPQRS est plan. En effet, les côtés MS, NP, prolongés, rencontrent en un même point I le prolongement de l'arête FB. Donc ces deux côtés, et par suite tous les côtés, sont situés dans un même plan, parallèle à celui qui contiendrait les sommets B, E, G du cube.

En second lieu, l'hexagone est équilatéral : car le côté

MS, par exemple, est égal à la demi-diagonale de la face ABFE.

Enfin, chacun des angles de l'hexagone MNPQRS est égal à $\frac{4}{3}$ d'angle droit. En effet, l'angle SMN est le supplément de IMN. Or le triangle IMN est équilatéral ; donc, etc.

Remarques. I. L'hexagone régulier MNPQRS est isopérimètre avec le triangle équilatéral BEG. Il est facile de reconnaître que la même propriété subsisterait pour tous les hexagones déterminés par des plans parallèles à BEG.

II. On sait (Th. XVI, Liv. IV) que, parmi tous les polygones isopérimètres et d'un même nombre de côtés, le maximum est le polygone régulier ; donc, d'après la remarque précédente, *l'hexagone régulier* MNPQRS *est plus grand que tous les hexagones résultant de la section du cube par des plans parallèles à* BEF.

III. Nous engageons le lecteur à essayer la résolution de ce problème général : *Quelles sont les figures résultant de la section d'un cube par un plan ?*

Problème XIV.

Trouver, d'après les données suivantes, le volume d'un polyèdre ABCDA'B'C'D', ayant pour faces deux rectangles ABCD, A'B'C'D' et quatre trapèzes ABA'B', BCB'C', CDC'D', DAD'A'.

$$\begin{aligned} AB &= a = 2^{m},50, \\ BC &= b = 1^{m},50, \\ A'B' &= a' = 2^{m},50, \\ B'C' &= b' = 0^{m},50, \\ \text{hauteur} &= h = 0^{m},50 \ (^*). \end{aligned}$$

Le plan mené par les arêtes opposées A'B', CD, dé- FIG. 213.

(*) Cette forme et ces dimensions sont celles des tas de pierres que les *cantonniers* disposent le long des routes.

compose le polyèdre en deux prismes triangulaires tronqués B'CC'A'DD', BB'CAA'D. Pour mesurer chacun d'eux, menons un plan EFE'F' perpendiculaire à AB' : son intersection E'F avec A'B'CD détermine les *sections droites* EE'F', E'FE' de nos troncs de prismes.

G., 561. Cela posé, le théorème sur la mesure du prisme triangulaire tronqué donne

$$\text{vol. } B'CC'A'DD' = E'FF \cdot \frac{1}{3}(A'B' + C'D' + CD),$$

$$\text{vol. } BB'CAA'D = EE'F \cdot \frac{1}{3}(AB + CD + AB');$$

c'est-à-dire

$$\text{vol. } B'CC'ADD' = E'FF' \cdot \frac{1}{3}(2a' + a),$$

$$\text{vol. } BB'CAA'D = EE'F \cdot \frac{1}{3}(2a + a').$$

Les triangles E'FF', EE'F, dans lesquels se décompose le trapèze EFE'F', ont pour hauteur h ; donc

$$E'FF' = \frac{1}{2}b'h, \qquad EE'F = \frac{1}{2}bh;$$

puis

$$\text{vol. } B'CC'A'DD' = \frac{1}{6}(2a' + a)b'h,$$

$$\text{vol. } BB'CAA'D = \frac{1}{6}(2a + a')bh.$$

Ajoutant ces deux expressions, nous aurons la formule cherchée :

$$V = \frac{1}{6}[(2a + a')b + (2a' + a)b']h.$$

Dans l'exemple proposé,

$$V = \frac{1}{6}[6,5 \,.\, 1,5 + 5,5 \,.\, 0,5]0,5 = 1^{mc},041.$$

Problème XV.

Déterminer le volume d'un polyèdre qui a pour faces deux polygones quelconques ABC..., A'B'C..., situés dans deux plans parallèles, et une série de triangles ABA', A'B'B, BCB'... (*).

Au moyen de plans menés par les arêtes, perpendiculairement aux plans des bases, on décompose le polyèdre en un prisme droit, projeté en A'B'C..., en une série de prismes triangulaires tronqués, projetés en ABA', BCB', CDB'..., et en une autre série de prismes triangulaires tronqués, projetés en A'B'B, B'C'D, C'D'E... (**). Par conséquent, si B, B' désignent les bases du polyèdre ; H, la distance des bases, ou la *hauteur* du polyèdre ; S, la somme des projections ABA', BCB'... ; S', la somme des projections A'B'B, B'C'D, C'D'E...; le volume cherché a pour expression FIG. 256.

$$V = B'H + \frac{1}{3}(S + 2S')H.$$

Pour simplifier cette formule, considérons la section A''B''C''..., menée à égales distances des deux bases. Nous aurons, B'' étant l'aire de cette section,

$$B - B'' = \frac{3}{4}S + \frac{1}{4}S', \qquad B'' - B' = \frac{3}{4}S' + \frac{1}{4}S;$$

d'où

$$B - B' = S + S', \qquad 2(B + B' - 2B'') = S - S'.$$

(*) La figure représente une projection du polyèdre, faite sur un plan parallèle aux deux bases. De plus, et seulement pour fixer les idées, on a supposé la projection de l'une des bases intérieure à la projection de l'autre.

(**) Les prismes de la première série sont, véritablement, des *pyramides triangulaires*, et les autres, des *pyramides quadrangulaires*.

Par suite,

$$S + 2S' = \frac{1}{6}(B - 5B' + 4B''),$$

et enfin

$$V = \frac{1}{6}(B + B' + 4B'')H \text{ (*)}.$$

(*) Cette formule, qui renferme celle de la page 328, a été donnée par le célèbre professeur *Sarrus*.

LIVRE VII.

Théorème I.

Deux points, réciproques par rapport à une sphère, partagent harmoniquement le diamètre qui les contient.

(Voyez Th. XVI, Liv. III.)

Théorème II.

Les distances d'un point quelconque d'une sphère, à deux points réciproques, sont dans un rapport constant.

(Voyez Th. XVIII, Liv. III)

Théorème III.

1° Les tangentes menées à une sphère S, d'un point extérieur A, sont égales entre elles ; 2° le lieu de ces tangentes est un cône de révolution ; 3° le lieu de leurs points de contact est une circonférence située dans un plan P, perpendiculaire au diamètre EF passant par A.

Par le diamètre EF, faisons passer divers plans : ils coupent la sphère suivant les circonférences EBF, ECF, EDF... Menons, à ces lignes, les tangentes AB, AC, AD..., et les rayons BO, CO, DO...Nous formons ainsi des triangles rectangles ABO, ACO, ADO..., évidemment égaux entre eux. Donc, 1° les tangentes AB, AC, AD... sont égales entre elles. FIG. 317.

A cause de l'égalité des mêmes triangles, les angles

BAO, CAO, DAO... sont égaux entre eux ; ainsi, 2° le lieu des tangentes est un cône de révolution.

Enfin, si nous abaissons, des points B, C, D..., les perpendiculaires BI, CI′, DI′... sur AO, toutes ces droites seront égales entre elles; et les points I, I′, I″... se confondront, parce que les triangles rectangles ABI, ACI′, ADI″... sont, d'après ce qui précède, égaux entre eux. Donc, 3° le lieu des points de contact B, C, D... est une ligne *plane*, etc.

Remarques. I. On peut abréger la démonstration précédente, en supposant que la figure ABFE tourne autour de AO. Dans ce mouvement, la demi-circonférence EBF engendre la surface sphérique S ; la droite AB, *qui ne change pas de longueur*, engendre une surface conique, *circonscrite* à la sphère; enfin, le point de contact B décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation.

II. Le point E est le pôle du petit cercle BCD ; donc les arcs de grands cercles EB, EC, ED. . sont égaux entre eux.

Théorème IV.

Le sommet d'un cône C, circonscrit à une sphère S, est le pôle du plan P de la circonférence de contact.

On appelle *plan polaire* d'un point A, relativement à une sphère S, le plan perpendiculaire au diamètre AO, mené par le conjugué du point A. Réciproquement, le point A est le *pôle* du plan.

Cette définition étant admise, le théorème consiste en ce que le point I, où le plan P coupe AO, est le conjugué du point A, etc. (Voyez Th. XIX, Liv. III.)

Théorème V.

Le pôle A′ de tout plan P′ passant par un point A est situé sur le plan P, polaire de A.

Par le centre O de la sphère S, concevons un plan Q, perpendiculaire aux plans P, P′. Ce nouveau plan coupe P et P′ suivant deux droites, dont l'une D′ passe par le point A, et dont l'autre D est la polaire du point A, relativement à la circonférence C déterminée par le plan sécant. Il est facile de voir, maintenant, que le pôle du plan P′, relativement à la sphère S, se confond avec le pôle de la droite D′, relativement à la circonférence C. La proposition est donc ramenée au Théorème XX du Livre III.

Théorème VI.

Le plan polaire P′ de tout point A′, pris sur un plan P, passe par le pôle A de P.

(Voyez Th. XXI, Liv. III.)

COROLLAIRE. *Si chacun des points d'un plan* P, *extérieur à une sphère* S, *est pris pour sommet d'un cône circonscrit à la sphère, les plans des circonférences suivant lesquelles tous les cônes ainsi déterminés touchent la sphère se coupent en un même point* A, *pôle du plan* P.

Théorème VII.

Le pôle A de tout plan P, passant par une droite D, est situé sur la droite D′, réciproque de la première.

Nous conviendrons d'appeler *droites réciproques* deux droites passant par deux points réciproques, perpendiculaires entre elles, et perpendiculaires au diamètre qui contient les deux points.

FIG. 318. Cela étant, prenons, pour plan de la figure, celui qui passe par le centre O de la sphère et par la droite D′. Abaissons OE′ perpendiculaire à cette dernière droite; soit E le point réciproque de E′ : la droite D sera la perpendiculaire au plan de la figure, projetée en E; et le plan P aura pour projection une droite telle que BEC. D'ailleurs, le pôle A du plan P est le conjugué du pied A′ de la perpendiculaire abaissée sur ce plan, par le centre O de la sphère (Th. IV). Donc ce pôle est situé sur la droite D′.

Théorème VIII.

Le plan polaire P de tout point A, pris sur une droite D′, passe par la droite D, réciproque de la première.

(Voyez Th. VI.)

Théorème IX.

Toute corde, menée par un point A, est divisée harmoniquement par ce point et par son plan polaire P.

Par la corde et le centre de la sphère, faisons passer un plan Q; il coupe la sphère suivant une circonférence de grand cercle; et il coupe le plan P suivant une droite, polaire du point A par rapport à cette circonférence (Th. V); donc, etc. (Voyez Th. XXII, Liv. III.)

Théorème X.

Le lieu des pôles d'une droite D, relativement à tous les cercles situés sur une sphère S et passant par cette droite, est la droite D′, réciproque de D.

FIG. 319. Soit O la circonférence de grand cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite D. Soit, en outre, A la projec-

tion de celle-ci. Tout petit cercle de la sphère, passant par cette droite D, est projeté suivant une corde BC concourant en A ; et il a BC pour diamètre. Conséquemment, le pôle M de la droite D, par rapport à ce petit cercle, est situé sur la corde BC. Et comme le diamètre BC doit être partagé harmoniquement par D et M, il s'ensuit que ce pôle est l'intersection de BC avec la polaire EF du point A, relativement au grand cercle O. Le lieu des pôles de la droite D est donc cette droite EF, laquelle, évidemment, est la réciproque de D.

Théorème XI.

Le lieu des polaires d'un point A, relativement à tous les cercles situés sur une sphère S et passant par ce point, est le plan polaire de ce même point.

La démonstration est analogue à celle du théorème précédent.

Théorème XII.

Le lieu géométrique des points d'égale puissance, par rapport à deux sphères S, S′, est un plan P, perpendiculaire à la ligne des centres.

On reconnaît facilement que si, par un point fixe, on fait passer une droite quelconque, terminée de part et d'autre à une sphère donnée, le rectangle des segments de cette corde, déterminés par le point, est constant.

Ce rectangle constant est appelé *puissance* du point par rapport à la sphère.

Cela posé, la proposition est immédiatement ramenée à la proposition analogue de Géométrie plane. (Voyez Th. XXXV, Liv. III.)

Remarques. I. Le plan P est appelé *plan radical* des sphères S, S′. Il se confond avec le lieu des points d'où l'on peut mener, aux deux sphères, des tangentes égales.

II. Si les sphères se coupent, le plan radical contient la circonférence commune.

III. Si les sphères se touchent, le plan radical est le plan tangent commun.

Théorème XIII.

Les plans radicaux de trois sphères, considérées deux à deux, se coupent suivant une droite D, perpendiculaire au plan des trois centres.

(Voyez Th. XXXVI, Liv. III.)

Remarques. I. La droite D est l'*axe radical* des trois sphères.

II. *Si trois sphères se coupent deux à deux, les plans des circonférences communes se coupent suivant une même droite*, etc.

Théorème XIV.

Les plans radicaux de quatre sphères, considérées trois à trois, se coupent tous les quatre en un même point, appelé centre radical des quatre sphères.

(Voyez Th. XXXVI, Liv. III.)

Théorème XV.

Le lieu des points d'égale puissance, par rapport à deux cercles situés sur une même sphère, est l'intersection des plans de ces cercles.

Observons d'abord que toute corde, soit du premier, soit du second cercle, est une corde de la sphère. Donc tout point pris sur l'intersection des plans de ces cercles est un point d'égale puissance par rapport à ceux-ci.

D'un autre côté, par un point non situé sur cette intersection, on ne peut faire passer, à la fois, une corde du premier cercle et une corde du second ; ce point ne saurait donc appartenir au lieu dont il s'agit.

Théorème XVI.

Deux arcs de grands cercles PA, PB, passant par un même point P, et tangents à un petit cercle C, sont égaux entre eux.

Soit AT la tangente commune au grand cercle PA et au petit cercle C. Soit, de même, BT la tangente commune aux cercles PB, C. Ces tangentes, contenues dans un même plan, se coupent généralement en un point T, situé sur l'intersection POP′ des plans des deux grands cercles. Donc (Th. III) elles sont égales, et les arcs PA, PB sont égaux. FIG. 320.

Remarque. La circonférence de grand cercle PAP′, tangente au petit cercle C, est dite *tangente sphérique* de ce petit cercle.

Théorème XVII.

Le lieu des points P d'où l'on peut mener à deux cercles C, C′, situés sur une sphère S, des tangentes sphériques égales, est une circonférence de grand cercle dont le plan passe par l'intersection des plans des deux cercles.

Du point P comme pôle, avec PA pour *rayon sphérique*, décrivons le petit cercle ABA′B′ : il coupe les cercles C, C′ aux points A, B, A′, B′, où les tangentes sphériques PA, PB, PA′, PB′ touchent ces petits cercles (Th. XVI). De plus, les tangentes en A, B, A′, B′, à ces tangentes sphériques, concourant en un point T, situé sur le rayon OP prolongé. Or le point T appartient à l'intersection RR′ des plans C, C′. Donc le lieu des points P est situé dans un plan passant par le centre O de la sphère et par l'intersection RR′. FIG. 320.

Remarques. I. La tangente AT à l'arc de grand cercle PA est, par hypothèse, tangente au petit cercle C. De plus, la tangente AH au cercle ABA′B est perpendiculaire à AT : c'est ce que l'on reconnaît en observant que les plans des cercles PA, ABA′B′ sont perpendiculaires entre eux, et que AH est perpendiculaire à leur intersection AI. Donc le cercle ABA′B coupe *orthogonalement* le cercle C, le cercle C′, et enfin tous les cercles dont les plans passent par la droite RR′.

II. Si le point T se déplace sur la droite RR′, le cercle orthogonal ABA′B′ varie ; mais le plan de ce cercle est le plan polaire du point T (Th. VI) ; donc il passe constamment par la droite réciproque de RR′ (Th. VIII) ; donc toutes les circonférences telles que ABA′B se coupent en deux points fixes F, F′, qui sont ceux où la surface de la sphère est rencontrée par la droite réciproque de RR′.

Théorème XVIII.

Si l'on conçoit, sur une sphère, une infinité de circonférences C dont les plans passent par une droite D, et une infinité de circonférences C′ dont les plans passent par la droite D′, réciproque de D, chacune des premières circonférences coupe orthogonalement chacune des dernières.

Ce théorème est évidemment contenu dans les deux remarques précédentes.

Théorème XIX.

Le sommet A d'un angle sphérique CAD (fig. 321), circonscrit à un cercle directeur CDE, a pour cercle conjugué celui qui passe par les points de contact C, D.

FIG. 322. Supposons que, par le centre O de la sphère, on fasse passer un plan perpendiculaire à un cercle situé sur la sphère. Soit alors CD la projection de ce cercle, lequel a pour centre et pour pôle les points I, P ; et soient A′, B′ deux points réciproques, ou conjugués par rapport à ce

même cercle, c'est-à-dire deux points satisfaisant à la relation

$$IA' \, . \, IB' = \overline{ID}^2 \, .$$

Les rayons OA', OB' rencontrent la surface de la sphère en deux points A, B, situés sur la circonférence de grand cercle ACD : ces points A, B sont dits *conjugués* par rapport au cercle *directeur* CD.

Ainsi, *deux points* A, B, *situés sur la circonférence d'un grand cercle perpendiculaire à un cercle directeur* CD, *sont conjugués par rapport à celui-ci, lorsque les droites menées du centre de la sphère à ces deux points rencontrent, en deux points réciproques, le plan du cercle directeur* (*).

En second lieu, nous conviendrons d'appeler *cercle conjugué d'un point* A, *le grand cercle* BO *mené par le point conjugué de celui-ci, perpendiculairement au plan du grand cercle qui contient les deux points.*

Réciproquement, le point A est dit *conjugué* du cercle OB.

Enfin, *deux grands cercles* AO, BO, *menés par deux points conjugués, perpendiculairement au grand cercle qui contient les deux points, sont appelés cercles conjugués* (**).

Ces définitions étant entendues, la démonstration du théorème est facile.

En effet, soient CA', DA' les droites suivant lesquelles FIG. 321.

(*) Les lecteurs à qui les définitions de la Trigonométrie sont familières verront immédiatement qu'en désignant par α, β, γ les arcs PA, PB, PC, on a

$$\text{tang}\,\alpha \, . \, \text{tang}\,\beta = \text{tang}^2\gamma.$$

(**) Ces dénominations, ainsi que la plupart des théorèmes contenus dans ce VII[e] Livre, m'ont été suggérées par la lecture d'un très-intéressant *Mémoire sur la sphère*, dont l'auteur est M. *Heegmann*, de Lille.

les plans des grands cercles AC, AD coupent le plan du cercle CED : ces droites, tangentes au petit cercle, se coupent en un point A′, pôle de la corde de contact CD ; et le milieu B′ de cette corde est le point réciproque du point B. De plus, toute la figure est symétrique par rapport au plan OA′B′. Donc le grand cercle CBD est conjugué du point A.

(Voyez Th. XVIII, Liv. III.)

Théorème XX.

Le conjugué A′ de tout grand cercle C′ passant par un point A, est sur le grand cercle C conjugué de A.

Imaginons les droites menées du centre de la sphère à tous les points de la figure, et prolongées jusqu'à ce qu'elles rencontrent le plan du cercle directeur D : le lieu des points d'intersection est une *figure plane* qui peut être regardée comme une transformée de la *figure sphérique* donnée. Ainsi, les *cercles* C, C′ sont *transformés* en deux *droites* c, c' ; et les points A, A′ sont transformés en deux points a, a'.

Actuellement, de ce que le cercle C est conjugué du point A, il est facile de conclure que la droite c est la polaire du point a, relativement au cercle D. De même, la droite c' est la polaire de a'. Mais, évidemment, cette droite c' passe par le point a ; donc son pôle a' est situé sur la droite c (Th. XX, Liv. III) ; donc le point A′ est situé sur la circonférence C.

Remarque. La transformation dont nous venons de faire usage s'appelle *transformation conique* ou *transformation perspective* : elle ramène, dans un grand nombre de cas, les théorèmes de la Géométrie *sphérique* aux théorèmes de la Géométrie plane. Comme application de cette méthode, nous indiquerons les propositions suivantes, en nous contentant de les énoncer.

Théorème XXI.

Le grand cercle C′, conjugué de tout point A′ pris sur un grand cercle C, passe par le point A, conjugué de C.

COROLLAIRE I. *Si, par un point* A, *pris sur la surface de la sphère, on fait passer un arc de grand cercle* ABC *coupant en* B, C *un petit cercle donné* BC ; *que, par ces points, on mène à ce petit cercle deux tangentes sphériques* BM, CM ; *le lieu du point de rencontre* M *de ces tangentes est une circonférence de grand cercle.*

COROLLAIRE II. *Si, par différents points* M, M′, M″,... *pris sur une circonférence de grand cercle, on mène, à un petit cercle donné* D, *des tangentes sphériques, les arcs de grands cercles* BC, B′C′, B″C″,... *qui joignent les couples de points de contact, passent tous par le même point* A.

(Voyez Th. XXI, Liv. III.)

Théorème XXII.

Si les arcs de grands cercles qui joignent les sommets correspondants de deux triangles sphériques se coupent en un même point, les points de concours des côtés opposés sont situés sur une même circonférence de grand cercle. — Et réciproquement.

(Voyez Th. X, Liv. III) (*).

(*) On a vu, à l'endroit cité, que si les points de concours des côtés correspondants de deux triangles rectilignes sont situés sur une même droite D, ces triangles sont dits *homologiques*. En outre, la droite D est l'*axe d'homologie* ; et le point de concours des droites menées par les sommets correspondants est le *centre d'homologie*.

D'un autre côté, on sait (Th. V, Liv. III) que deux polygones rec-

Théorème XXIII.

Si deux polygones sphériques sont composés d'un même nombre de triangles tels, que les points de concours de deux côtés homologues quelconques, pris dans deux triangles correspondants, soient tous situés sur une même circonférence de grand cercle, les arcs de grands cercles qui joignent les sommets homologues de ces polygones se coupent tous en un même point.

Remarque. La réciproque n'est pas toujours vraie.

Théorème XXIV.

Dans tout quadrilatère sphérique, inscrit à un petit cercle, le point de rencontre des diagonales et les points de concours des côtés opposés forment un triangle dans lequel chaque sommet est conjugué au côté opposé.

(Voyez Th. L, Liv. III.)

---

tilignes, semblables et semblablement situés, c'est-à-dire deux polygones *homothétiques*, ont un centre de similitude.

L'ensemble de ces propositions prouve que *deux triangles rectilignes, semblables et semblablement placés, sont figures homologiques ayant leur axe d'homologie transporté à l'infini*; de sorte que *la similitude*, ou plutôt *l'homothétie*, est un cas particulier de *l'homologie*.

Si l'on passe des figures planes aux figures sphériques, au moyen de la projection conique, on n'aperçoit plus aucune différence entre l'homothétie et l'homologie. deux triangles rectilignes, soit homothétiques, soit homologiques, donnent toujours lieu à deux triangles sphériques tels, que les points de concours des côtés correspondants sont situés sur une circonférence de grand cercle.

Par suite, la propriété dont jouissent deux polygones rectilignes homothétiques, d'avoir un centre de similitude ou d'homothétie, est remplacée, quand on passe aux figures sphériques, par une propriété plus générale, énoncée dans le Théorème XXIII.

Nous n'avons pas besoin d'ajouter que cette généralisation de la théorie du centre de similitude subsiste pour les figures planes.

(Sur toutes ces questions, le lecteur peut consulter le *Traité de géométrie supérieure*, par M. Chasles.)

Théorème XXV.

Dans tout quadrilatère sphérique complet, circonscrit à un petit cercle, chacune des diagonales est conjuguée au point d'intersection des deux autres.

(Voyez Th. LI, Liv. III.)

Théorème XXVI.

Si deux quadrilatères sphériques sont, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même petit cercle, de manière que les sommets du premier soient les points de contact des côtés du second : 1° les points de concours des côtés opposés de ces quadrilatères sont situés sur une même circonférence de grand cercle; 2° toutes les diagonales se coupent en un même point, conjugué à cette circonférence; 3° les points de concours des côtés opposés du quadrilatère inscrit sont situés sur les diagonales du quadrilatère circonscrit.

(Voyez Th. LII, Liv. III.)

Théorème XXVII.

Dans tout hexagone sphérique, inscrit à un petit cercle, les points de concours des côtés opposés, pris deux à deux, sont tous trois sur une circonférence de grand cercle.

(Voyez Th. XXV, Liv. III.)

Théorème XXVIII.

Dans tout hexagone sphérique, circonscrit à un petit cercle, les diagonales menées par les sommets opposés, pris deux à deux, se coupent en un même point.

(Voyez Th. XXX, Liv. III.)

Théorème XXIX.

Dans tout triangle sphérique, inscrit à un petit cercle, les points de concours des côtés avec les tangentes sphériques aux sommets opposés, sont situés sur une même circonférence de grand cercle.

(Voyez Th. XXIX, Liv. III.)

Théorème XXX.

Par deux cercles AEB, CFD, tracés sur une sphère, on peut généralement faire passer un cône.

FIG. 323. Soit BACD le grand cercle perpendiculaire aux cercles donnés ; et soient AB, CD, les cordes suivant lesquelles ceux-ci se projettent sur le plan BACD. Les droites AC, BD, prolongées, se coupent généralement en un point S, qui peut être considéré comme le sommet d'un cône *oblique* ayant pour *base* le cercle AEB.

Cela posé, je dis que la courbe suivant laquelle ce cône coupe de nouveau la surface de la sphère est la circonférence CFD.

Prenons sur AEB un point quelconque M ; soit N le point où la *génératrice* SM du cône perce la surface de la sphère. Abaissons SP perpendiculaire à AB : cette droite est la hauteur du cône. Enfin, joignons le point M au point P ; puis, dans le plan MSP, élevons NQ perpendiculaire à SM.

Le quadrilatère NMPQ, qui a deux angles opposés droits, est inscriptible ; donc

$$SP \,.\, SQ = SM \,.\, SN.$$

Mais le rectangle des segments SM, SN est équivalent au rectangle des segments SA, SC (Th. XII) : l'égalité précédente équivaut donc à

$$SP \,.\, SQ = SA \,.\, SC.$$

D'après cette relation, le point Q est le pied de la perpendiculaire abaissée du point C sur SP ; donc ce point Q est indépendant de la position du point N ; donc la courbe d'intersection du cône et de la sphère donnée appartient à une autre sphère ayant QS pour diamètre, etc.

Remarques. — I. Indépendamment du cône S, il en existe en général un autre, ayant pour sommet, ou plutôt pour *centre*, le point de rencontre S′ des diagonales AD, BC.

II. Si les cercles AB, CD sont égaux, le cône S se transforme en un cylindre généralement oblique.

III. Les angles SAB, SDC, qui mesurent les inclinaisons des plans AEB, CFD sur les génératrices opposées SA, SB, sont égaux, comme ayant même supplément. Pour cette raison, les sections circulaires AEB, CFD sont dites *anti-parallèles*.

IV. Prolongeons les cordes AB, CD, projections des deux cercles, jusqu'à ce qu'elles se coupent en un point G : ce point sera, sur le plan du grand cercle BACD, la projection de l'intersection des plans des circonférences. Or, dans le quadrilatère inscrit ABCD, le point S est le pôle de la droite S′G (Th. L, Liv. III); et le point S′ est le pôle de la droite SG; ainsi : FIG. 324.

Quand deux cercles sont situés sur une sphère, l'intersection de leurs plans est confondue avec la droite suivant laquelle se coupent les plans polaires des sommets des cônes déterminés par ces cercles.

On peut simplifier cet énoncé, en observant que, d'après le Théorème VII, cette dernière droite, perpendiculaire au plan de la figure, est réciproque de la droite SS′ ; ainsi

Quand deux cercles sont situés sur une sphère, l'intersection de leurs plans est la droite réciproque de celle qui joint les sommets des cônes déterminés par ces cercles.

V. D'après la démonstration précédente, *si un cône pénètre une sphère, et que la courbe d'entrée soit une circonférence, la courbe de sortie est aussi une circonférence.*

FIG. 323. VI. SE, SM étant deux génératrices, qui rencontrent aux points F, N la section antiparallèle du cône, on a

$$SM \cdot SN = SE \cdot SF.$$

Ainsi, *les points où deux génératrices quelconques d'un cône rencontrent deux sections antiparallèles, sont les sommets d'un quadrilatère inscriptible.*

VII. La sphère qui a pour diamètre le segment SQ de la hauteur SP du cône AEBS, détermine la section antiparallèle CFD. D'ailleurs, le point Q est arbitraire. Donc *toute sphère qui passe par le sommet d'un cône à base circulaire, et qui a son centre sur la hauteur du cône, coupe ce cône suivant une circonférence.*

VIII. Il est évident, par la théorie des figures semblables, que tout plan parallèle au plan du cercle CF coupe le cône S suivant une circonférence. En particulier, si le cercle CD se réduit à un point, le cône a son sommet sur la sphère, et le plan du cercle CD devient tangent à la surface, au sommet du cône. Donc, *tout cône qui a pour base et pour sommet un cercle et un point de la sphère est coupé suivant un cercle par un plan quelconque, parallèle au plan mené par le sommet, tangentiellement à la sphère.*

Théorème XXXI.

Si un cercle variable I est tangent à deux cercles AB, CD, tracés sur une sphère O :

1° Les points de contact M, N appartiennent à une génératrice du cône déterminé par les cercles donnés ;

2° La circonférence de grand cercle passant par ces deux points coupe, sous un même angle, les circonférences données ;

3° Toutes les circonférences de grands cercles ainsi déterminées se coupent en deux points fixes ou foyers F, G, situés sur le diamètre qui passe par le sommet S du cône.

FIG. 325. Conservons les constructions employées dans le théorème qui précède, et soit en outre SM'N' une génératrice

du cône, différente de SMN. D'après l'avant-dernière remarque, les points M', N, M, N' appartiennent à une même circonférence, *située sur la sphère*. Si nous imaginons que la génératrice SM'N' se rapproche indéfiniment de la génératrice SMN, cette circonférence, continuellement sécante à l'égard des cercles donnés, tendra vers une position limite IMN. En même temps, les prolongements des cordes communes M'N, N'N auront pour limites les tangentes MT, NT.

La première partie du théorème est ainsi démontrée.

D'un autre côté, le plan mené par le centre de la sphère et par les points de contact M, N, renferme le diamètre OS; donc toutes les circonférences de grands cercles, telles que GMNF, se coupent aux extrémités G, F de ce diamètre. En outre, les tangentes à cette circonférence, aux points M, N, font, avec les tangentes MT, NT, des angles égaux entre eux.

En effet, le plan qui serait élevé par le milieu de MN, perpendiculairement à cette droite, serait un plan de symétrie pour les tangentes égales MT, NT, pour le grand cercle GMNF, et enfin pour les tangentes en M, N, à ce grand cercle. D'ailleurs, deux angles symétriques sont G, 598.
égaux; donc, etc.

Remarques. I. Si, au lieu de considérer le cône dont le sommet est extérieur à la sphère, on prenait le cône ayant pour sommet le point de rencontre des diagonales AD, BC, on arriverait aux mêmes conséquences. Ainsi, *deux cercles tels que* AB, CD, *ont toujours quatre foyers, par lesquels passent les circonférences de grands cercles* (*) *également inclinées sur les deux circonférences données.*

(*) M. Heegmann a proposé, pour ces circonférences de grands cercles, la dénomination de *sécantes isogonales* des cercles AB, CD.

II. Ce qui vient d'être dit du grand cercle GMNF s'applique à une circonférence quelconque, tracée sur la sphère et passant par les points M, N. Ainsi : *tout plan passant par le sommet du cône déterminé par deux cercles* AB, CD, *situés sur la sphère, coupe cette surface suivant une circonférence également inclinée sur les deux autres.*

III. Réciproquement : *le plan de toute circonférence qui coupe, sous des angles égaux, deux cercles de la sphère, passe par le sommet du cône déterminé par ces cercles.*

Théorème XXXII.

Les sommets des cônes déterminés par trois cercles tracés sur une sphère et considérés deux à deux, sont trois à trois sur quatre droites situées dans un même plan.

Supposons que, sur une sphère O, on ait tracé trois cercles C, C′, C″. Les cercles C, C′ déterminent deux cônes S″, s''; les cercles C′, C″ déterminent deux cônes S, s; enfin, les cercles C″, C déterminent deux cônes S′, s'. Admettons, pour fixer les idées, que les cônes S, S′, S″ aient leurs sommets extérieurs à la sphère. Je dis d'abord que ces sommets sont en ligne droite.

Parmi tous les cercles qui toucheraient extérieurement les cercles C, C′, considérons celui qui toucherait, extérieurement aussi, le cercle C″. Soient m, m', m'' les trois points de contact. La droite qui passe par deux quelconques de ces points passe aussi par le sommet correspondant. Ainsi, les sommets S, S′, S″ sont dans le plan du triangle $mm'm''$.

Pour la même raison, ces trois sommets appartiennent au plan du cercle $nn'n''$ qui toucherait intérieurement les cercles donnés. Donc les points S, S', S'' sont situés sur une même droite.

On voit, semblablement, que les sommets S, s', s'' sont en ligne droite; qu'il en est de même pour les sommets S', s'', s, et encore pour les sommets S'', s, s'. Et puisque chaque sommet appartient à deux droites différentes, les quatre droites sont dans un même plan (Th. XVII, Rem. VI).

Remarques. I. La théorie qui vient d'être exposée est tout à fait analogue à celle des figures semblables. Les sommets S, s tiennent lieu des centres de similitude, externe et interne; les droites SS'S'', S$s'$$s''$, etc., remplacent les axes de similitude, etc.

II. Considérons le cas particulier où les circonférences C, C', C'' seraient perpendiculaires à un même grand cercle. Le plan de celui-ci coupe les cônes S, S', S'' suivant six génératrices, dont l'ensemble constitue un *hexagone inscrit.* Mais, ainsi que nous venons de le voir, les sommets S, S', S'' sont situés sur une même droite. Nous retrouvons donc le théorème de Pascal (page 81).

Théorème XXXIII.

Si deux cônes ont un sommet commun S, et que leurs bases soient deux circonférences sécantes C, C', tracées sur une sphère O, l'angle sous lequel se coupent ces bases est égal à celui sous lequel se coupent les sections antiparallèles c, c', situées sur la même sphère.

Par les points d'intersection A, B des circonférences C, C', faisons passer deux génératrices SA, SB : elles percent la surface de la sphère en des points a, b qui, évidemment, sont ceux où se coupent les circonférences c, c'.

Cela posé, imaginons, sur la surface de la sphère, un cercle γ qui touche C, c aux points A, a. Ce cercle est également incliné sur C′, c' (Th. XXXI, Rem. II) ; donc ces circonférences font, avec C, c, des angles respectivement égaux.

Théorème XXXIV.

Si deux cônes ont pour bases deux circonférences sécantes C, C′, tracées sur une sphère O, et que leur sommet commun S soit un point de cette surface, tout plan P, parallèle au plan tangent T à la sphère en ce point S, coupe les cônes suivant deux circonférences c, c', dont l'angle est égal à celui des deux premières (*).

Nous savons déjà (Th. XXX, Rem. VIII) que les sections faites dans les deux cônes, par le plan P, sont des cercles c, c' : il suffit donc de faire voir que l'angle sous lequel ces cercles se coupent est égal à celui sous lequel se coupent les deux autres.

Pour cela, imaginons, sur la surface de la sphère, deux circonférences γ, γ', respectivement tangentes aux cercles C, C′ en l'un A des points où se coupent ces cercles, et passant toutes deux par le sommet S du cône. L'angle formé par les tangentes t, t' à ces circonférences, au point S, est égal à celui que font les tangentes en A, aux cercles donnés. D'ailleurs, le plan P est parallèle au plan des tangentes t, t' ; et il est facile de voir que l'angle sous lequel se coupent les circonférences c, c' est égal à celui de ces dernières droites ; donc, etc.

Remarque. Les Théorèmes XXX et XXXIV contiennent les propriétés sur lesquelles est fondée la *projection sté-*

(*) M. Heegmann, dont je reproduis presque intégralement le travail, considère ce théorème comme un cas particulier du précédent. J'ai pensé qu'une démonstration directe était nécessaire, du moins pour les commençants.

réographique ou *projection de Ptolémée.* Ces propriétés sont les suivantes :

1° *La perspective d'un cercle quelconque, situé sur la sphère, est un autre cercle ;*

2° *La perspective d'une figure sphérique* TRÈS-PETITE *est une figure semblable à la première.*

Théorème XXXV.

Si un cône a pour base un petit cercle AB de la sphère O, et pour sommet un point S de cette surface, le centre de la section antiparallèle du cône est sur la droite qui joint le sommet au pôle P de la base.

Soit ABSM le grand cercle passant par le sommet S, perpendiculairement à la base ; soit AB la corde suivant laquelle se projette celle-ci : le pôle P de cette droite, par rapport au grand cercle, est aussi le pôle du petit cercle AB, relativement à la sphère (Th. IV). Si, par ce point P, nous menons EPF parallèle à la tangente ST, cette droite EPF sera la projection de la section faite parallèlement au plan tangent en S, c'est-à-dire la projection d'une section antiparallèle. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de faire voir que le point P est le milieu de EF. FIG. 326.

Or, les angles TSA, SAP sont égaux, comme ayant même mesure ; et, à cause des parallèles, les angles TSA, PEA sont égaux ; donc, dans le triangle PAE, PA $=$ PE. Pour une raison semblable, PF $=$ PB. D'ailleurs les tangentes PA, PB sont égales entre elles ; donc, etc.

Remarque. Supposons que la droite SP soit fixe et que le point P se déplace : le cercle AB variera, mais de manière que son plan passera constamment par la droite réciproque de SP (Th. VII). De plus, cette droite réciproque sera projetée en I, à la rencontre de AB avec ST. On conclut de là cette propriété remarquable :

Si des cônes, en nombre quelconque, ont pour sommet commun un point de la sphère, et que leurs bases soient des cercles de cette surface, se coupant suivant une droite située dans le plan tangent au sommet, tout plan parallèle à celui-ci coupe tous ces cônes suivant des cercles concentriques.

Théorème XXXVI.

La figure réciproque d'un plan P, relativement à une sphère S, est la sphère S′ qui a pour diamètre la distance du centre de S au pôle de P.

(Voyez Th. LXXXIII, Liv. III.)

Théorème XXXVII.

La figure réciproque d'un cercle EF, relativement à une sphère S (*), est un autre cercle AB.

FIG. 326. La figure réciproque du cercle EF est située sur le cône qui a pour base ce cercle, et pour sommet le centre S de la sphère *directrice*. Elle est située aussi sur la sphère SMH, réciproque du plan EF (Th. XXXVI). D'ailleurs, cette seconde sphère a pour diamètre la droite qui joint le sommet S du cône au pôle H du plan EF; donc (Th. XXX, Rem. VII) elle coupe le cône suivant une circonférence AF.

Théorème XXXVIII.

La figure réciproque d'une sphère S′, relativement à une sphère S, est généralement une sphère.

Un plan quelconque, mené par les centres des sphères S, S′, coupe ces surfaces suivant deux circonférences

(*) Non représentée sur la figure.

C, C′. La figure réciproque de C′, par rapport à C, est une circonférence C″, *section méridienne* de la figure réciproque de S′ ; etc.

Remarque. Si la sphère S′ passe par le centre de la sphère directrice S, la figure réciproque de S′ devient un plan (Th. XXXVI).

Théorème XXXIX.

Dans deux figures réciproques, les angles correspondants sont égaux.

En considérant seulement le cas où la première figure est composée de droites et de plans, la démonstration est tout à fait analogue à celle du Théorème LXXXIV, (Liv. III). Nous laissons au lecteur le soin de la développer. FIG. 327.

Théorème XL.

La somme des carrés des segments formés par trois cordes qui se coupent rectangulairement deux à deux, en un même point, est égale à six fois le carré du rayon R de la sphère, moins deux fois le carré de la distance du centre au point M d'intersection des cordes.

Soit ABCD la section faite dans la sphère par le plan passant par les cordes AB et CD : la troisième corde, que nous désignerons par EF, a pour projection, sur le plan de la figure, le point M. En même temps, le point I, centre du petit cercle ABCD, est la projection du centre O de la sphère.

Si nous menons le diamètre GH de ce petit cercle, nous aurons (Th. LXV, Liv. III) :

$$\overline{AM}^2 + \overline{FM}^2 + \overline{CM}^2 + \overline{DM}^2 = \overline{GH}^2. \qquad (1)$$

Concevons maintenant le plan des droites EF, GH :

il coupe la sphère suivant un grand cercle ; et, comme ces droites sont deux cordes perpendiculaires, se coupant en M, nous aurons encore :

$$\overline{EM}^2 + \overline{FM}^2 + \overline{GM}^2 + \overline{HM}^2 = 3R^2. \qquad (2)$$

De plus,

$$\overline{GH}^2 = (GM + HM)^2 = \overline{GM}^2 + \overline{HM}^2 + 2GM \cdot AM,$$

ou, d'après le Théorème XII,

$$\overline{GH}^2 = \overline{GM}^2 + \overline{HM}^2 + 2(R + OM)(R - OM). \quad (3)$$

Si nous ajoutons, membre à membre, les équations (1), (2), (3), nous trouvons

$$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+\overline{CM}^2+\overline{DM}^2+\overline{EM}^2+\overline{FM}^2=4R^2+2(R+OM)R-OM);$$

ou enfin, en appelant δ la distance du point M au centre de la sphère,

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2 + \overline{DM}^2 + \overline{EM}^2 + \overline{FM}^2 = 6R^2 - 2\delta^2.$$

Théorème XLI.

La somme des carrés de trois cordes qui se coupent rectangulairement deux à deux, en un même point, est égale à douze fois le carré du rayon de la sphère, moins huit fois le carré de la distance du centre au point d'intersection des cordes.

Si nous ajoutons, aux deux membres de l'égalité précédente, la quantité

$$2AM \cdot BM + 2CM \cdot DM + 2EM \cdot FM,$$

nous obtiendrons d'abord

$$(AM + BM)^2 + (CM + DM)^2 + (EM + FM)^2 =$$
$$6R^2 - 2\delta^2 + 2(AM \cdot BM + CM \cdot DM + EM \cdot FM).$$

Mais

$$AM \cdot BM = CM \cdot DM = EM \cdot FM = R^2 - \delta^2;$$

donc

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{EF}^2 = 12R^2 - 8\delta^2.$$

Théorème XLII.

On peut toujours construire, avec un côté donné, un tétraèdre régulier.

Sur le côté donné, traçons un triangle équilatéral ABC. Par le centre O de ce triangle, élevons une perpendiculaire indéfinie, et prenons sur cette droite un point D tel, que AD = AB. Menons ensuite BD et CD. FIG. 328.

Le tétraèdre ABCD est régulier, car toutes ses arêtes sont égales entre elles. Donc, etc.

Théorème XLIII.

On peut toujours construire, avec un côté donné, un hexaèdre régulier.

Avec le côté donné, construisons un carré ABCD. Élevons, sur les côtés, des plans perpendiculaires au plan du carré ; puis coupons ceux-ci par un plan EFGH parallèle à ABCD, et qui en soit à une distance AE = AB. Nous obtiendrons ainsi un cube, c'est-à-dire un hexaèdre régulier. FIG. 329.

Théorème XLIV,

On peut toujours construire, avec un côté donné, un octaèdre régulier.

Avec le côté donné, traçons un carré ABCD. Élevons, par le centre O, la perpendiculaire EF au plan ABCD, et prenons OF = OF = OA. Joignons enfin les points E, F aux sommets du carré. La figure ABCDF est un octaèdre régulier. FIG. 330.

En effet, la droite EF est l'axe du cercle circonscrit au

G., 429. carré ABCD ; donc EA = FB = ... AB. Ainsi, toutes les faces de l'octaèdre sont des triangles équilatéraux, égaux entre eux.

De plus, les angles polyèdres sont égaux ; car si nous considérons, par exemple, les angles A, E, nous voyons qu'ils appartiennent aux pyramides régulières ABDEF, EABCD. Ces pyramides sont superposables, comme ayant même base et même hauteur. Donc, etc.

Théorème XLV.

On peut toujours construire, avec un côté donné, un dodécaèdre régulier.

Avec le côté donné, formons des pentagones réguliers, égaux entre eux. Assemblons trois de ces pentagones, de manière que leurs plans déterminent un angle trièdre ayant pour sommet le point A (fig. 331). Les faces de cet angle étant égales, les angles dièdres qu'elles forment seront égaux entre eux. Conséquemment, les angles trièdres B, A sont égaux, comme ayant un angle trièdre égal, compris entre deux faces égales, chacune à chacune, et semblablement disposées. Donc les droites BH, BC forment un angle égal à ABC.

Il résulte de là qu'après avoir assemblé, autour du point A, trois de nos pentagones réguliers, nous pourrons en apporter un quatrième dans l'angle HBC, puis un cinquième dans l'angle KCD, etc. Nous obtiendrons ainsi une surface polyédrale, ouverte suivant le contour FGHI...

Construisons une autre surface égale à la première (fig. 332), et rapprochons ces deux figures, de manière que l'angle *rentrant lmn* coïncide avec l'angle *saillant* FGH. Alors l'angle trièdre G sera égal à chacun des angles trièdres A, B..., et l'angle dièdre ayant *mnp*, GHB pour faces, et dont GH est l'arête, sera égal à l'angle dièdre ayant pour faces GHI, GHB, et pour arête GH. Donc *np* coïncidera avec HI, puis *pq* avec IK, etc.

On voit ainsi que l'ensemble des deux surfaces polyédrales détermine une figure fermée, ayant pour faces douze pentagones réguliers égaux, et dont les angles polyèdres sont égaux entre eux. Cette figure est donc un dodécaèdre régulier.

Théorème XLVI.

On peut toujours construire, avec un côté donné, un icosaèdre régulier.

Avec le côté donné, construisons un pentagone régulier MNPQR (fig. 333). Par le centre O élevons, au plan du pentagone, une perpendiculaire OS telle, que MS = MN.

Joignons le point S à tous les sommets du pentagone : nous obtiendrons ainsi une pyramide régulière dont les faces sont des triangles équilatéraux égaux entre eux.

Soit maintenant (fig. 334) le triangle équilatéral ABC, dont le côté est égal à MN.

Construisons, en chacun des sommets de ce triangle, une pyramide égale à S, en prenant, pour l'une des faces de cette pyramide, le triangle ABC.

Il est facile de voir que nous déterminons ainsi une surface polyédrale, ouverte suivant DEFGHI, et dans laquelle l'angle *rentrant* DEF est égal à l'angle *saillant* EFG, attendu que chacun d'eux est égal à l'angle EAC.

Si donc nous concevons une seconde surface égale à la première, nous pourrons faire coïncider ces deux figures suivant leurs *bords*, etc.

Théorème XLVII.

Il n'existe que cinq espèces de polyèdres réguliers.

Chaque angle d'un polyèdre régulier se forme en assemblant, autour d'un même point, plusieurs polygones réguliers égaux. Nous avons vu qu'en assemblant des triangles équilatéraux trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq, on obtient le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre ; qu'en assemblant des carrés trois à trois, on obtient l'hexaèdre; enfin, que des pentagones réguliers, réunis trois à trois, donnent le dodécaèdre.

Si l'on réunissait, autour d'un même point, six triangles équilatéraux, la somme des angles plans ayant ce point pour sommet commun serait égale à quatre droits ; donc ces six angles ne peuvent donner lieu à un angle polyèdre. A plus forte raison ne produira-t-on pas un pareil angle en assemblant plus de six triangles équilatéraux.

Le même raisonnement fait voir qu'on ne peut pas former d'angle polyèdre en réunissant plus de trois carrés, ou plus de trois pentagones réguliers, ou un nombre quelconque de polygones réguliers dans lesquels le nombre des côtés surpasserait cinq. Donc, etc.

Théorème XLVIII.

Tout polyèdre régulier est 1° inscriptible à une sphère; 2° circonscriptible à une sphère.

1° Considérons deux faces adjacentes A, B, et l'arête qui leur est commune. Menons, par les centres de ces faces, des perpendiculaires sur leurs plans respectifs, et des perpendiculaires à l'arête. Les deux dernières se coupent au milieu de cette droite ; donc les perpendiculaires aux deux faces sont situées dans un même plan, perpendiculaire au milieu de l'arête commune; donc elles se rencontrent en un point O, également éloigné de tous les sommets des faces A, B ; et elles forment, avec les deux autres perpendiculaires, un quadrilatère ayant deux angles droits.

Soit actuellement une troisième face C, adjacente à l'une des deux premières : si l'on répète, sur celle-ci et sur la face C, la construction précédente, on obtient un point O′ coïncidant avec O, attendu que les deux quadrilatères sont égaux.

Il résulte de là que le point O est également distant des sommets A, B, C. En continuant, on verra qu'il est également distant de tous les sommets ; donc ce point est le centre d'une sphère circonscrite au polyèdre régulier.

2° D'après ce qui vient d'être dit, le point O est également distant de deux faces adjacentes quelconques, et, par suite, également distant de toutes les faces. Donc ce point est le centre d'une sphère inscrite au polyèdre.

Remarques sur les polyèdres réguliers. Désignons, comme dans le Livre VI, par F, S, A le nombre des faces, le nombre des sommets et le nombre des arêtes d'un polyèdre. Nous aurons les valeurs suivantes :

Tétraèdre régulier :	$F = 4$,	$S = 4$,	$A = 6$;
Hexaèdre régulier :	$F = 6$,	$S = 8$,	$A = 12$;
Octaèdre régulier :	$F = 8$,	$S = 6$,	$A = 12$;
Dodécaèdre régulier :	$F = 12$,	$S = 20$,	$A = 30$;
Icosaèdre régulier :	$F = 20$,	$S = 12$,	$A = 30$.

On voit, à l'inspection de ce tableau, que l'on passe de l'hexaèdre à l'octaèdre, en remplaçant le nombre des faces par le nombre des sommets, et *vice versâ.* Ces deux polyèdres sont donc, en quelque sorte, *conjugués.* Il en est de même à l'égard du dodécaèdre et de l'icosaèdre. Quant au tétraèdre, comme ce corps a autant de faces que de sommets, il s'ensuit qu'il est conjugué à lui-même.

Cette considération des *polyèdres réguliers conjugués* parait justifiée par la proposition suivante, que nous nous contenterons d'énoncer.

Théorème XLIX.

1° Les centres des faces d'un polyèdre régulier sont les sommets d'un autre polyèdre régulier, conjugué du premier ;
2° Les sommets d'un polyèdre régulier sont les centres des faces d'un autre polyèdre régulier, conjugué du premier.

Theorème L.

Les milieux des arêtes d'un tétraèdre régulier sont les sommets d'un octaèdre régulier.

Théorème LI.

A tout hexaèdre régulier on peut inscrire un tétraèdre régulier, dont les sommets et les arêtes appartiennent aux sommets de l'hexaèdre et anx diagonales de ses faces.

FIG. 335. A l'inspection de la figure on reconnaît que les sommets B, D, G, E de l'hexaèdre sont ceux d'un tétraèdre régulier.

Remarque. Indépendamment de ce premier tétraèdre inscrit, il y en a un autre, dont les sommets H, F, A, C sont respectivement opposés aux premiers. Ces deux tétraèdres sont placés symétriquement par rapport au centre de l'hexaèdre.

Théorème LII.

A tout dodécaèdre régulier on peut inscrire un hexaèdre régulier, dont les sommets et les arêtes appartiennent aux sommets du dodécaèdre et aux diagonales de ses faces.

Reportons-nous à la construction indiquée ci-dessus (Th. XLV), et soit AB... PQ l'une des deux surfaces polyédrales ouvertes dont l'ensemble constitue le dodécaèdre régulier. Menons, dans les pentagones AH, AC, AP, BI, les diagonales FH, EC, FE, HC : nous formerons ainsi un quadrilatère FHCE ayant les côtés égaux. De plus, les diagonales FH, EC, parallèles à AB, sont parallèles entre elles ; et chacune d'elles est divisée en deux parties égales par le plan élevé perpendiculairement au milieu de AB ; d'où l'on conclut que les angles F, H, C, E sont droits. Donc FHCE est un carré. FIG. 336.

Menons CL, EN, LN : la figure ECLN sera un carré égal au premier. En effet, l'angle trièdre CEDL est égal à l'angle trièdre CHBL : donc la face ECL est égale à HCL ; etc.

Si nous considérons actuellement la seconde moitié de la surface du dodécaèdre, nous pourrons répéter les mêmes constructions, en choisissant, parmi les diagonales, celles qui aboutissent aux sommets F, H, L, N. Il y aura donc, sur chacune des deux parties de la surface du dodécaèdre, six arêtes d'un même cube ; etc.

Remarque. Chaque diagonale, telle que EC, prise arbitrairement sur une face ABCDE du dodécaèdre, détermine un hexaèdre inscrit. *Le nombre des hexaèdres réguliers inscrits à un dodécaèdre régulier donné est donc* égal au nombre des diagonales d'un pentagone, c'est-à-dire *égal à cinq.*

Problème I.

Déterminer le rayon d'une sphère solide donnée (*).

Problème II.

D'un point donné, comme pôle, décrire une circonférence de grand cercle.

Problème III.

Tracer une circonférence de grand cercle passant par deux points donnés.

Problème IV.

D'un point donné, mener un arc de grand cercle perpendiculaire à un arc donné.

Problème V.

D'un point donné, mener un arc de grand cercle coupant, sous un angle donné, la circonférence d'un grand cercle donné.

Problème VI.

Diviser, en deux parties égales, un arc de cercle donné.

Problème VII.

Diviser, en deux parties égales, l'angle formé par deux arcs de grands cercles donnés.

Problème VIII.

A un triangle donné, circonscrire une circonférence.

Problème IX.

A un triangle sphérique donné, inscrire une circonférence.

Remarque. Trois plans, menés par le centre d'une

(*) Les Problèmes dont nous donons seulement les énoncés sont faciles à résoudre, soit d'une manière directe, soit par la comparaison avec les Problèmes traités dans les Livres II et III.

sphère, déterminent en général, sur sa surface, *huit* triangles. Par conséquent, si l'on propose de *tracer une circonférence tangente à trois circonférences de grands cercles données*, le problème admet *huit* solutions.

Problème X.

Construire un triangle sphérique, connaissant deux côtés et l'angle compris.

Problème XI.

Construire un triangle sphérique, connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.

Problème XII.

Construire un triangle sphérique, connaissant les trois côtés.

Problème XIII.

Construire un triangle sphérique, connaissant un côté et les deux angles adjacents.

Au moyen du triangle polaire, on ramène ce problème au Problème X. La même considération permet de résoudre les deux questions suivantes.

Problème XIV.

Construire un triangle sphérique, connaissant deux angles et le côté opposé à l'un d'eux.

Problème XV.

Construire un triangle sphérique, connaissant les trois angles.

Problème XVI.

Par un point donné, mener un arc de grand cercle tangent à un petit cercle donné.

Problème XVII.

D'un point donné, comme pôle, décrire un cercle tangent à un cercle donné.

Problème XVIII.

Tracer une circonférence de grand cercle tangente à deux petits cercles donnés.

Remarque. La solution de cette question est tout à fait semblable à celle de ce problème de Géométrie plane : *Mener une tangente commune à deux cercles donnés.*

Problème XIX.

Tracer une circonférence tangente à deux cercles donnés et ayant un rayon sphérique donné.

Remarque. Ce problème admet, en général, *huit* solutions.

Problème XX.

Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés A, B et qui touche un cercle donné C.

Par les deux points donnés, faites passer une circonférence quelconque, coupant en D, E la circonférence du cercle donné. Tracez les sécantes sphériques AB, DE ; et, du point F, où elles se coupent, menez, au cercle C, des tangentes sphériques FG, FG′ : les points G, G′ sont les points où les deux circonférences qui satisfont à la question touchent la circonférence donnée.

(Voyez Prob. XXX, Liv. III.)

Problème XXI.

Décrire une circonférence qui passe par un point donné A, et qui touche deux arcs de grands cercles donnés.

(Voyez Prob. XXX. Liv. III.)

Problème XXII.

Décrire une circonférence I, qui passe par un point donné A, et qui touche deux petits cercles donnés B, C.

Nous savons (Th. XXXI) que l'arc de grand cercle mené par les points de contact inconnus M, N, passe par les foyers F, G des cercles donnés. Nous savons aussi que ces foyers sont les points où vont concourir les arcs de grands cercles, également inclinés sur les circonférences B, C.

Conséquemment, si les cercles donnés sont extérieurs l'un à l'autre, ou s'ils se coupent, nous leur mènerons deux tangentes sphériques communes (Prob. XVIII), lesquelles se rencontrent aux foyers cherchés.

Si les circonférences B, C sont intérieures l'une à l'autre, prenons les points K, L, où elles sont respectivement rencontrées par l'arc de grand cercle qui en joint les pôles ; puis, par ces points, faisons passer une circonférence coupant B, C aux points K′, L′ : l'arc de grand cercle K′L′ passe par les deux foyers (Th. XXX et XXXI).

Ces points, qui remplacent les centres d'homothétie de deux cercles situés dans un même plan, étant déterminés, la question s'achève aisément.

(Voyez Prob. XXXII, Liv. III.)

Problème XXIII.

Décrire une circonférence tangente à trois petits cercles donnés.

Première solution. Le problème se ramène à celui qui précède. (Voy. Prob. XXXVI, Liv. III, première solution.)

Seconde solution. Pour ne pas compliquer les constructions, servons-nous de la figure 178, relative au cas où les circonférences étaient dans un même plan. Cette figure plane n'est, en aucune façon, la projection de la figure sphérique, mais elle permettra au lecteur de se représenter, avec plus de facilité, des constructions qui devraient réellement *être effectuées dans l'espace.*

Soient donc A, B, C trois petits cercles situés sur la surface d'une sphère donnée; et, parmi les huit circonférences qui peuvent satisfaire à la question, considérons abc, qui touche extérieurement ces cercles, et $a'b'c'$, qui les touche intérieurement.

La droite aa', menée par les points de contact du cercle A avec les cercles cherchés, est une génératrice du cône (abc, $a'b'c'$) déterminé par ceux-ci (Th. XXXI). De même pour bb' et pour cc'. Ainsi, ces droites concourent en un même point o, centre ou sommet de ce cône. Et comme ces droites sont des cordes de la sphère, nous avons $oa.oa' = ob.ob' = oc.oc'$ (Th. XII); d'où il résulte encore que le sommet o est le point où se coupent les plans des cercles donnés (Th. XV). Si l'on suppose ce point o joint au centre de la sphère par une droite, celle-ci percera la surface sphérique en un point F (non représenté sur la figure), lequel est, tout à là fois, l'un des foyers des cercles cherchés (Th. XXXI), et le point d'où l'on peut mener, aux circonférences A, B, C, des tangentes sphériques égales (Th. XVII).

Les sommets m, m', m'' des cônes (A, B) (B, C) (C, A) sont situés sur la droite suivant laquelle se coupent les plans des cercles abc, $a'b'c'$ (Th. XXXII); et cette droite est le lieu des points d'égale puissance par rapport à ces cercles (Th. XV). Donc les tangentes en a et en a' doivent concourir en un point x situé sur cette ligne ; et il en est de même pour les tangentes aux points b, b', et pour les tangentes aux points c, c'.

La polaire du point x, relativement au cercle A, est la corde de contact aa'; donc le pôle p de $mm'm''$ doit se trouver sur cette corde.

De là, par le principe de la projection conique, on conclut que *le point conjugué de la circonférence de grand cercle* mm'm'', *relativement au cercle directeur* A, *est situé sur la circonférence de grand cercle passant par les points de contact* a, a'.

Donc : 1° *Construisez les foyers des cercles donnés, pris deux à deux ;* 2° *tracez la circonférence de grand cercle passant par trois de ces foyers;* 3° *cherchez les points conjugués de cette ligne, par rapport à chaque cercle;* 4° *joignez, par des arcs de grands cercles, ces points conjugués, au point* F *d'où l'on peut mener, aux cercles* A, B, C, *des tangentes sphériques égales : les intersections de ces arcs avec les circonférences données sont les points de contact cherchés.*

(Voyez Prob. XXXVI, Liv. III.)

Problème XXIV.

Quel est le lieu géométrique des sommets C des triangles sphériques construits sur une base donnée AB, et dans lesquels la différence entre la somme des angles à la base et l'angle au sommet est constante?

Soit P le pôle du petit cercle passant par les sommets A, B, C. Si nous menons les arcs de grands cercles PA, PB, PC, nous décomposons le triangle ABC en trois triangles isoscèles. Or, E étant l'excès donné, et α, β, γ étant les angles à la base dans ces trois triangles, l'égalité FIG. 337.

$$\mathrm{CAB} + \mathrm{CBA} - \mathrm{ACB} = \mathrm{E}$$

équivaut à

$$\beta + \gamma + \alpha + \gamma - (\beta + \alpha) = \mathrm{E};$$

d'où

$$\gamma = \frac{1}{2}\mathrm{E}.$$

Ainsi, le triangle isoscèle APB est déterminé, c'est-à-dire que le lieu cherché est l'arc de petit cercle dont P est le pôle, et qui passe par les extrémités A, B, de la base donnée.

Problème XXV.

Quel est le lieu géométrique des sommets C des triangles sphériques de même base AB et de même surface ?

FIG. 338. En représentant par m le rapport du triangle ABC au triangle trirectangle, et en prenant pour unité l'angle droit, nous aurons

$$A + B + C - 2 = m.$$

Prolongeons les côtés AC, BC jusqu'à ce qu'ils rencontrent la circonférence ABA'B', aux points A', B' ; nous formons un triangle A'B'C, dans lequel les angles A', B' sont les suppléments respectifs des angles A, B. L'égalité précédente devient donc

$$2 - A' + 2 - B' + C - 2 = m,$$

ou

$$A' + B' - C = 2 - m.$$

Ainsi, la différence entre l'angle C et la somme des angles A', B' est constante ; donc le point C décrit un arc de petit cercle passant par les points A', B'. C'est-à-dire que *le lieu géométrique des sommets des triangles sphériques de même base et de même surface est un arc de petit cercle passant par les points diamétralement opposés aux extrémités de la base* (*).

(*) Cette proposition est connue sous le nom de *Théorème de Lexell*. La démonstration ci-dessus, remarquable par la simplicité, est due à Steiuer. (Voyez *Journal de Liouville*, tome VI.)

Problème XXVI.

Étant donné le côté c d'un polyèdre régulier, trouver le rayon R de la sphère circonscrite et le rayon r de la sphère inscrite.

Tétraèdre. On sait que les perpendiculaires abaissées des sommets A, D, sur les faces opposées, se coupent en un point O, situé aux trois quarts de chacune d'elles, à partir du sommet correspondant. D'ailleurs, ce point O est le centre commun de la sphère inscrite et de la sphère circonscrite ; ainsi FIG. 339. G., p 281.

$$R = 3r.$$

De plus, dans le triangle rectangle OGD,

$$\overline{OD}^2 - \overline{OG}^2 = \overline{GD}^2,$$

ou

$$R^2 - r^2 = \left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)^2.$$

Ces deux équations donnent

$$R = \frac{1}{4} c\sqrt{6}, \qquad r = \frac{1}{12} c\sqrt{6}.$$

Hexaèdre. Évidemment

$$R = \frac{1}{2} c\sqrt{3}, \qquad r = \frac{1}{2} c.$$

Octaèdre. Les droites OA, OB, OC sont perpendiculaires entre elles et égales à R. Donc FIG. 340

$$c = R\sqrt{2},$$

ou

$$= \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Si nous menons OG perpendiculaire à ABC, cette droite est le rayon de la sphère inscrite à l'octaèdre nous avons donc, comme ci-dessus,

$$R^2 - r^2 = \frac{1}{3} c^2;$$

d'où

$$r = \frac{c}{\sqrt{6}}.$$

FIG. 341. *Dodécaèdre* Dans un pentagone régulier ABCDE dont c est le côté, menons le rayon $OB = R'$ et la diagonale $AC = d$. D'après le Théorème I du Livre IV, le côté c est égal au plus grand segment de la diagonale d, partagée en moyenne et extrême raison ; donc

$$c = \frac{1}{4} d(\sqrt{5} - 1).$$

Cela posé, assemblons trois triangles égaux à ABC. Nous obtiendrons un tétraèdre CABH (fig. 342), dans lequel l'angle trièdre B est l'un de ceux du dodécaèdre (Th. XLV). Si donc nous abaissons BLI perpendiculaire à CAH ; si, sur BF nous prenons $BO = R'$; et si enfin nous menons OI perpendiculaire à ABC, le point I sera le centre du dodécaèdre.

Les triangles BLF, BOI donnent

$$\frac{BF}{BI} = \frac{FL}{OI},$$

$$\frac{BF}{R} = \frac{FL}{r}.$$

Pour évaluer le rapport de BF à FL, observons que

$$BF = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AF}^2} = \sqrt{c^2 - \frac{1}{4} d^2},$$

et que

$$\mathrm{FL} = \frac{1}{3}\,\mathrm{FH} = \frac{1}{2}\,d\sqrt{3}.$$

Donc

$$\frac{\mathrm{R}}{r} = \frac{\sqrt{c^2 - \frac{1}{4}\,d^2}}{\frac{1}{6}\,d\sqrt{3}};$$

puis, en remplaçant c par sa valeur :

$$\frac{\mathrm{R}}{r} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2-1}}{\frac{1}{3}\sqrt{3}} = \sqrt{3\,(5-2\sqrt{5})}.$$

Le triangle BOI donne ensuite

$$\overline{\mathrm{BI}}^2 - \overline{\mathrm{OI}}^2 = \overline{\mathrm{BO}}^2,$$

ou

$$\mathrm{R}^2 - r^2 = \mathrm{R}'^2$$

Le rayon R′ du cercle circonscrit au pentagone régulier a pour valeur $\dfrac{2c}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$: la dernière équation devient, G, 345.
en vertu de la précédente,

$$(14 - 6\sqrt{5})\,r^2 = \frac{2c^2}{5-\sqrt{5}};$$

d'où

$$r^2 = \frac{c^2}{(7-3\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} = \frac{c^2\,(25+11\sqrt{5})}{40}.$$

Nous avons donc

$$r = \frac{1}{2}\,c\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}};$$

et, par suite,

$$\mathrm{R} = \frac{1}{4}\,c\,(\sqrt{15}+\sqrt{3}).$$

Icosaèdre. Construisons, avec c pour côté, un pentagone régulier ABCDE (fig. 343). Prenons cette figure pour base d'une pyramide régulière ayant G pour sommet, et dans laquelle l'arête aussi soit égale à c. Enfin, par le centre I du triangle équilatéral AGB, élevons, au plan de ce triangle, la perpendiculaire IO coupant en O la hauteur GF. Le point O sera le centre de l'icosaèdre.

Cela posé, si nous abaissons GH perpendiculaire à AB, et si nous menons HF, les triangles GIO, GHF donneront

$$\frac{\mathrm{GO}}{\mathrm{GH}} = \frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{FH}},$$

Or,

$$\mathrm{GO} = \mathrm{R}, \quad \mathrm{IO} = r, \quad \mathrm{CH} = \frac{1}{2} c\sqrt{3}.$$

De plus, la droite HF, apothème du pentagone régulier ABCDE, a pour expression

$$\frac{1}{2} c \, \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}.$$

Remplaçant donc les lignes par leurs valeurs, dans la proportion ci-dessus, nous obtiendrons

$$\frac{\mathrm{R}}{r} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}.$$

Nous avons aussi, comme précédemment,

$$\mathrm{R}^2 - r^2 = \overline{\mathrm{IO}}^2 = \frac{1}{3} c^2.$$

Ces deux équations donnent, par un calcul facile,

$$r = \frac{1}{3} c \, \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \qquad \mathrm{R} = \frac{1}{2} c \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

Problème XXVII.

Connaissant le rayon R d'une sphère, trouver le côté c d'un polyèdre régulier inscrit, et le rayon r de la sphère inscrite à ce polyèdre.

Si l'on résout, par rapport à c et à r, les formules trouvées dans le Problème XXVI, on arrive aux résultats suivants :

Tétraèdre. $c = \frac{2}{3} R \sqrt{6}, \quad r = \frac{1}{3} R.$

Hexaèdre. $c = \frac{2}{3} R \sqrt{3}, \quad r = \frac{1}{3} R \sqrt{3}.$

Octaèdre. $c = R \sqrt{2}, \quad r = \frac{1}{3} R \sqrt{3}.$

Dodécaèdre. $c = \frac{1}{3} R (\sqrt{15} - \sqrt{3}), \quad r = R \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}.$

Icosaèdre. $c = \frac{1}{5} \sqrt{10 (5 - \sqrt{5})}, \quad r = R \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}.$

Remarque. Le rayon de la sphère inscrite ayant la même valeur pour le dodécaèdre et pour l'icosaèdre, on voit que, si ces polyèdres sont inscrits à une même sphère, ils seront circonscrits aussi à une même sphère. La même propriété subsiste pour l'hexaèdre et l'octaèdre. Ces deux résultats confirment ce que nous avons dit sur les polyèdres conjugués.

Problème XXVIII.

Trouver l'aire A et le volume V d'un polyèdre régulier inscrit à une sphère de rayon R.

Nous venons d'exprimer, en fonction de R, le côté c du polyèdre régulier ; si donc nous désignons par a l'aire de chacune des faces, nous trouverons, par les formules connues, les valeurs suivantes : G., 349.

Tétraèdre. $a=\frac{1}{4}c^2\sqrt{3}=R^2\sqrt{3}$; $\quad A=\frac{8}{3}R^2\sqrt{3}$.

Hexaèdre. $a=c^2=\frac{4}{3}R^2$; $\quad A=8R^2$.

Octaèdre. $a=\frac{1}{4}c^2\sqrt{3}=\frac{1}{2}R^2\sqrt{3}$; $\quad A=4R^2\sqrt{3}$.

Dodécaèdre. $a=\frac{5}{4}c^2\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$

$$=\frac{1}{6}R^2\sqrt{10(5-\sqrt{5})};\quad A=2R^2\sqrt{10(5-\sqrt{5})}.$$

Icosaèdre. $a=\frac{1}{4}c^2\sqrt{3}=\frac{1}{10}R^2(5\sqrt{3}-\sqrt{15})$;

$$A=2R^2(5\sqrt{3}-\sqrt{15}).$$

Multiplions actuellement la valeur de A par $\frac{1}{3}r$; nous aurons le volume V du polyèdre, savoir :

Tétraèdre. $V=\frac{8}{3}R^2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{9}R=\frac{8}{27}R^3\sqrt{3}$.

Hexaèdre. $V=8R^2\frac{1}{9}R\sqrt{3}=\frac{8}{9}R^3\sqrt{3}$.

Octaèdre. $V=4R^2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{9}R\sqrt{3}=\frac{4}{3}R^3$.

Dodécaèdre. $V=2R^2\sqrt{10(3-\sqrt{5})}\cdot\frac{1}{3}R\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$

$$=\frac{2}{9}R^3\sqrt{30(3+\sqrt{5})}.$$

Icosaèdre. $V=2R^2(5\sqrt{3}-\sqrt{15})\cdot\frac{1}{3}R\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$

$$=\frac{2}{3}R^3\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Problème XXIX.

Une sphère variable S se meut en touchant continuellement trois sphères fixes A, B, C, données de grandeur et de position. Quelle est la courbe décrite, sur chacune de celles-ci, par son point de contact avec la sphère mobile?

Soient a, b, c les points où la sphère S, considérée dans une quelconque de ses positions, touche respectivement les sphères A, B, C ; et, pour fixer les idées, supposons que celles-ci soient, deux à deux, extérieures l'une à l'autre, et que la sphère S les touche extérieurement.

Le point a est évidemment le centre de similitude *inverse* des sphères S, A; de même, b est le centre de similitude *inverse* des sphères S, B ; donc la droite ab passe par le centre de similitude *directe* des sphères A, B (Liv. III et Liv. VI).

Pour la même raison, la droite bc passe par le centre de similitude directe des sphères B, C, et la droite ca passe par le centre de similitude directe des sphères C, A. Donc le plan des trois points de contact a, b, c passe par l'axe de similitude directe des sphères données. Il est évident, en outre, que ce plan coupe les quatre sphères suivant des cercles tels, que celui qui appartient à S touche les trois autres.

Soient (fig. 178) abc, $a'aa''$, $bb'b''$, $cc'c''$ ces quatre cercles. Soient, de plus, m, m', m'' les centres de similitude dont il vient d'être question : ces points sont, en même temps, les centres de similitude des trois derniers cercles, considérés deux à deux.

Le point de contact a est sur la droite qui joint le centre radical o de ces mêmes cercles au pôle p de leur axe de similitude, ce pôle étant relatif au cercle $aa'a''$ (Liv. III, (Prob. XXXVI). Or, le lieu décrit par le point p, quand le plan de la figure tourne autour de l'axe $mm'm''$, est la droite réciproque de cet axe (Th. VII); et, d'un autre côté, il est clair que le lieu du centre radical o est l'axe radical des sphères A, B, C. Conséquemment, le lieu du point a est la circonférence suivant laquelle le plan de ces deux droites coupe la sphère A.

Les mêmes raisonnements s'appliqueraient aux lieux décrits par les points b et c. On a donc ce théorème :

Quand une sphère variable S *se meut en touchant continuellement trois sphères fixes* A, B, C, *le lieu décrit sur chacune de celles-ci, par son point de contact avec la première sphère, est un petit cercle dont le plan est perpendiculaire à celui qui contient les centres des trois sphères données* (*).

(*) Cette propriété remarquable a été découverte par Dupuis, ancien élève de l'École polytechnique, mort au commencement de ce siècle.

LIVRE VIII.

Problème I.

Un demi-décagone régulier, dont le côté est c, tourne autour du diamètre du cercle inscrit. Quel est le volume V du corps engendré?

Ce corps se compose de celui qui est engendré par le secteur polygonal régulier OBCDEFO, augmenté des cônes engendrés par OAB et OGF. FIG. 344.

Or,

$$\text{vol. OB...FO} = 2\pi\text{OA} \,.\, 2\text{OA} \,.\, \frac{1}{3}\,\text{OA} = \frac{4}{3}\,\pi\overline{\text{OA}}^3,$$

$$\text{vol. OAB} = \text{vol. OGF} = \frac{1}{3}\,\pi\overline{\text{AB}}^2 \,.\, \text{OA}\,;$$

donc, en appelant a l'apothème OA, nous avons

$$V = \frac{1}{4}\,\pi a^3 + \frac{1}{6}\,\pi a c^2.$$

Dans le décagone régulier, le rapport de l'apothème au côté est

$$\frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,;$$

donc

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{12}\,\pi c^3 \left[2\,(5 + 2\sqrt{5}) + 1\right] \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{12}\,\pi c^3 \,(11 + 4\sqrt{5})\,\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,; \end{aligned}$$

ou, en effectuant,

$$V = \frac{1}{12}\,\pi c^3 \sqrt{1885 + 842\sqrt{5}}\,.$$

L'expression du volume, en fonction de l'apothème a, serait bien moins compliquée.

Car

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3 + \frac{2}{3}\pi a^3 \frac{1}{5+2\sqrt{5}} = \frac{4}{3}\pi a^3 + \frac{2}{15}\pi a^3 (5-2\sqrt{5}),$$

ou

$$V = \frac{2}{15}\pi a^3 (15 - 2\sqrt{5}).$$

Problème II.

A une demi-circonférence ADB, on mène une tangente DC; après quoi l'on fait tourner la ligne AFDC autour de ABC. Comment doit-on prendre la tangente pour que la surface conique engendrée par cette droite ait un rapport donné m avec la surface de la zone engendrée par AFD?

FIG. 345. D'après l'énoncé, on doit avoir

$$\frac{CD \cdot DE}{2R \cdot AE} = m,$$

R étant le rayon de la sphère.

Menons le rayon OD : les triangles CDE, DOE donnent

$$\frac{CD}{OD} = \frac{DE}{OE};$$

d'où

$$CD = R\,\frac{DE}{OE},$$

puis

$$\frac{\overline{DE}^2}{2AE \cdot OE} = m.$$

Mais

$$\overline{DE}^2 = AE \cdot BE;$$

donc

$$\frac{BE}{OE} = 2m.$$

Pour résoudre le problème, on doit donc partager le rayon OB en deux segments BE, OE, dont le rapport soit double du rapport donné ; etc.

Problème III.

Quelle est l'étendue A de la partie de la surface du globe, visible pour un aéronaute placé à une hauteur h au-dessus du sol?

Si l'on conçoit un cône DCG circonscrit à la sphère terrestre O, et dont le sommet C soit l'œil de l'observateur, le petit cercle DG séparera la zone visible DBG de la zone invisible DAG. Nous aurons donc, en désignant par R le rayon de la terre, et par x la hauteur BE de la zone cherchée, FIG. 345.

$$A = 2\pi R x.$$

Menons le rayon OD ; nous aurons aussi, dans le triangle rectangle CDO :

$$R^2 = (R - x) \quad (R + h).$$

Cette équation donne

$$x = \frac{Rh}{R + h};$$

d'où

$$A = 2\pi R h \frac{R}{R + h}. \qquad (1)$$

Pour réduire en nombres cette formule, on observera que la circonférence de la terre, supposée sphérique, est égale à *quarante millions* de mètres, et que, la hauteur h étant presque toujours une petite fraction du rayon terrestre, on peut, du moins pour une première approximation, négliger h dans le diviseur. On a donc, à fort peu près,

$$A = 40\,000\,000\,h \text{ mètres carrés,}$$

ou

$$A = (4\,000h) \text{ hectares,} \qquad (2)$$

la lettre h représentant maintenant le *rapport* entre la hauteur donnée et le mètre.

Pour obtenir une valeur plus approchée, il suffit de remplacer

$$\frac{R}{R+h} = \frac{1}{1+\frac{h}{R}} = 1 - \frac{h}{R} + \left(\frac{h}{R}\right)^2 - \ldots,$$

par ce développement limité à un certain terme, au deuxième, par exemple.

Comme application, supposons $h = 5\,000$: la formule (2) donne

$$A = 20\,000\,000 \text{ hectares.}$$

Cette valeur est trop grande : pour la corriger, il faut la multiplier par $1 - \frac{h}{R}$. Or,

$$R = \frac{40\,000\,000}{2\pi} = \frac{20\,000\,000}{\pi};$$

donc

$$\frac{h}{R} = \frac{\pi \,.\, 5\,000}{20\,000\,000};$$

donc

$$A = (20\,000\,000 - 5000\pi) \text{ hectares} = 19\,984\,292 \text{ hect.}$$

Cherchons à quelle hauteur l'aéronaute devrait s'élever pour apercevoir une zone terrestre équivalente à la surface de la France. D'après *Bravais* (*), la superficie de notre territoire est de 52 768 600 hectares ; donc,

(*) *Patria*, tome 1er, page 2. Cette évaluation, faite autrefois par mon savant et regrettable camarade, n'est malheureusement plus exacte !

par la formule (2),

$$h = \frac{52\,768\,600}{4\,000} = 13\,192.$$

Pour avoir une valeur plus approchée, résolvons, par rapport à h, l'équation (1); nous aurons

$$h = \frac{AR}{2\pi R^2 - A};$$

d'où, à fort peu près,

$$h = \frac{A}{2\pi R}\left(1 + \frac{A}{2\pi R^2}\right).$$

Le facteur $\frac{A}{2\pi R}$ est précisément la valeur de h que nous avons obtenue tout à l'heure; donc

$$h = 13192\left(1 + \frac{13\,192}{R}\right) = 13192\left(1 + \frac{13\,192\pi}{20\,000\,000}\right)$$

$$= 13\,192 + \frac{13\,192^2 . \pi}{20\,000\,000} = 13\,192 + y.$$

On a

$$\begin{array}{lcl} \log 13\,192 & = & 4,1203106 \\ \hline 2 \log 13\,192 & = & 8,2406212 \\ + \log \pi & = & 0,4971499 \\ - \log 20\,000\,000 & = & -\ 7,3010300 \\ \hline \log y & = & 1,4367411 \end{array}$$

$$y = 27, \ldots$$
$$h = 13219.$$

Ainsi, pour embrasser dans son horizon toute la France, l'aéronaute devrait s'élever à une hauteur d'environ 13219 mètres.

Problème IV.

Par les extrémités de deux rayons OB, OC, on mène les tangentes BA, CA, lesquelles se coupent en A. On propose d'exprimer, en fonction du rayon R et de la projection BE de l'arc CFB, les volumes des corps engendrés par le triangle BOC, par le segment BCF, et par le triangle BACF, lorsque ces trois figures tournent autour du rayon OB.

FIG. 346. Menons OB : cette droite est perpendiculaire au milieu de la corde BC. Soient ensuite $CE = x$, $AB = y$, $BE = h$.

Nous aurons d'abord :

$$\text{vol. BOC} = v = \frac{1}{3}\pi R x^2\,;$$

$$\text{vol. BCF} = v' = \frac{2}{3}\pi R^2 h - v\,;$$

$$\text{vol. BACF} = v'' = \text{vol. BACE} - \text{vol. BFCE}$$

$$= \frac{1}{3}\pi h\,(x^2 + xy + y^2) - \frac{1}{2}\pi x^2 h - \frac{1}{6}\pi h^3.$$

En second lieu, la perpendiculaire CE est moyenne proportionnelle entre les deux segments du diamètre ; donc

$$x^2 = h\,(2R - h).$$

De plus,

$$\frac{AB}{B} = \frac{BG}{EC},$$

ou

$$y = \frac{\overline{BC}^2}{2CE} = \frac{Rh}{x}.$$

Par suite :

$$v = \frac{1}{3}\pi R h\,(2R - h), \qquad v' = \frac{1}{3}\pi R h^2,$$

$$v'' = \frac{1}{3}\pi\frac{R^2h^2}{2R - h}.$$

Remarque. Si $h = R$, auquel cas les rayons OB, OC

OC sont perpendiculaires entre eux, on a

$$v = v' = v'' = \frac{1}{3}\pi R^3.$$

Ainsi, dans ce cas particulier, les trois corps proposés sont équivalents entre eux, et chacun d'eux est le quart de la sphère.

Problème V.

Calculer le volume d'une lentille biconvexe ACBC′, connaissant son épaisseur CC′, et les rayons R, R′ des sphères O, O′ qui en forment les deux faces.

Si la figure CAC′ tourne autour de OO′, les demi-segments circulaires CAD, C′AD engendrent deux segments sphériques, dont l'ensemble constitue la lentille. FIG. 347.

Désignons par h, h' les hauteurs CD, C′D, et par V le volume cherché ; nous aurons d'abord

$$V = \frac{1}{2}\pi\overline{AD}^2(h + h') + \frac{1}{6}\pi(h^3 + h'^3),$$ G., 757.

ou

$$V = \frac{1}{6}\pi(h + h')\left[3\overline{AD}^2 + h^2 + h'^2 - hh'\right]. \quad (1)$$

En second lieu,

$$\overline{AD}^2 = h(2R - h) = h'(2R' - h'); \quad (2)$$

d'où

$$\frac{h}{2R' - h'} = \frac{h'}{2R - h}. \quad (3)$$

Représentant par e l'épaisseur de la lentille, nous tirons, de cette proportion,

$$\frac{h}{2R' - e + h} = \frac{h'}{2R - e + h'};$$

puis

$$\frac{h}{2R' - e} = \frac{h'}{2R - e} = \frac{e}{2(R + R' - e)}.$$

Conséquemment,

$$h = \frac{(2R' - e)\, e}{2\,(R + R' - e)}, \qquad h = \frac{(2R - e)\, e}{2\,(R + R' - e)}. \quad (4)$$

La proportion (3) donne encore

$$\frac{h}{2R' - h'} = \frac{e}{2\,(R + R') - e}.$$

Donc

$$\overline{AD}^2 = h'\,(2R' - h') = \frac{(2R + 2R' - e)\, hh'}{e}.$$

Au moyen de cette valeur, et de $h + h' = e$, la formule (1) devient

$$V = \frac{1}{6}\pi\,[6\,(R + R')\, hh' - 4ehh' + e\,(h^2 + h'^2)],$$

ou

$$V = \frac{1}{6}\pi\,[6\,(R + R' - e)\, hh' + e^3].$$

D'ailleurs, à cause des formules (4),

$$hh' = \frac{(2R - e)\,(2R' - e)\, e^2}{4\,(R + R' - e)^2};$$

Donc enfin

$$V = \frac{1}{12}\pi\,\frac{e^2}{R + R' - e}\,[12RR' - 4\,(R + R')\, e + e^2].$$

Problème VI.

Un cône est circonscrit à deux sphères de rayons R et R′, tangentes extérieurement. Quel est le volume de l'espace compris entre les trois surfaces ?

FIG. 348. Par la ligne des centres, faisons passer un plan quelconque : il coupe les sphères suivant des circonférences OC, O′C tangentes en C, et la surface du cône suivant une droite AA′, tangente aux deux circonférences.

Le volume V qu'il s'agit d'évaluer est celui du corps engendré par la figure ACA'. Or, si nous abaissons AB, A'B' perpendiculaires à la ligne des centres, nous aurons, en retranchant du tronc de cône engendré par ABA'B' les segments engendrés par ABC, A'B'C :

$$V = \frac{1}{3}\pi BB'\left(\overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2 + AB \cdot A'B'\right)$$
$$-\frac{1}{2}\pi\left(\overline{AB}^2 \cdot BC + \overline{A'B'}^2 \cdot B'C\right) - \frac{1}{6}\pi\left(\overline{BC}^3 + \overline{B'C}^3\right).$$

Menons, par le centre O', la parallèle O'D à la tangente commune AA' : l'angle D est droit; par conséquent, les triangles AOB, O'OD sont semblables; et

$$OB = OD\frac{OA}{OO'} = R\frac{R - R'}{R + R'}.$$

Cette valeur de OB donne

$$\overline{AB}^2 = 4\frac{R^3R'}{(R+R')^2}, \quad \overline{A'B'}^2 = 4\frac{RR'^3}{(R+R')^2},$$
$$BC = \frac{2RR'}{R+R'}, \quad B'C = \frac{2RR'}{R+R'} = BC;$$

puis

$$V = \frac{4}{3}\pi\frac{R^2R'^2}{(R+R')^3}\left[4(R^2+R'^2+RR') - 3(R^2+R'^2) - 2RR'\right];$$

ou enfin

$$V = \frac{4}{3}\pi\frac{R^2R'^2}{R+R'}.$$

Remarque. Nous avons trouvé, par le calcul, $BC = B'C$: il est facile de vérifier, géométriquement, que ces deux segments sont égaux.

Problème VII.

Le *litre*, qui sert à mesurer les liquides, est un cylindre dans lequel la hauteur est double du diamètre de la base, et dont la capacité est de 1 décimètre cube. Calculer, à moins de $\frac{1}{10}$ de millimètre, les dimensions de ce corps.

Prenons pour unité le décimètre, et représentons par h la hauteur du cylindre ; nous aurons

$$1 = \pi\left(\frac{h}{4}\right)^2 h,$$

d'où

$$h = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}}$$

Il s'agit de calculer cette expression, à moins de $\frac{1}{1000}$ d'*unité*.

Multiplions les deux membres par 1000 : nous aurons

$$1\,000\,h = \sqrt[3]{16\,000\,000\,000 \times \frac{1}{\pi}}\ ;$$

nombre, qu'il faut évaluer à moins d'*une* unité.

Le rapport du *diamètre à la circonférence*, représenté par $\frac{1}{\pi}$, est compris entre 0,3 183 098 et 0,3 183 099 : si nous adoptons le premier nombre, nous aurons

$$16\,000\,000\,000 \times \frac{1}{\pi} = 5\,092\,956\,800.$$

Cette valeur peut différer de la véritable, d'environ 1 600 unités. Mais cette erreur n'influe pas sur la racine cubique, attendu que celle-ci a quatre chiffres (*).

Extrayant donc la racine du plus grand cube contenu

(*) Voyez le *Manuel d'Arithmétique*.

dans $5\,092\,956\,800$, on trouve $1\,000\,h = 1\,720$; d'où

$$h = 1^{d},720 = 172^{mm},0.$$

Ainsi, la hauteur du litre $= 172^{mm},0$; et le rayon de la base $= 43^{mm},0$.

Pour vérifier les calculs précédents, opérons par logarithmes ; nous trouvons

$$\begin{array}{rl} \log 16 = & 1,2041200 \\ -\log \pi = & -0,4971499 \\ \hline & 0,7069701 \\ \frac{1}{3} = & 0,2356567 = \log h \\ h = & 1,7205. \end{array}$$

Problème VIII.

Les angles d'un triangle sphérique sont, respectivement,

$$A = 48°18', \quad B = 63°12', \quad C = 73°24' ;$$

le rayon de la sphère est $R = 0^{m},19$. Calculer, à moins de 1 millimètre carré, la surface du triangle.

En prenant pour unités l'angle droit et le triangle trirectangle, on a, pour mesure du triangle, G.. 745.

$$T = A + B + C - 2.$$

D'après les données, la somme des trois angles est 184°54 ; donc

$$T = \frac{184 + \frac{54}{60}}{90} - 2 = \frac{49}{900}.$$

Ainsi, le triangle proposé est équivalent aux $\frac{49}{900}$ du triangle trirectangle.

D'un autre côté, le centimètre étant pris pour unité, G.. 742. l'aire de la sphère est $4\pi\,(19)^2$; celle du triangle trirectangle est donc $\frac{1}{2}\,\pi\,(19)^2$. Par suite, l'aire du triangle proposé a pour valeur

$$a = \pi\,\frac{361\,.\,49}{1800}.$$

En opérant par logarithmes, on trouve

$$\begin{array}{rcl}
\log \pi & = & 0{,}49714987 \\
\log 361 & = & 2{,}55750720 \\
\log 49 & = & 1{,}69019608 \\
-\log 1800 & = & -\,3{,}25527251 \\
\hline
\log a & = & 1{,}48958064 \\
a & = & 30{,}873...
\end{array}$$

La surface du triangle est donc d'environ 3 087 millimètres carrés.

Problème IX.

Circonscrire, à une sphère donnée, un cône droit dont la surface totale soit équivalente à celle d'un cercle donné (*).

FIG. 349. Coupons les deux surfaces par un plan quelconque, passant suivant l'axe du cône : nous obtiendrons, pour sections, un triangle isoscèle ASB, et un grand cercle CDE, inscrit à ce triangle; en sorte que les deux corps dont il s'agit sont engendrés par le triangle rectangle CAS et le demi-cercle CDF, tournant autour de SC.

Représentons par R, a, x, y, z le rayon OC de la sphère, le rayon du cercle donné, le rayon AC de la base,

(*) Ce problème appartient, à proprement parler, à l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie*. La même remarque s'applique à quelques-uns des problèmes suivants.

la hauteur SC, et l'apothème AS du cône ; nous aurons d'abord

$$x(x+z)=a^2. \qquad (1)$$

Les triangles semblables ACS, ODS donnent

$$\frac{AC}{OD}=\frac{AS}{OS},$$

ou

$$\frac{x}{R}=\frac{z}{y-R}. \qquad (2)$$

En considérant les mêmes triangles, et en observant que la tangente SD est moyenne proportionnelle entre SC et SE, nous aurons encore

$$\frac{x}{R}=\frac{y}{\sqrt{y(y-2R)}};$$

d'où

$$x^2=R^2\frac{y}{y-2R}. \qquad (3)$$

La relation (2) donne

$$z=\frac{xy}{R}-x.$$

Au moyen de cette valeur, l'équation (1) devient $\frac{x^2y}{R}=a^2$; et, à cause de l'équation (3),

$$\frac{Ry^2}{y-2R}=a^2;$$

d'où enfin

$$y\left(\frac{a^2}{R}-y\right)=2a^2.$$

La somme des deux facteurs du premier membre est $\frac{a^2}{R}$; leur produit est $2a^2$. Il faut donc, pour trouver la hauteur SC du cône, construire un rectangle équivalent à $2a^2$, et dans lequel la somme des deux dimensions soit $\frac{a^2}{R}$. La question est ainsi ramenée à un problème connu.

Remarques. I. Pour que le problème soit possible, on on doit avoir

$$\frac{a^4}{4R^2} \overline{\overline{>}} 2a^4,$$

ou

$$a^2 \overline{\overline{>}} 8R^2.$$

Si $a^2 = 8R^2$, $y = \frac{a^2}{2R} = 4R$; et la surface du cône est un minimum.

II. Lorsque $y = 4R$, les équations (3) et (2) donnent

$$x = R\sqrt{2}, \quad z = 3R\sqrt{2}.$$

Conséquemment, le cône de surface minimum, circonscrit à une sphère donnée, jouit des propriétés suivantes :

1° *La hauteur est double du diamètre de la sphère ;*

2° *L'apothème est triple du rayon de la base ;*

3° *La surface est double de la surface de la sphère ;*

4° *Le volume est double du volume de celle-ci.*

En général, si un polygone ABCD, circonscrit à une demicirconférence EF et limité par un diamètre XY, tourne autour de celui-ci, le volume V du corps engendré et le volume V′ de la sphère sont respectivement égaux aux aires correspondantes A, A′, multipliées chacune par le tiers du rayon OE. Donc

$$\frac{V}{V'} = \frac{A}{A'}.$$

Problème X.

Couper une sphère par un plan, de manière que le segment sphérique CAD ait, avec le secteur sphérique correspondant CADO, un rapport donné *m*.

FIG. 351. Représentons par R, x, y le rayon de la sphère, la hauteur AE du segment et le rayon CE de sa base.

Nous aurons

$$\frac{\frac{1}{2}\pi y^2 x + \frac{1}{6}\pi x^3}{\frac{2}{3}\pi R^2 x} = m\,;$$

ou, en simplifiant,

$$4y^2 + x^2 = 4R^2 m. \qquad (1)$$

D'un autre côté, la perpendiculaire CE est moyenne proportionnelle entre les segments AE, BE du diamètre ; donc

$$y^2 = x\,(2R - x) \qquad (2)$$

La substitution de cette valeur donne l'équation du second degré

$$x^2 - 3Rx + 2R^2 m = 0, \qquad (3)$$

dont on construira facilement les racines. Quant à la discussion de cette équation, elle dépasse les limites que nous avons dû nous prescrire. La même observation s'applique aux problèmes qui suivent.

Problème XI.

A une sphère donnée, inscrire un cylindre ayant un rapport donné m avec la somme des deux segments sphériques adjacents.

Soient R le rayon de la sphère, x le rayon EC de la base du cylindre, y la moitié OE de la hauteur de ce corps. On aura FIG. 352.

$$\frac{2\pi x^2 y}{\pi x^2 (R - y) + \frac{1}{3}\pi (R - y)^3} = m,$$

ou

$$6x^2 y = m\,(R - y)\,[3x^2 + (R - y)^2]. \qquad (1)$$

D'ailleurs, dans le triangle rectangle OEC,

$$x^2 = R^2 - y^2 :$$

l'équation (1) devient donc

$$3(R^2 - y^2)\,y = m\,(R - y)^3\,(2R + y) ;$$

d'où, en supprimant le facteur commun $R - y$ et en ordonnant :

$$y^2 + Ry - \frac{2m}{m+3} R^2 = 0.$$

Remarque. Le facteur $R - y$ répond à $y = R$, valeur qui, évidemment, ne convient pas au problème.

Problème XII.

A une sphère donnée, inscrire un cône ABC équivalent au segment sphérique adjacent ABD.

FIG. 353. Représentons par R le rayon de la sphère, par x le rayon de la base du cône, par y la hauteur DE du segment. Nous aurons

$$\frac{1}{3}\pi x^2 (2R - y) = \frac{1}{2}\pi x^2 y + \frac{1}{6}\pi y^3,$$

ou

$$x^2 (4R - 5y) = y^3.$$

Et comme x est moyen proportionnel entre y et $2R - y$:

$$y\,(2R - y)(4R - 5y) = y^3.$$

En supprimant le facteur y et en réduisant, on trouve

$$2y^2 - 7Ry + 4R^2 = 0.$$

Cette équation donne

$$y = R\,\frac{7 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

La première valeur est plus grande que 2R ; elle doit donc être rejetée. La seconde seule satisfait à la question proposée.

Problème XIII.

Couper un triangle ABC par une parallèle DE à la base AB, de manière que les corps engendrés par les deux segments CDE, ABDE tournant autour de cette base, supposée fixe, soient équivalents.

Soient $CF = h$ et $CG = x$ les hauteurs du triangle ABC et du triangle DCE. Il faut, d'après l'énoncé, que le corps engendré par celui-ci soit équivalent à la moitié du corps engendré par l'autre triangle. FIG. 354.

Or, on sait que le corps engendré par un triangle tournant autour d'un axe situé dans son plan a pour mesure l'aire de ce triangle, multipliée par la circonférence que décrit son centre des moyennes distances ; donc G., 747.

$$\text{vol.ABC} = \text{ABC}.2\pi\frac{h}{3}, \quad \text{vol.CDE} = \text{CDE}.2\pi\frac{h+2(h-x)}{3}$$

On conclut, de ces valeurs,

$$\frac{\text{ABC}.h}{\text{CDE}.(3h-2x)} = 2.$$

Les triangles semblables ABC, CDE sont entre eux comme les carrés de leurs hauteurs h et x. L'équation devient donc

$$h^3 = 2x^2(3h-2x),$$

ou

$$4x^3 - 6hx^2 + h^3 = 0. \qquad (1)$$

Avec un peu d'attention, on reconnaît que cette équation est vérifiée par $x = \frac{h}{2}$. Ainsi, *la parallèle* DE *à la base* AB *doit être menée par le milieu de la hauteur* CF.

Remarque. Les deux autres racines de l'équation (1) sont $x = \frac{1}{2} h(1 \pm \sqrt{3})$: elles ne satisfont pas à l'énoncé, mais il est facile de les interpréter.

Problème XIV.

Couper un triangle ABC par une droite AD, passant par le sommet A, de manière que les corps engendrés par les deux segments ABD, ACD, tournant autour d'un axe donné XY, situé dans leur plan, soient équivalents.

FIG. 355. Des points A, B, C, D, abaissons des perpendiculaires sur XY. Nous aurons, comme dans le Problème XIII :

$$\text{vol. ABD} = \text{ABD} \cdot 2\pi \frac{\text{AA}' + \text{BB}' + \text{DD}'}{3},$$

$$\text{vol. ACD} = \text{ACD} \cdot 2\pi \frac{\text{AA}' + \text{CC}' + \text{DD}'}{3}.$$

Les triangles ABD, ACD, ayant même hauteur, sont proportionnels à leurs bases BD, CD. Par conséquent, en exprimant que les deux volumes sont égaux, nous trouvons

$$\text{BD}\,(\text{AA}' + \text{BB}' + \text{DD}') = \text{CD}\,(\text{AA}' + \text{CC}' + \text{DD}').$$

Pour abréger, posons

$$\text{AA}' = a,\ \ \text{BB}' = b,\ \ \text{CC}' = c,\ \ \text{BD} = x,\ \ \text{CD} = y,\ \ \text{BC} = l;$$

l'équation deviendra

$$x\,(a + b + \text{DD}') = y\,(a + c + \text{DD}').$$

Pour éliminer DD', observons que

$$BC \cdot DD' = BD \cdot CC' + CD \cdot BB'$$

(Liv. III, Th. I) ; d'où

$$DD' = \frac{cx + by}{l};$$

puis

$$(a+b)x - (a+c)y + (x-y)\frac{cx+by}{l} = 0. \quad (1)$$

Au moyen de cette équation et de

$$x + y = l, \qquad (2)$$

on pourra déterminer x et y.

Si, par exemple, on remplace y par $l - x$, on trouve que l'inconnue x est donnée par l'équation du second degré :

$$2(b-c)x^2 - 2(a+2b)lx + (a+b+c)l^2 = 0.$$

Problème XV.

D'un point pris sur la surface d'une sphère de rayon R, comme centre, décrire une surface sphérique telle, que la partie comprise entre les surfaces des deux sphères ait un volume donné.

Le corps intercepté entre les surfaces des deux sphères est une *lentille biconvexe*, dont l'épaisseur est le rayon R′ de la sphère cherchée. Conséquemment, si nous désignons par m le rapport entre le volume de cette lentille et le volume de la sphère donnée, nous aurons, par la dernière formule du Problème V :

$$\frac{4}{3}\pi m R^3 = \frac{1}{12}\pi\frac{R'^2}{R}[R'^2 - 4(R+R')R' + 12RR'];$$

d'où

$$3R'^4 + 8RR'^3 + 16mR^4 = 0.$$

Telle est l'équation qui donnera le rayon R′. Pour la simplifier, posons $\frac{R'}{R} = x$; nous aurons

$$3x^4 - 8x^3 + 16m = 0.$$

Le lecteur à qui la Théorie des équations est familière reconnaîtra sans peine que cette équation a deux racines *imaginaires ;* qu'elle a deux racines *positives,* l'une plus petite et l'autre plus grande que 2; etc.

Problème XVI.

Trouver le rayon d'une sphère équivalente à la limite de la somme d'une infinité de sphères dont les rayons décroîtraient en progression par quotient.

Représentons par R le rayon de la première des sphères données, par q le rapport de deux rayons consécutifs, et par x le rayon de la sphère cherchée ; nous aurons, en remplaçant les sphères par les cubes de leurs rayons, ce qui est permis :

$$x^3 = R^3[1 + q^3 + (q^3)^2 + (q^3)^3 + \ldots].$$

Les termes contenus dans la parenthèse forment une progression décroissante, dont la raison est q^3. La *limite* de leur somme est, par la formule connue, $\frac{1}{1-q^3}$; donc

$$x^3 = \frac{R^3}{1-q^3};$$

et

$$x = \frac{R}{\sqrt[3]{1-q^3}}.$$

Problème XVII.

A un cône droit ABD on inscrit une première sphère O; puis, dans l'espace compris entre celle-ci et la surface latérale du cône, on inscrit une deuxième sphère O'; et ainsi de suite indéfiniment. Quelle est la limite des volumes de toutes ces sphères?

Si, au triangle isoscèle ABD, section méridienne du cône, nous inscrivons une circonférence CEC', cette ligne représentera la section faite dans la sphère O, par le plan du triangle. Menons, par l'extrémité C' du diamètre CC', la tangente B'D', évidemment parallèle à BD; nous obtiendrons un nouveau triangle isoscèle AB'D', auquel nous pourrons inscrire la circonférence C'C'', section méridienne de la deuxième sphère; et ainsi de suite. FIG. 356.

Cela posé, joignons le point de contact E au centre O; nous aurons

$$\frac{BC}{OE} = \frac{AB}{AO},$$

ou, en posant

$$BC = a,\ AC = b,\ AB = c,\ OE = R:$$

$$\frac{a}{R} = \frac{c}{b - R}.$$

Cette proportion donne

$$R = \frac{ab}{a + c}.$$

D'ailleurs les rayons des sphères O, O' sont proportionnels aux hauteurs AC, AC' des cônes semblables circonscrits; donc

$$\frac{R'}{R} = \frac{b}{b - 2R} = \frac{c - a}{c + a} = q.$$

La formule trouvée ci-dessus (Probl. XVI) donne donc, pour la limite des volumes de toutes les sphères,

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{ab}{a+c}\right)^3 \frac{1}{1-\left(\frac{c-a}{c+a}\right)^3},$$

ou

$$V = \frac{2}{3}\pi\frac{a^2b^3}{3c^2+a^2};$$

ou, enfin, à cause de $c^2 = a^2 + b^2$:

$$V = \frac{2}{3}\pi\frac{a^2b^3}{4a^2+3b^2}.$$

Remarque. Le rapport entre le volume V′ du cône et le volume V est

$$\frac{V'}{V} = \frac{2b^2}{3b^2+4a^2}.$$

Cette fraction, qui se réduit à $\frac{2}{3}$ quand $a = 0$, diminue indéfiniment lorsque a devient de plus en plus grand. Ainsi, la somme de toutes les sphères O, O′, O″..... est toujours moindre que les deux tiers du cône.

Problème XVIII.

On suppose qu'après avoir formé une pile triangulaire de boulets, on mène trois plans, tangents aux trois faces de cette pile et formant, avec le plan horizontal d'appui, un tétraèdre régulier T. Quel est le rapport m entre la partie *pleine* et la partie *vide* de ce tétraèdre ?

Représentons par n le nombre des boulets contenus dans le côté de la base de la pile, et par d leur diamètre commun; le volume de l'espace occupé par tous les boulets, ou de l'espace *plein*, sera

$$v = \frac{1}{6}\pi d^3 . \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{1}{36}\pi n(n+1)(n+2)d^3 \text{ (*)}.$$

Considérons les centres des boulets placés aux angles de la première couche horizontale, ainsi que le centre du boulet placé au sommet de la pile : ces quatre points sont les sommets d'un tétraèdre régulier T'. De plus, on reconnaît facilement que l'arête de ce tétraèdre se compose de $n - 1$ fois le diamètre d'un boulet, en sorte qu'elle est représentée par $c' = (n - 1) d$. Enfin, la distance comprise entre les faces correspondantes du tétraèdre T, est égale au rayon d'un boulet, c'est-à-dire égale à $\frac{1}{2} d$.

Soit maintenant r' le rayon de la sphère inscrite au tétraèdre T' ; nous aurons (Liv. VII, Probl. XXVI)

$$r' = \frac{n-1}{12} d\sqrt{6};$$

donc le rayon de la sphère inscrite à l'autre tétraèdre est

$$r = r' + \frac{1}{2} d,$$

ou

$$r = \frac{n - 1 + \sqrt{6}}{12} d \sqrt{6}.$$

Les deux tétraèdres sont entre eux comme les cubes des rayons des sphères inscrites. Le premier a pour volume

$$\frac{1}{2} c' . \frac{1}{2} c' \sqrt{3} . \frac{4}{3} r' = \frac{1}{12} (n - 1)^3 d^3 \sqrt{2};$$

(*) *Manuel des candidats à l'École polytechnique.*

donc le volume du second est

$$V = \frac{1}{12}(n - 1 + \sqrt{6})^3 d^3 \sqrt{2}.$$

Si, du volume total V, nous retranchons le volume v trouvé ci-dessus, nous obtiendrons le volume v' de l'espace *vide*; savoir

$$v' = \frac{1}{36} d^3 \left[3 (n-1+\sqrt{6})^3 \sqrt{2} - n (n+1)(n+2)\pi\right].$$

Le rapport cherché est donc

$$m = \frac{n(n+1)(n+2)\pi}{3(n-1+\sqrt{6})^3 \sqrt{2} - n(n+1)(n+2)\pi}.$$

Remarque. Quand $n = 1$, $m = \dfrac{\pi}{6\sqrt{3} - \pi} = 0,43\ldots$

A partir de cette valeur, m croît indéfiniment lorsque le nombre n des boulets augmente. La valeur limite s'obtient en supposant, dans la formule précédente, n *infini*. On trouve ainsi,

$$\textit{limite de } m = \frac{\pi}{3\sqrt{2} - \pi} = 2,85\ldots$$

Problème XIX.

Les milieux des arêtes d'un polyèdre régulier sont situés sur la surface d'une sphère S, à laquelle ces arêtes sont tangentes, et dont le centre est celui du polyèdre. De plus, la sphère est coupée, par les faces du polyèdre, suivant des circonférences inscrites à ces faces.

Cela étant admis, on demande d'évaluer, en fonction du côté c du polyèdre, la somme des calottes sphériques ayant pour bases ces circonférences.

Soient R, r et ρ les rayons respectifs de la sphère circonscrite, de la sphère inscrite et de la sphère S.

Supposons que l'on joigne le centre commun O des trois sphères à un sommet A du polyèdre et au milieu C d'une arête aboutissant à ce sommet : on obtiendra ainsi un triangle ACO, rectangle en C, et dans lequel

$$\mathrm{OA} = \mathrm{R}, \quad \mathrm{OC} = \rho, \quad \mathrm{AC} = \frac{1}{2}c\,;$$

donc

$$\rho^2 = \mathrm{R}^2 - \frac{1}{4}c^2.$$

Chacune des calottes sphériques dont il s'agit a pour hauteur $\rho - r$; en sorte que l'aire de cette calotte est représentée par $2\pi\rho(\rho - r)$. En supposant donc que n soit le nombre des faces du polyèdre, et en désignant par A l'aire cherchée, nous aurons

$$\mathrm{A} = 2n\pi\rho(\rho - r). \qquad (2)$$

Il ne s'agit plus maintenant que de substituer, pour R et r, leurs valeurs connues (Probl. XXVI, Liv. VII). On obtient ainsi les résultats suivants :

Tétraèdre. $\rho^2 = \frac{1}{8}c^2, \qquad \mathrm{A} = \frac{1}{3}\pi\left(3 - \sqrt{3}\right)c^2.$

Hexaèdre. $\rho^2 = \frac{1}{2}c^2, \qquad \mathrm{A} = 3\pi c^2.$

Octaèdre. $\rho^2 = \frac{1}{4}c^2, \qquad \mathrm{A} = \frac{4}{3}\pi\left(3 - \sqrt{6}\right)c^2.$

Dodécaèdre. $\rho^2 = \frac{1}{16}\left(3 + \sqrt{5}\right)c^2,$

$$\mathrm{A} = 3\pi\left[7 + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{\frac{85 + 38\sqrt{5}}{5}}\right]c^2.$$

Icosaèdre. $\rho^2 = \frac{1}{16}\left(\sqrt{5} + 1\right)^2 c^2,$

$$\mathrm{A} = 5\pi\left[3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{5 + \sqrt{5}}\right]c^2.$$

Remarque. Prenons chacune des circonférences données pour base d'un cône ayant son sommet au centre du polyèdre. Si la surface de ce cône est prolongée indéfiniment, elle intercepte une partie de l'espace indéfini, partie à laquelle on donne le nom d'*angle conique.* Or, ainsi qu'on le démontre facilement, cet angle conique a pour mesure le rapport de la calotte correspondante à la surface sphérique S. Nous aurons donc, pour la mesure α de la somme de ces angles :

$$\alpha = \frac{A}{4\pi\rho^2} = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{r}{\rho}\right).$$

La substitution des valeurs de r et de ρ donne ensuite les résultats suivants, pour les divers polyèdres réguliers :

Tétraèdre. $\alpha = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$

Hexaèdre. $\alpha = 3\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$

Octaèdre. $\alpha = 4\left(1 - \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$

Dodécaèdre. $\alpha = 6\left[1 - \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\sqrt{5}}\right].$

Icosaèdre. $\alpha = 10\left[1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right].$

APPENDICE (*).

DES POLYÈDRES SEMI-RÉGULIERS.

DÉFINITIONS. — J'appelle *polyèdre semi-régulier,* soit *celui dont les faces sont des polygones réguliers et dont les angles polyèdres sont égaux* (ou symétriques), *soit celui dont les faces sont égales et dont les angles polyèdres sont réguliers.*

J'admets que, *dans tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, les faces de même espèce sont égales,* et que, *dans tout polyèdre semi-régulier, du second genre, les angles polyèdres de même espèce sont égaux* (**).

Théorème I.

1° Tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, a les arêtes égales entre elles ;

2° Tout polyèdre semi-régulier, du second genre, a les angles dièdres égaux entre eux ;

3° Dans tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, les sommets sont trièdres, tétraèdres ou pentaèdres ;

4° Dans tout polyèdre semi-régulier, du second genre, les faces sont triangulaires, quadrangulaires ou pentagonales.

(*) La théorie des *polyèdres semi-réguliers,* et en particulier la démonstration des propriétés simplement énoncées dans cet *Appendice,* font partie d'un Mémoire inséré au *Journal de l'École Polytechnique* (XLIe Cahier). Les circonstances qui ont précédé la publication du Mémoire sont rapportées dans une brochure ayant pour titre : *Histoire d'un Concours.*

(**) La plupart des polyèdres du premier genre sont connus, depuis longtemps, sous le nom de *solides d'Archimède.*

Théorème II.

Tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, est inscriptible.

COROLLAIRE I. — *Dans tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, les angles dièdres, déterminés par des faces respectivement égales, sont égaux entre eux.*

COROLLAIRE II. — *Dans tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, les sommets adjacents à un sommet donné sont situés sur une circonférence ayant pour pôle le sommet donné.*

Théorème III.

Tont polyèdre semi-régulier, du second genre, est circonscriptible.

COROLLAIRE. — *Dans tout polyèdre semi-régulier, du second genre, les faces adjacentes à une face donnée sont tangentes à un cône de révolution dont le sommet est sur le diamètre perpendiculaire à la face donnée.*

Théorème IV.

Tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, est conjugué d'un polyèdre semi-régulier du second genre, et *vice versa* (*).

Théorème V.

Les polyèdres semi-réguliers sont au nombre de *trente*. Il n'en peut exister davantage (**).

(*) Deux polyèdres sont dits *conjugués* à une même sphère, lorsque les sommets du premier sont les pôles des faces du second, et réciproquement. Dans ces polyèdres, deux arêtes correspondantes quelconques sont *réciproques* (Th. VII, Liv. VII).

(**) Plus exactement, il y a *trente classes* de polyèdres semi-réguliers, quinze du premier genre et quinze du second. De ces trente classes, *vingt-six* sont composées, chacune, d'un seul po-

ÉNUMÉRATION DES POLYÈDRES DU PREMIER GENRE (*).

I. *Octaèdre à faces triangulaires et hexagonales.*

$$(f_3 = 4, \quad f_6 = 4, \quad F = 8, \quad S = 12, \quad A = 18).$$

II. *Décatétraèdre à faces triangulaires et octogonales.*

$$(f_3 = 8, \quad f_8 = 6, \quad F = 14, \quad S = 24, \quad A = 36).$$

III. *Triacontadoèdre à faces triangulaires et décagonales.*

$$(f_3 = 20, \quad f_{10} = 12, \quad F = 32, \quad S = 60, \quad A = 90).$$

IV. *Décatétraèdre à faces carrées et hexagonales.*

$$(f_4 = 6, \quad f_6 = 8, \quad F = 14, \quad S = 24, \quad A = 36).$$

V. *Triacontadoèdre à faces pentagonales et hexagonales.*

$$(f_5 = 12, \quad f_6 = 20, \quad F = 32, \quad S = 60, \quad A = 90).$$

VI. *Prisme régulier à faces latérales carrées* (**).

$$(f_n = 2, \quad f_4 = n, \quad F = n + 2, \quad S = 2n, \quad A = 3n).$$

VII. *Icohexaèdre à faces triangulaires et carrées.*

$$(f_3 = 8, \quad f_4 = 18, \quad F = 26, \quad S = 24, \quad A = 48).$$

---

lyèdre ; mais, ainsi qu'on le verra plus loin, chacune des *quatre* autres renferme une infinité de polyèdres.

(*) Dans cette énumération, et dans celle qui la suit, les notations f_n, s_n désignent, respectivement, le nombre des faces de n côtés et le nombre des sommets ayant n arêtes. Quant aux lettres F, S, A, elles représentent, à l'ordinaire, le nombre total des faces, des sommets ou des arêtes du polyèdre considéré.

(**) Cette classe renferme, évidemment, une infinité de polyèdres (Voyez la note ci-dessus).

VIII. *Polyèdre à bases égales et parallèles, et à faces latérales triangulaires.*

$(f_n = 2, \quad f_3 = n, \quad F = n + 2, \quad S = 2n, \quad A = 3n)$ (*).

IX. *Décatétraèdre à faces triangulaires et carrées.*

$(f_3 = 8, \quad f_4 = 6, \quad F = 14, \quad S = 12, \quad A = 24)$.

X. *Triacontadoèdre à faces triangulaires et pentagonales.*

$(f_3 = 20, \quad f_5 = 12, \quad F = 32, \quad S = 30, \quad A = 60)$.

XI. *Triacontadoèdre à faces triangulaires et carrées.*

$(f_3 = 32, \quad f_4 = 6, \quad F = 28, \quad S = 24, \quad A = 60)$.

XII. *Ennécontadoèdre.*

$(f_3 = 80, \quad f_5 = 12, \quad F = 92, \quad S = 60, \quad A = 150)$.

XIII. *Icohexaèdre à faces carrées, hexagonales et octogonales.*

$(f_4 = 12, \quad f_6 = 8, \quad f_8 = 6, \quad F = 26, \quad S = 48, \quad A = 72)$.

XIV. *Hexécontadoèdre à faces carrées, hexagonales et décagonales.*

$(f_4 = 30, \quad f_6 = 20, \quad f_{10} = 12, \quad F = 62, \quad S = 180, \quad A = 180)$.

XV. *Hexécontadoèdre à faces triangulaires, carrées et pentagonales.*

$(f_3 = 20, \quad f_4 = 30, \quad f_5 = 12, \quad F = 62, \quad S = 60, \quad A = 120)$.

(*) Même observation que pour le prisme régulier.

ÉNUMÉRATION DES POLYÈDRES DU SECOND GENRE.

I. *Dodécaèdre à faces triangulaires.*

$(s_3 = 4, \quad s_6 = 4, \quad S = 8, \quad F = 12, \quad A = 18).$

II. *Icotétraèdre à faces triangulaires, et à sommets trièdres et octaèdres.*

$(s_3 = 8, \quad s_8 = 6, \quad S = 14, \quad F = 24, \quad A = 36).$

III. *Hexécontaèdre à faces triangulaires, et à sommets trièdres et décaèdres.*

$(s_3 = 20, \quad s_{10} = 12, \quad S = 32, \quad F = 60, \quad A = 90).$

IV. *Icotétraèdre à faces triangulaires, et à sommets tétraèdres et hexaèdres.*

$(s_4 = 6, \quad s_6 = 8, \quad S = 14, \quad F = 24, \quad A = 36).$

V. *Hexécontaèdre à faces triangulaires, et à sommets pentaèdres et hexaèdres.*

$(s_5 = 12, \quad s_6 = 20, \quad S = 32, \quad F = 60, \quad A = 90).$

VI. *Double pyramide* (*).

$(s_p = 2, \quad s_4 = p, \quad S = p + 2, \quad F = 2p, \quad A = 3p).$

VII. *Icotétraèdre à faces quadrangulaires.*

$(s_3 = 8, \quad s_4 = 18, \quad S = 26, \quad F = 24, \quad A = 48).$

VIII. *Polyèdre formé par la pénétration de deux angles polyèdres réguliers égaux.*

$(s_p = 2, \quad s_3 = 2p, \quad S = 2p + 2, \quad F = 2p, \quad A = 4p).$

(*) Cette classe renferme une infinité de polyèdres.

IX. *Dodécaèdre rhomboïdal.*

($s_3 = 8$, $s_4 = 6$, $S = 14$, $F = 12$, $A = 24$).

X. *Triacontaèdre à faces quadrangulaires.*

($s_3 = 20$, $s_5 = 12$, $S = 32$, $F = 30$, $A = 60$).

XI. *Icotétraèdre à faces pentagonales.*

($s_3 = 32$, $s_4 = 6$, $S = 38$, $F = 24$, $A = 60$).

XII. *Hexécontaèdre à faces pentagonales.*

($s_3 = 80$, $s_5 = 12$, $S = 92$, $F = 60$, $A = 150$).

XIII. *Tessaracontaoctaèdre.*

($s_4 = 12$, $s_6 = 8$, $s_8 = 6$, $S = 26$, $F = 48$, $A = 72$).

XIV. *Hécatonicoèdre.*

($s_4 = 30$, $s_6 = 20$, $s_{10} = 12$, $S = 62$, $F = 120$, $A = 180$).

XV. *Hexécontaèdre à faces quadrangulaires.*

($s_3 = 20$, $s_4 = 30$, $s_5 = 12$, $S = 62$, $F = 60$, $A = 120$).

FIN.