Méditations expérimentées sur la TSUM

(Transition Secondaire-Université en Mathématiques)

par **Jacques BAIR**

Avant – propos

L'objectif de ce travail est de mettre par écrit quelques idées personnelles à propos de l'enseignement des mathématiques dans une première année de l'enseignement supérieur et ainsi de réfléchir à propos de la transition entre le secondaire et l'Université (TSU, en abrégé) pour un cours de mathématiques. A cet effet, j'ai estimé opportun de réaliser une comparaison entre les enseignements secondaire et universitaire, de préciser ma conception des mathématiques et de leur enseignement au niveau de la TSU. Dans une première annexe se trouve également une étude plus théorique et technique, rédigée par le professeur luxembourgeois M. Mainini, sur la métacognition qui me semble vraiment fondamentale en ce qui concerne la TSUM.

Ce travail est le fruit d'une longue d'expérience, de plus de quarante ans :
- pendant 6 ans dans le personnel scientifique de la Faculté des Sciences assurant des travaux pratiques à de futurs diplômés en économie et en gestion ;
- pendant 11 ans à l'Institut Supérieur Industriel de Huy et Verviers où sont formés des ingénieurs industriels dans les domaines agricole et textile ;
- une dizaine d'années à l'Université du Luxembourg en assurant, en collaboration avec Jean-Claude Delagardelle, le cours de mathématiques destiné aux étudiants inscrits dans la deuxième année en sciences économiques, mais aussi divers cours de didactique destinés à des diplômés en mathématiques suivant une formation pédagogique (FOPED) indispensable pour devenir professeur de mathématiques au Grand-Duché de Luxembourg ;
- pendant 25 ans dans le personnel académique d'abord dans la Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences sociales (FEGSS) puis à HEC-Ecole de Gestion en étant titulaire de la formation mathématique de base, dans un premier temps, pour tous les futurs diplômés en économie et en gestion, et, en fin de carrière, uniquement pour les ingénieurs de gestion.

Une particularité de ce travail est probablement de relier des idées issues de la littérature spécialisée relative à trois thèmes qui sont souvent développés indépendamment les uns des autres, à savoir l'épistémologie des mathématiques, la pédagogie universitaire et la didactique des mathématiques, le tout étant agencé d'après des convictions personnelles et des expériences professionnelles.

Sans avoir la prétention de me comparer à lui d'un point de vue scientifique, je suis peut-être un peu dans le même état d'esprit que Hardy lorsqu'il a écrit sa célèbre « *apologie d'un mathématicien* » [1]. Comme lui, je souhaite faire partager un peu mes idées, accumulées durant toute une carrière, sur l'enseignement de mathématiques (et en ce qui me concerne, au niveau de la TSU) ; dès lors, je pense également que « *ce livre que j'entreprends, non de mathématiques, mais ''sur'' les mathématiques, est-il un aveu de faiblesse, pour lequel je puis à juste titre être méprisé ou plaint par des mathématiciens plus jeunes et plus productifs. J'écris sur les mathématiques parce que, comme tout mathématicien qui a dépassé la soixantaine, je n'ai plus la fraîcheur d'esprit, l'énergie ni la patience de poursuivre fructueusement ma propre tâche.* » [2]
Mais, au-delà de cette satisfaction intellectuelle de transcrire un peu de mon expérience professionnelle, il me semble intéressant de transmettre des réflexions métamathématiques, car, comme l'a écrit Poincaré, « *en étudiant le processus de la pensée géométrique, c'est ce qu'il y a de plus essentiel dans l'esprit humain que nous pouvons atteindre* »[3].

En cours de rédaction, j'ai souvent constaté que certains auteurs, dont la notoriété scientifique est bien supérieure à la mienne, avaient des idées voisines des miennes … et, très souvent, exprimées bien plus clairement que celles-ci. C'est pourquoi, le texte est parsemé de nombreuses citations qui appuient et souvent précisent mes idées. Je remercie bien sûr tous les auteurs qui ont inspiré mes pensées. Mais ma gratitude va principalement à toutes les personnes (trop nombreuses pour être citées ici nommément [4]) qui m'ont permis de progresser dans ma pratique professionnelle : il s'agit de mes proches, de tous les étudiants qui ont suivi mon enseignement, de mes collègues à l'Institut Industriel de Huy, à l'Université de Liège, à

[1] G. Hardy, *L'apologie d'un mathématicien*, Belin, Paris, 1985.
[2] G. Hardy, *ibidem*, p. 10.
[3] H. Poincaré, *Science et Méthode*, Flammarion, Paris, 1940, p. 43.
[4] En annexe B figurent des « remerciements professionnels » plus explicites, rédigés à l'occasion de mon admission à l'éméritat. Les nombreuses personnes concernées se reconnaîtront certainement dans ce texte rédigé avec un certain humour.

l'Université de Luxembourg, à la SBPMef et au CREM. Une mention toute particulière concerne mes collaborateurs, assistant(e)s et assistant(e)s pédagogiques, avec qui j'ai souvent partagé et confronté mes idées et expériences.
Sans toutes ces personnes, ce travail n'aurait jamais pu être réalisé.

1. Comparaison entre les enseignements dans le secondaire et à l'université

Il est bien connu, dans le monde éducatif, que le passage d'un système scolaire à un autre peut être délicat pour certains apprenants. Ainsi, il n'est pas rare de constater que des élèves éprouvent des difficultés lors de leur passage du primaire dans le secondaire. Il en va de même, assez souvent, à propos de la transition entre le secondaire et l'Université.

Dans la pratique, on peut constater de nombreuses différences entre les enseignements secondaire et supérieur. Le tableau ci-dessous compare, d'une façon certes un peu caricaturale, un enseignement des humanités générales (colonne de gauche) d'un enseignement universitaire (colonne de droite) :

• Enseignement obligatoire	• Enseignement non obligatoire
• Enseignement généraliste	• Enseignement « professionnel »
• Professeurs : régents et licenciés ou maîtres	• Professeurs : docteurs qui sont des enseignants-chercheurs
• Public « homogène »	• Public « hétérogène »
• Horaire « rigide »	• Horaire « souple »
• «Petite» classe	• Grand auditoire
• Cours interactifs	• Cours généralement ex-cathedra
• L'enseignant connaît bien tous ses élèves	• Le professeur ne connaît généralement pas tous ses étudiants
• Tous les élèves d'une même classe se connaissent	• Certains étudiants d'une même section ne se connaissent pas
• Matière parfois dictée	• Prise de notes souvent obligatoire
• Matière limitée	• Matière vaste
• Progression dans la matière assez lente	• Progression dans la matière plutôt rapide
• Contrôle continu des connaissances	• Examens finaux en fin d'année
• Modalités d'évaluation connues	• Modalités d'évaluation parfois

	mystérieuses
• Matière «balisée» par le professeur	• Liens à faire par l'étudiant
• Travail organisé, prévu par le système	• Liberté de gestion laissée à l'étudiant
• Exigences «faibles» pour une réussite	• Exigences «fortes» pour une réussite
• La réussite est « attendue »	• Un échec est assez « normal »
• Echecs «peu nombreux»	• Echecs «nombreux »

En conséquence, le passage de l'élève à l'étudiant, c'est-à-dire la transition entre le secondaire et l'universitaire, s'avère souvent délicat car il requiert, en résumé, un changement (cfr Frenay *et al.*[5], pp. 7 – 14, p. 140)

- d'environnement, nécessitant notamment *une nouvelle naissance* dans la relation pédagogique
- dans les contenus
- dans les méthodes
- dans la manière d'apprendre : « *pour être efficace, cet étudiant-apprenant doit adopter une approche stratégique de l'apprentissage, c'est-à-dire adopter des comportements adaptés aux exigences, souvent changeantes et implicites, du contexte académique auquel il est confronté* ».

Pour tenter de mieux comprendre de telles différences entre les deux enseignements et, surtout, pour faciliter quelque peu, en dispensant des conseils pratiques, cette transition aux étudiants s'inscrivant à l'Université et s'apprêtant à y suivre un cours de mathématiques, il me semble opportun de s'interroger sur ce que représentent à mes yeux des cours de mathématiques à l'Université.

La tâche est malaisée et mes prises de position ne feront assurément pas l'unanimité. En effet, d'une part, tous les universitaires n'ont pas forcément, et loin de là, la même conception de ce que devraient être, idéalement pour eux, un enseignement universitaire. D'autre part, tous les mathématiciens ne conçoivent pas toujours l'enseignement de leur discipline de la même manière, le contenu qu'ils enseignent et leur approche de la matière pouvant évidemment dépendre fortement de la section au sein de laquelle ils travaillent. Néanmoins, tous les enseignants travaillant en première année de Bachelier se trouvent face à des étudiants issus du secondaire (le plus souvent du général, et assez rarement du technique) et ayant de ce fait

[5] Frenay M., Noël B., Parmentier P., *L'étudiant-apprenant : grilles de lecture pour l'enseignant-universitaire*, De Boeck Université, Bruxelles, 1998, 183 pages.

(pratiquement) tous un même bagage théorique puisque la matière du secondaire est bien arrêtée dans des programmes officiels. Le problème de la transition Secondaire-Université se pose, au départ, pratiquement de la même manière pour tous les encadrants : il leur importe de tenir compte au mieux du bagage de leurs étudiants et de permettre à ces derniers d'atteindre le niveau requis à l'Université.

Avant d'aborder des points particuliers du travail allant dans la direction de ce qui vient d'être décrit, il me paraît utile de définir ma conception de l'enseignement universitaire, puis de l'enseignement des mathématiques à l'Université et de préciser les objectifs et compétences visés.

2. Enseignement universitaire

Pour l'enseignement postsecondaire, certains philosophes de l'éducation distinguent deux conceptions différentes selon les finalités recherchées :

1) un enseignement principalement axé sur une formation de l'esprit et visant donc « *avant tout le développement des potentialités de l'individu et sa compréhension du monde* » (Frenay *et al.*, p. 52)
2) une formation professionnelle qui « *met en avant le fait que l'éducation est avant tout un processus d'intégration des individus dans la société et que, par conséquent, les connaissances doivent être acquises pour le bien et l'harmonie de la société* » (Frenay *et al.*, p. 52).

Dans cet ouvrage, je me place résolument dans le cas du premier type d'enseignement, à savoir celui relevant des *thèses psychologistes de l'épanouissement* (Frenay *at al*, p. 52) individuel.[6] Je suis donc des idées qui ont été initialement formulées par von Humboldt lors de la création des premières Universités modernes en Europe au début du 19ème siècle (notamment à Berlin, en 1809) ainsi que par Newman dans son livre *The Idea of University* (1852), avant d'être reprises par des auteurs plus contemporains : je pense que, grâce à des études universitaires, « *des habitudes de pensée sont prises et qui dureront toute la vie, de sorte que les individus ainsi formés seront capables de mieux remplir leur rôle dans la société*

[6] Pour les études en les Facultés de Sciences, de Sciences Appliquées et de HEC-Ecole de Gestion, le second type d'enseignement, qui relève davantage des « *thèses sociologistes de l'adaptation* » (Frenay *et al.*, p. 52), est généralement dispensé dans des Hautes Ecoles. Il est à noter que l'Université délivre aussi des formations à vocation professionnelle, par exemple en médecine, en dentisterie, …, mais ces études ne sont pas envisagées dans ce travail.

et deviendront des membres intelligents, capables et actifs de la société » (cité par Frenay *et al.*, p. 54).

En d'autres termes, j'adhère aux idées émises naguère par M. Crochet, Recteur de l'UCL ; celui-ci, dans un discours prononcé lors d'une rentrée académique, estimait notamment que

- *« l'universitaire doit être à même de penser et d'écrire avec clarté et précision et être exercé à la réflexion critique ;*
- *il possède un jugement critique quant au savoir et à la compréhension que nous avons de l'univers, de la société et de nous-mêmes ;*
- *il connaît en profondeur un champ de savoir et a appris à apprendre, ce qui lui permettra de se tenir à jour lorsque, dix ans plus tard, la moitié des connaissances acquises à l'université seront dépassées »*. (cité dans le livre *Des technologies pour enseigner et apprendre,* par M. Lebrun, De Boeck Université, 1999, p. 152)

Une telle idéologie influence évidemment le type d'enseignement proposé au sein d'une Institution. Je vais essayer d'analyser quelque peu l'impact que cela pourrait engendrer au niveau des apprenants.

Bien entendu, les étudiants abordent leurs études universitaires avec des perceptions variées, car l'apprentissage est avant tout un acte personnel et celui-ci peut être influencé par le contexte social (notamment le milieu familial), par la formation reçue dans le secondaire et par les valeurs prônées par l'Université choisie (par exemple, par les exigences en matière d'examens). Il est donc possible de proposer plusieurs grilles de lecture concernant les manières d'apprendre à l'Université. Mais, dans les grandes lignes, celles-ci proposent toutes un même type de valeurs basées sur le développement personnel de l'apprenant cherchant à comprendre le monde dans lequel il vit.

Pour sa commodité et sa simplicité, je privilégie la classification SOLO [7] comme grille de lecture concernant les manières d'apprendre à l'université. Cela m'amène à distinguer cinq types de conceptions, allant du « moins structuré » au « plus structuré » :

---

[7] Cette taxonomie a été présentée par Biggs et Collis en 1982. Initialement, elle visait une analyse de la complexité structurelle des productions d'apprenants puisqu'elle présentait une *hiérarchisation des résultats observés de l'apprentissage*, ou en anglais *Structure of the Observed Learning Outcomes*, SOLO en abrégé. A la suite de Boulton – Lewis (1994), cette méthode fut exploitée pour distinguer les différentes conceptions d'apprentissage possibles. Il s'agit en fait d'une échelle d'évaluation descriptive et globale ; le lecteur intéressé par les échelles d'évaluation pourra consulter notamment

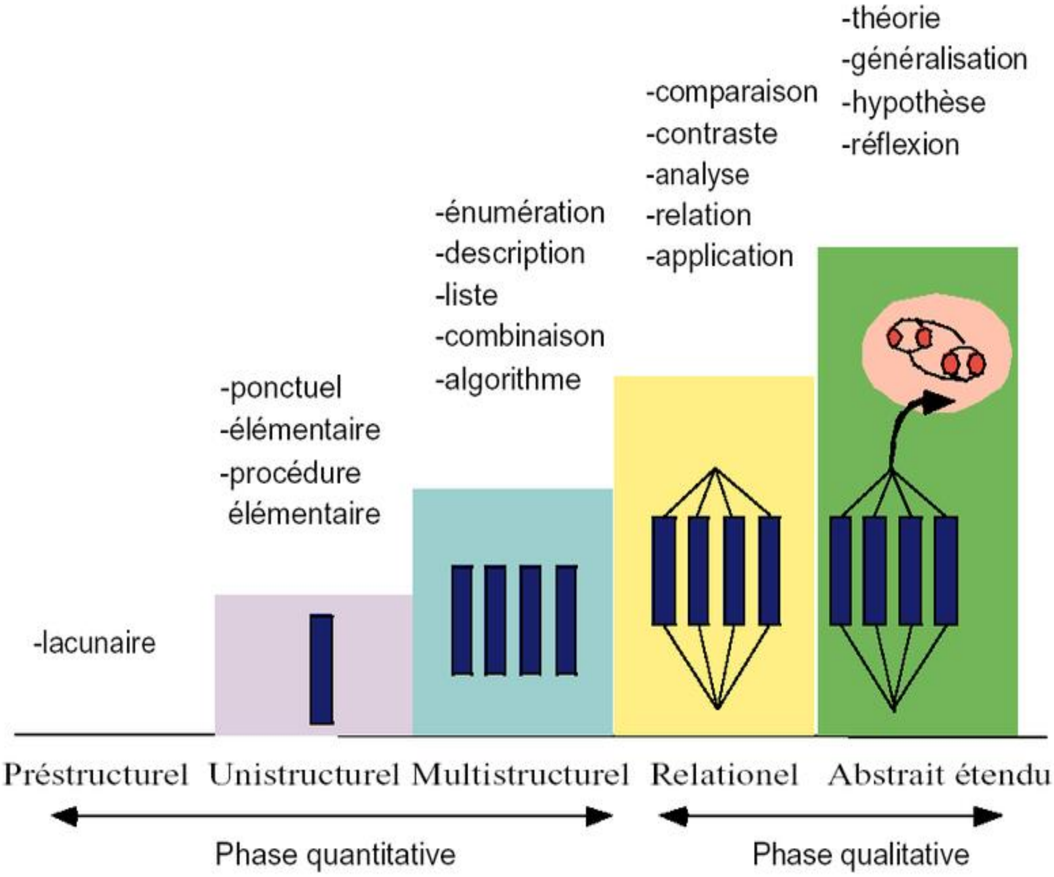
1) *Préstructurel.* A ce niveau, aucune véritable structure n'est présente : pour l'étudiant, apprendre consiste à accumuler (quantitativement) des connaissances, pour en avoir « *un peu plus qu'avant* » (Frenay *et al.,* p. 65), sans chercher de liens entre celles-ci ni voir en quoi elles pourraient servir.
2) *Unistructurel.* Ce niveau se caractérise par le fait qu'un, et un seul, volet de l'apprentissage entre en jeu. Pour l'étudiant, apprendre consiste avant tout à étudier pour assimiler un cours d'une manière suffisante ; son principal objectif consiste à « *satisfaire aux exigences de restitution* » (Frenay *et al.*, p. 66) et ainsi réussir l'examen correspondant de fin d'année. Bien entendu, l'étude peut être menée de manière plus ou moins mécanique selon la motivation, les capacités, la volonté, … de l'étudiant.
3) *Multistructurel.* Sont présents à ce niveau plusieurs volets de l'apprentissage, mais aucun lien entre ceux-ci n'apparaît encore. A ce stade, apprendre consiste principalement à *« stocker des connaissances à mettre en pratique dans la réalité* » (Frenay *et al.*, p. 66). En d'autres termes, tous les aspects d'une tâche étudiée sont alors présents, mais ils sont traités isolément ; il y a donc un apprentissage de faits et de connaissances, en l'absence de liens et de relations.
4) *Relationnel.* Ici, tous les aspects de la tâche étudiée sont encore présents, mais, cette fois, bien intégrés les uns aux autres, de sorte qu'ils contribuent à une bonne compréhension de la question traitée. Dans ce cas, apprendre consiste essentiellement en « *une recherche personnelle de sens, une reconstruction des liens entre les concepts abordés et la réalité extérieure* » (Frenay *et al.*, p. 67).
5) *Abstrait étendu*. En plus de ce qui se trouve au point précédent, la matière étudiée est bien conceptualisée, de sorte que les « compétences » (savoirs, savoir-faire, savoir-être) acquises peuvent être utilisées dans d'autres situations [8] ; au surplus, il y a une prise de conscience personnelle du fait que la méthode suivie pourrait être utilisée avec efficacité dans d'autres circonstances [9].

l'article « Sur l'évaluation des compétences en mathématiques », par J. Bair, E-print publié sur *Orbi*, http://hdl.handle.net/2268/207355.

[8] On parle alors en didactique de « transfert ».

[9] Ceci est du ressort de ce que l'on appelle la « métacognition » (voir l'Annexe A).

La figure ci-dessous résume de façon suggestive et caractérise assez bien les différents niveaux de l'échelle SOLO [10] :



Bien entendu, comme toute classification, cette dernière possède des limites. En effet, les classes qu'elle introduit possèdent évidemment des contours pouvant être relativement mal définis, ne sont pas forcément deux à deux disjointes et, surtout, s'appuient sur toutes celles qui les précèdent au sein de cette échelle. Il n'empêche que cette grille permet de mieux situer le niveau d'apprentissage qui me semble requis à l'Université.

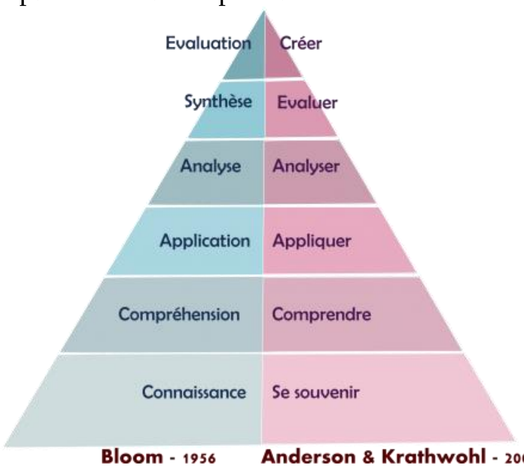
En ce qui me concerne, j'estime que les étudiants universitaires ne devraient pas se contenter d'une des trois premières marches de l'échelle, mais devraient idéalement pouvoir se positionner sur les deux derniers échelons de la grille SOLO.

[10] Voir le livre *Théories et méthodes pédagogiques pour enseigner et apprendre : quelle place pour les TIC dans l'éducation ?*, par M. Lebrun, De Boeck, 2007, p. 108.

Or, la distinction fondamentale entre les deux derniers niveaux de l'échelle et les trois premiers est d'ordre non pas quantitatif, mais qualitatif : pour pouvoir dépasser les trois premiers échelons et se situer sur le quatrième ou sur le cinquième [11], l'étudiant doit avoir une approche « *guidée par l'intention de comprendre la signification de ce que l'on apprend,* [c'est-à-dire] *une approche en profondeur* , [et non pas] *une approche superficielle guidée par l'intention de reproduire des faits ou les données sans nécessairement les comprendre ou les trouver intéressants*.» (Frenay *et al.*, p. 72) [12] . On reconnaît ici l'idée de *profondeur* qui était signalée plus haut dans la citation du Recteur Crochet et qui nous semble être une caractéristique fondamentale [13] de ce que devrait être un enseignement universitaire. De façon concrète, un apprentissage en profondeur, qui semble être une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour une réussite à l'Université (cfr Wolfs [14], p. 276), se distingue d'un apprentissage en surface selon le tableau suivant (Wolfs, *ibidem,* p. 211) :

[11] Idéalement, bien sûr, sur le cinquième.

[12] Signalons que d'autres explications, finalement assez ressemblantes, peuvent être fournies pour caractériser la profondeur d'un apprentissage. Par exemple, la classique « pyramide de Bloom », construite en 1956, et certaines de ces améliorations apportées plus tard, comme celle d'Anderson – Krathwohl datant de 2000, classent les opérations intellectuelles mobilisées au cours de l'apprentissage, de la plus simple (bas de la pyramide) à la plus complexe (haut de la pyramide) selon un schéma tel que celui-ci (http://didac2b.wordpress.com/2009/07/07/une-autre-pyramide/):



La « profondeur » d'un apprentissage dépend en somme du nombre d'échelons de la pyramide atteints, sachant que les derniers (ceux qui sont en haut de la pyramide) s'appuient obligatoirement sur les premiers.

[13] Je ne prétends nullement que la profondeur se rencontre exclusivement à l'Université, mais je pense qu'il est en quelque sorte naturel qu'elle y soit plus présente dans la mesure où la matière enseignée y devient toujours plus abondante et de plus en plus élaborée. Des études empiriques confirment d'ailleurs le fait que *le rôle des stratégies d'apprentissage en profondeur croît en fonction du niveau des études* (Wolfs, voir note ci-après, p. 276)

[14] *Méthodes de travail et stratégies d'apprentissage : Du secondaire à l'université – Recherche – Théorie – Application,* par J.-L. Wolfs, De Boeck Université, 1998, 325 pages.

Apprentissage en profondeur	Apprentissage en surface
La recherche de sens est prioritaire	La recherche de sens n'est pas prioritaire
Utilisation de traitements actifs de l'information : - reformulation - exemplification - analyse (mise en relation) - structuration	Accumulation passive de l'information
Gestion métacognitive de ses stratégies (analyse, auto-évaluation, auto-régulation)	Peu ou pas de gestion métacognitive
Apprentissage visant l'appropriation personnelle Apprentissage visant le développement de compétences de haut niveau	Apprentissage visant essentiellement la reproduction
Implication forte (concentration, persévérance, motivation)	Implication faible ou forte
Transfert	Transfert faible ou même négatif (« placage »)

Comme il est signalé dans ce tableau, l'obtention d'un bon niveau de profondeur ne peut s'obtenir qu'à un certain prix : elle réclame assurément de la part de l'étudiant une réflexion intense sur ce qu'il croit connaître et sur la manière d'exploiter au mieux ses connaissances. En effet, comme l'écrivent très simplement de Vecchi, Carmona et Magnaldi [15], « *on s'est aperçu que, bizarrement (mais est-ce aussi bizarre que cela ?), c'était en se demandant comment on avait appris … qu'on apprenait le mieux).* » (p. 139). En termes plus savants, la métacognition va jouer un rôle important dans la qualité des études supérieures, car, en plus d'être clairement un « facilitateur du transfert d'apprentissage » (Wolfs, *ibidem*, p. 31), elle est étroitement reliée à la motivation et représente une clé indispensable pour progresser. Wolfs (*ibidem*, p. 54) a bien mis en évidence les interactions entre la métacognition et la motivation, ainsi que leur impact sur la réussite scolaire.

[15] *Faire vivre de véritables situations-problèmes*, de Vecchi R. – Carmona-Magnaldi N., Hachette Education, Paris, 2002, 251 pages.

Bien sûr, des réflexions métacognitives sont idéalement souhaitées dans tout apprentissage, dès le primaire (et même le maternel) et le secondaire ; mais elles deviennent vraiment incontournables pour un étudiant cherchant à bien réussir à l'Université.
J'approfondirai [16] ultérieurement ce que nous entendons plus particulièrement par tout ce qui précède dans le cas spécifique d'un apprentissage en mathématiques.

3. Conceptions des mathématiques

Il est indéniable que les mathématiques occupent une place de toute première importance dans toutes les sciences, et dès lors dans les programmes d'études à vocation scientifique organisés à l'Université.
Mais, au fait, on pourrait, comme l'a fait un mathématicien belge, s'interroger comme suit : « *les mathématiques, c'est quoi ? Si tout le monde convient que le physicien étudie le monde matériel, que le biologiste s'occupe de la vie et que l'historien étudie le passé de l'humanité, presque personne ne parvient à expliquer le but et le contenu des mathématiques. Même le mathématicien, qui pourtant aime les définitions claires et précises, a du mal à définir sa propre discipline.* ». (Van Moerbeke, 1991). Bien plus, on ne connaît rien sur la nature profonde des mathématiques ; notamment, on se demande souvent si elles ont été découvertes ou inventées : certains réputés mathématiciens contemporains, tels que A. Connes (Médaille Fields en 1982) sont platoniciens, c'est-à-dire qu'ils estiment que les mathématiques ont une existence intrinsèque indépendamment de la nature physique et de l'homme, tandis que d'autres, comme M. Atiyah (Médaille Fields en 1966), pensent qu'elles ont été inventées par l'homme qui les « a créées en idéalisant les éléments du monde physique » [17]. Je me rallie présentement [18] à ce dernier avis, estimant même que les mathématiques sont effectivement construites par l'homme en partant souvent d'une intuition issue du monde physique. On pourrait dès lors se poser la question de savoir selon quel modèle théorique les mathématiques sont effectivement construites. D'après le philosophe Ian Hacking [19], deux modèles sont concevables et possèdent leurs défenseurs. Certains mathématiciens, comme F. Quinn [20] optent pour le modèle dit « du papillon » qui fait référence à de la biologie et non au chaos,

[16] Terme particulièrement adéquat dans notre étude.
[17] Voir le livre *Dieu est-il mathématicien ?,* par M. Livio, Odile Jacob, 2016, 288 pages.
[18] Sachant que les opinions individuelles sur de tels sujets peuvent se modifier au cours du temps en fonction des connaissances, des lectures, des rencontres, …
[19] Hacking, I. *Why is there philosophy of mathematics at all* ? Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
[20] Voir la reference suivante: Quinn, F. *Contributions to a science of contemporary mathematics*, 2011, https://www.math.vt.edu/people/quinn/history_nature/nature0.pdf ; voir également : Quinn, F. A revolution in mathematics? What really happened a century ago and why it matters today. *Notices Amer. Math. Soc.* 59 (2012), no. 1, 31–37.

selon lequel cet insecte se transforme d'une façon tout à fait prévisible. D'autres mathématiciens, auxquels je me rallie [21], sont favorables au modèle qualifié de « Latin » selon lequel les mathématiques peuvent se développer dans des directions différentes de la même manière que diverses langues modernes sont issues de la même langue latine.

Il est encore à noter que certains savants contemporains émettent même une opinion telle que celle-ci : « *je ne vois pas les mathématiques comme une science, car je considère que toute science est expérimentale et reproductible*. » (M. Cassé [22], cité dans *Sciences et Avenir*, Hors-Série sur *le pouvoir infini des mathématiques*, 2011, p. 10). Bien entendu, un tel avis est guidé par ce qu'on entend par *expérience*. Il est clair que certains concepts mathématiques, tels que l'infini (pour ne citer que cette idée capitale et féconde en mathématiques), ne peuvent pas être expérimentés réellement dans le monde sensible ; mais ils répondent à des interrogations que se posent certains scientifiques, peuvent être introduits de façon rigoureuse, possèdent des propriétés indéniables qui peuvent être prouvées dans un cadre théorique précis, s'avèrent vraiment efficaces dans des situations concrètes et même sont souvent incontournables pour le développement des autres disciplines scientifiques.

C'est dire que les mathématiques constituent à mes yeux une science … mais différente des autres. Pour me justifier quelque peu, je vais m'efforcer quand même d'en fournir une tentative de « définition ». En fait, j'en propose plusieurs : elles sont fort [23] simples, certes partielles, mais se complètent assez bien et seront suffisamment fidèles et pragmatiques pour développer ultérieurement mes idées à propos de l'enseignement des mathématiques à l'Université :

- « *Les mathématiques regroupent les sciences qui étudient par le raisonnement déductif les nombres, les grandeurs et leurs relations. […] Selon le mathématicien Alain Connes, ''un trait essentiel du monde mathématique [est] qu'il est impossible d'en isoler une partie sans le priver de son essence''.* » (S. Fay, Les mots de la planète maths, *Sciences et Avenir*, Hors-Série sur *le pouvoir infini des mathématiques*, 2011, p. 12)
- « *Les mathématiques sont une construction en permanente évolution, ce qui, pour moi, plaide en faveur d'une vision non platonicienne du monde. […] Une définition*

[21] Voir l'article en voie de publication : K*lein and Hilbert : allied moderns in a battle for the soul of modern mathematics,* par J. Bair - P. Blaszczyk - M. Katz – D. Sherry.
[22] Astrophysicien au Commissariat à l'énergie atomique et à l'Institut d'Astrophysique de Paris.
[23] Peut-être trop, penseront vraisemblablement certains lecteurs !

possible tient en trois mots : les mathématiques sont la ''science des structures''. Par structure, nous entendons la manière d'assembler des objets mathématiques, qui ne sont pas des objets matériels, mais des objets idéalisés, ce qui implique l'intervention de notre cerveau. » (J.P. Bourguignon, cité dans *Sciences et Avenir*, Hors-Série sur *le pouvoir infini des mathématiques,* 2011, pp. 9 - 10).

- « *Faire des maths, c'est un travail de la pensée qui construit des concepts pour résoudre des problèmes, qui pose de nouveaux problèmes à partir de concepts ainsi construits, qui rectifie ainsi ces concepts pour résoudre de nouveaux problèmes, qui généralise et unifie peu à peu ces concepts dans des univers mathématiques qui s'articulent entre eux, se structurent, se déstructurent et se restructurent sans cesse* » (Charlot, 1986).
- A la question « Qu'est-ce que les maths ? », Martin Hairer, lauréat d'une Médaille Fiels en 2014, répond, lors d'une conférence donnée à l'Université de Genève le 17 mars 2015, par les quatre points suivants :
  - *Exploitation du monde des idées avec un langage précis,*
  - *Construction des idées qui ne créent aucune contradiction,*
  - *Découverte de vérités aussi absolues que la logique le permet,*
  - *Objets idéalisés, d'où l'universalité des théories.*

Ces citations me paraissent décrire succinctement la nature profonde des mathématiques et la manière d'en produire.

De plus, ces points de vue peuvent provoquer diverses réflexions concrètes, qui me semblent importantes, au niveau de l'enseignement :

a) Si les mathématiques se subdivisent parfois en plusieurs sous-disciplines (telles que l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie, la trigonométrie, l'analyse, la statistique, les probabilités), elles forment un tout indivisible. Cette unicité est d'ailleurs parfois évoquée par l'emploi du mot mathématique au singulier, et non au pluriel [24]. C'est une grande richesse des mathématiques de disposer de divers points de vue, avec des « langages » et des « raisonnements » variés, pour aborder parfois une même situation. Mais, pour l'étudiant, cela nécessite un effort pour relier entre eux les différents chapitres du cours de mathématiques et être capable,

[24] On parle, par exemple, d'Institut de Mathématique. Cet emploi du singulier fut notamment popularisé par la réforme de la Mathématique Moderne à la fin du siècle précédent.

au besoin, de passer d'un cadre conceptuel à un autre [25]. Et bien entendu, au fur et à mesure de l'avancement des études, la matière s'accumule et les liens à établir deviennent plus nombreux et difficiles à nouer. En effet, l'apprentissage mathématique se construit petit à petit tout au long de la formation scolaire : l'apprenant acquiert les concepts « *mathématiques par approximations successives et mutations, pour répondre aux besoins d'une pensée de plus en plus complexe et qui appelle ces changements, de sorte que la pensée mathématique devient de plus en plus élaborée et efficace, ce qui ne se juge pas seulement sur l'accumulation des acquis théoriques mais encore sur le progrès des modes de raisonnement* » (Crem [26], pp. 37-38). Ceci implique que, tout naturellement, un cours de mathématiques réclame un effort d'assimilation plus important à l'Université que dans le secondaire.

b) Comme je l'ai déjà suggéré, l'apprentissage des mathématiques réclame généralement du temps et de la persévérance. Cela s'explique non seulement par la façon dont se construit un savoir, mais aussi par la nature des concepts utilisés en mathématiques : ils deviennent de plus en plus abstraits et généraux au fur et à mesure que l'apprentissage progresse, le développement d'un nouveau concept réclamant en principe la maîtrise de tous ceux qui ont été vus avant lui.
Pour approfondir cette idée, je vais m'attarder sur le mot « abstrait ». D'après une formule célèbre attribuée à Langevin, « *le concret, c'est de l'abstrait rendu familier par l'usage* ». A cet égard, il est intéressant d'observer l'aisance qu'ont des mathématiciens professionnels pour manipuler des concepts qui peuvent paraître, pour le commun des mortels, fort élaborés, mais qui pour le spécialistes sont d'usage courant et facile : ils manipulent ces objets aussi aisément, par exemple, que des élèves sortant de l'enseignement primaire manipulent des nombres entiers ; et pourtant ces objets mathématiques ne se réfèrent pas, le plus souvent, au monde sensible et sont dès lors considérés comme fort abstraits pour beaucoup de personnes, mais pas pour ceux qui les emploient quotidiennement.

---

[25] En liaison avec ce sujet, voir l'article suivant : "Success and failure in mathematics : the flexible meaning of symbols as process and concept", par E. Gray et D. Tall, *Mathematics Teaching*, 142, 1992, pp. 6 – 10.

[26] *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans – Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques*, CREM (sous la direction de N. Rouche), Nivelles, 1995, 327 pages.

Par ailleurs, les concepts mathématiques deviennent de plus en plus généraux. En guise d'exemple, il suffit de penser à la construction progressive des nombres qui commence avec les entiers non négatifs, puis aborde successivement les entiers relatifs, les rationnels et les réels, pour se prolonger par les complexes, …. Chacun des ensembles évoqués ci-avant contient ceux qui le précèdent dans la liste et leurs éléments se réfèrent de plus en plus difficilement au monde tangible.

c) De par la nature même des mathématiques « *l'apprentissage par cœur est une négation de la discipline. La démarche mathématique doit tout au contraire être une appropriation des concepts, qui rend la pensée autonome.* » (Bourguignon, cité dans *Sciences et Avenir*, Hors-Série sur *le pouvoir infini des mathématiques*, 2011, p. 10). En d'autres termes, comme l'a écrit Gleaser, « *en mathématiques, il y a peu à apprendre, mais beaucoup à comprendre* ». Cette nécessité de comprendre devrait constituer un atout indéniable des mathématiques (mais représente assurément un obstacle pour certains) : il « suffit » de connaître quelques « éléments » pour pouvoir « reconstruire » tout un cours en se basant sur des « enchaînements » des concepts étudiés. Néanmoins, il convient de constater que l'« appropriation autonome » des concepts demande de la maturation et un entraînement adéquat, ce qui ne peut pas être réalisé instantanément, ni sans efforts : la situation peut être, dans une certaine mesure, comparée à celle d'un tennisman qui a besoin de bien comprendre intellectuellement un mouvement à exécuter pour être performant (en tenant compte de sa morphologie, de ses capacités physiques, de son habilité technique, …) puis doit passer de nombreuses heures d'entraînement pour automatiser sa technique.

d) L'activité qui devrait, selon moi, être privilégiée dans un cours de mathématiques à l'Université est la résolution de problèmes [27], que ceux-ci soient internes ou externes à la discipline (cela pouvant évidemment varier en fonction des types d'études). Il est à remarquer que cette tâche est assurément la plus complexe puisque, par définition même de ce qu'est un problème, il n'existe aucune méthode connue des étudiants pour résoudre la question posée. D'ailleurs, ils sont nombreux les étudiants qui préfèrent devoir utiliser des algorithmes connus, même

[27] Dans un article intitulé « Is Mathematics Problem Solving or Theorem Proving ? », publié dans la revue *Foundations of Science* (vol. 22, issue 1, 2017, pp. 183-199), C. Celluci donne des arguments, notamment basés sur le théorème d'impossibilité de Gödel, selon lesquels le seul le point de vue défendable est celui affirmant que les mathématiques sont avant tout une affaire de résolution de problèmes.

avec des calculs fastidieux, plutôt que de se frotter à un problème : de façon imaginée, il est plus « confortable » pour un étudiant d'appliquer une « recette de cuisine » plutôt que d'étudier une question inédite, dont la résolution réclame une certaine « souplesse » pour traduire l'énoncé en un langage mathématique adéquat et de la créativité pour trouver une méthode de résolution efficiente. Mais, à l'instar de Polya, je pense que « *résoudre des problèmes est une question d'habileté pratique, comme de nager, par exemple. Or, l'habileté pratique s'acquiert par l'imitation et l'usage. Lorsqu'on essaie de nager, on imite les mouvements des pieds et des mains de ceux qui réussissent ainsi à tenir la tête hors de l'eau et finalement on apprend à nager en pratiquant la natation. Lorsqu'on résout des problèmes, il faut observer et imiter ce que font les autres en pareil cas, et finalement on apprend des problèmes en en faisant* » [28]. Bien entendu, un tel apprentissage ne peut être réellement productif que si l'étudiant fait preuve de réflexions métacognitives [29]. La réussite me semble être à ce prix, mais, pour reprendre une expression du langage courant, le « jeu en vaut bien la chandelle », car, comme l'écrit toujours Polya : « *un problème qui vous est soumis peut être sans prétention ; mais, s'il pique votre curiosité et fait entrer en jeu vos facultés d'invention, si vous le résolvez par vous-même … vous pouvez connaître le charme de la découverte et en goûter le triomphe. Ce genre d'expérience, à un certain âge, peut déterminer le goût du travail intellectuel et laisser, tant sur l'esprit que sur le caractère, une empreinte qui durera toute une vie.* » (Polya, *ibid.*, p. XIII).

e) Le fait que les mathématiques font intervenir des objets idéalisés est important. En effet, cela assure une généralité très grande des théories et une possibilité d'appliquer celles-ci dans des situations pouvant être très variées ; cela procure également un sentiment de pureté, et souvent de beauté esthétique, des objets manipulés. En contre-partie, les mathématiques paraissent souvent abstraites et parfois difficiles à bien assimiler ; leur apprentissage réclame, pour la plupart des apprenants, un investissement en temps important, et donc aussi un réel sens de l'effort, de la motivation et de la volition.

[28] Polya G., *Comment poser et résoudre un problème*, Dunod, Paris, 1965, p. 10.
[29] Voir l'annexe, en fin de chapitre, sur des liens entre la métacognition et la résolution de problèmes.

Par ailleurs, une fois construites, les mathématiques apparaissent parfois comme formant une succession de propositions (théorèmes, lemmes, corollaires, …) obtenues logiquement à partir d'axiomes, de définitions, de postulats supposés vrais, ainsi que de propositions déjà démontrées antérieurement ; on dit alors que les mathématiques sont une science « hypothético-déductive » : un exemple classique de référence en est donné par les célèbres *Eléments de géométrie* par Euclide.

Ainsi, il existe souvent une différence entre la production de théories mathématiques et la présentation de celles-ci. A la suite de N. Rouche, on peut en effet affirmer que *« les mathématiques sont une science vivante qui tend à produire des théories « mortes ». Les théories naissent et grandissent sur des chantiers de problèmes, et les concepts se forment tout près des questions qu'ils servent à résoudre (Lakatos), des raisonnements où ils interviennent. Mais ils ne trouvent d'emblée ni leur forme, ni leur place dans la théorie en gestation. Celle-ci n'est pas tout de suite déductive. Il faut parfois des siècles d'ajustements avant qu'elle trouve son fondement et sa forme axiomatique déductive, celle qu'on lui voit dans les traités. A ce stade, elle a souvent perdu la trace de ses origines problématiques, des questions qui l'ont motivée. Qui plus est, les concepts y sont introduits à la place que leur assigne la déduction, et qui est souvent loin de celle où on discerne le mieux leur importance. La théorie est ainsi transformée, pour obéir aux exigences de la pensée rationnelle, en un monument très beau mais immobile ».* (Crem, *op cit.*, p. 15)

4. Types d'enseignements des mathématiques

Il résulte de ce qui précède l'existence de plusieurs façons de présenter, donc d'enseigner, les mathématiques ; très schématiquement, on peut en distinguer deux fondamentales :

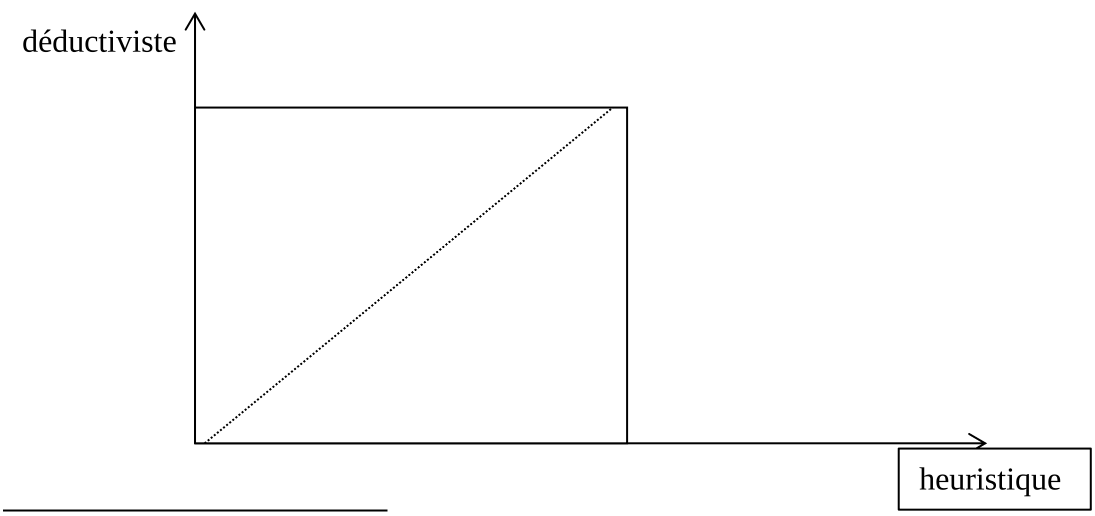
a) le point de vue <u>horizontal</u>, encore appelé par certains <u>heuristique</u>, qui « *s'occupe du contexte, des sources familières des mathématiques, qui pousse aux observations, aux manipulations ; un enseignement heuristique s'efforce de rapprocher la construction des concepts des chantiers de preuves où ils sont nécessaires ou au moins très utiles ; un tel enseignement tend à répondre par avance à la question si fréquente : à quoi ça sert ?* (Crem, *op cit.*, pp. 32 – 33, 37) ; *il consiste surtout à faire travailler les élèves dans des contextes du monde réel, physique ou social* » (Rouche, Plot 109, p. 2).

b) le point de vue <u>vertical</u>, encore qualifié de <u>déductiviste</u>, qui est « *celui de l'architecture déductive des mathématiques, des enchaînements d'axiomes, définitions, lemmes, théorèmes et corollaires, celui qui privilégie le sens interne aux* *mathématiques ; un enseignement déductiviste ne fait la place qu'à la genèse des théories, aux contextes problématiques où elles exhibent leur fonctionnement et leur sens, et à l'activité mathématique autonome des élèves ;* (Crem, *op cit.*, pp. 33 et 5*), il ne se soucie pas des applications, des multiples liens que les mathématiques entretiennent avec le monde réel, physique ou social* » (Rouche, Plot 109, p. 2).

Les approches possibles pour présenter des mathématiques sont nombreuses ; par exemple, Treffers (86) distingue quatre grands types d'enseignement selon la présence ou l'absence de chacune des composantes horizontale et verticale (cfr Crem, *op cit.*, pp. 32 – 33) :

	Composante horizontale	Composante verticale
Enseignement mécaniste	NON	NON
Enseignement empiriste	OUI	NON
Enseignement structuraliste	NON	OUI
Enseignement réaliste	OUI	OUI

Bien entendu, les types d'enseignement peuvent faire intervenir ces deux points de vue horizontal ou vertical avec une intensité variable. De façon imagée, on pourrait figurer tout enseignement par un point du plan dont l'axe horizontal se rapporte à l'heuristique et l'axe vertical au déductivisme, les coordonnées du point étant comprises dans l'intervalle [0 , 1] et traduisant le degré de certitude [30] relatif au point de vue en question : les quatre types d'enseignement envisagés par Treffers correspondent aux quatre sommets du carré tracé ci-dessous :



[30] En fait, le degré d'appartenance à chacune des deux catégories considérées peut se traduire par un nombre flou.

Très schématiquement, on peut généralement affirmer que l'approche privilégiée dans le secondaire est plus heuristique que déductiviste, alors que le contraire est constaté dans le supérieur ; en d'autres termes, un enseignement dans le secondaire est souvent représenté par un point situé sous la diagonale du carré issue de l'origine (et tracée en pointillés sur la figure), tandis qu'un enseignement universitaire est le plus souvent figuré par un point situé au-dessus de cette diagonale.

Exemple. En guise d'illustration, on peut regarder comment sont le plus souvent définies les fonctions exponentielle et logarithme dans les deux niveaux d'enseignement qui nous intéressent. [31]

Dans le secondaire, on présente souvent l'exponentielle avant la fonction logarithme, celle-ci étant alors la réciproque de celle-là ; cela permet d'introduire la fonction exponentielle de façon pragmatique en étendant les propriétés connues à propos d'exposants entiers ou rationnels et/ou en se référant souvent à des exemples concrets comme la variation temporelle d'une masse radio-active.

Par contre, à l'Université, il n'est pas rare que le logarithme népérien soit étudié en premier lieu et présenté de façon abstraite comme étant une primitive de la fonction qui à chaque réel non nul fait correspondre son inverse, les logarithmes dans d'autres bases et les fonctions exponentielles s'en déduisant logiquement, ces dernières comme fonctions réciproques des logarithmes dans les bases correspondantes.

Bien entendu, la façon dont une matière est présentée peut évidemment influencer la nature et la qualité du travail de l'apprenant. Ainsi, un étudiant sortant du secondaire doit s'habituer au changement de style d'enseignement qui lui est éventuellement proposé à l'Université. En particulier, il lui faut prendre conscience, soit par une réflexion personnelle soit avec l'aide d'autrui, que, comme l'a fait remarquer Lakatos, « *le style déductiviste cache la lutte, cache l'aventure. Toute l'histoire disparaît, les tentatives successives pour formuler le théorème au cours de l'élaboration de la démonstration sont condamnées à l'oubli, tandis que le résultat final est exalté comme infaillible et sacré* » (Lakatos [32], p. 142).

---

[31] Pour différentes présentations possibles de ces fonctions, voir l'article « La fonction exponentielle », par de J. Bair et V. Henry, *Losanges*, 3, 2009, pp. 31 – 37.

[32] Lakatos I., *Preuves et réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique*, Hermann, Paris, 1984.

De façon plus générale, l'étudiant commençant des études universitaires doit faire face à diverses conséquences pédagogiques d'une « présentation déductiviste » :

- la matière est présentée en se souciant principalement de la cohérence logique des propos et non pas forcément de l'intuition. Cela peut provoquer une perte de sens chez l'apprenant qui conduit celui-ci à effectuer des « calculs aveugles » [33]
- une grande importance est évidemment apportée aux démonstrations ; or, certains étudiants arrivant à l'Université n'ont jamais été amenés à rédiger une démonstration lors de leurs études antérieures
- une rigueur et précision extrêmes sont réclamées
- le formalisme utilisé est important
- l'abstraction et la généralité sont le plus souvent de mise
- …

D'un point de vue global, tout apprentissage des mathématiques se fait inévitablement en trois étapes ; celles-ci ont été mises en évidence par T. Tao qui les a appelées respectivement l'<u>étape pré-rigoureuse</u>, l'<u>étape rigoureuse</u> et enfin l'<u>étape post-rigoureuse</u> [34]. Grosso modo, la TSU correspond à la transition entre les étapes pré-rigoureuse (plus en vigueur dans le secondaire) et rigoureuse (davantage à l'honneur à l'université) et du passage, plus ou moins progressif et en douceur ou au contraire assez brutal [35], d'un enseignement heuristique vers un enseignement déductiviste (voir ci-dessus). En conséquence, la TSUM équivaut à une double transition : d'une part de nature pédagogique avec le passage du secondaire au supérieur (voir la section 1) et, d'autre part, de nature disciplinaire (avec le passage de l'étape pré-rigoureuse à l'étape rigoureuse), ce qui est peut-être spécifique du cours de mathématiques. Cette bipolarité me paraît capitale, notamment parce qu'elle explique partiellement les difficultés rencontrées par un certain nombre d'étudiants en TSUM. Il me semble que ce fait devrait être mieux connu de tous les intervenants, des apprenants bien sûr, mais aussi des encadrants (professeurs, assistants et assistants pédagogiques), de manière à optimiser les chances de bien négocier cette délicate transition.

[33] J'avais rédigé naguère (année académique 1999 – 2000) une brochure de l'IREM de Liège intitulée « A propos des calculateurs aveugles » (9 pages).

[34] Voir l'article intitulé « *There's more to mathematics than rigour and proofs* » sur le blog "*What's new*" de Terrence Tao (https://terrytao.wordpress.com/career-advice/). Voir également l'article « Pensées (mathématiques) de Tao », par J. Bair, *Losanges*, 23, 2013, pp. 33-41.

[35] Cela peut varier fortement en fonction du contexte (Université, Faculté, Département, Epreuve), mais aussi du professeur, de sa vision de l'enseignement et de son investissement pédagogique.

5. Objectifs du cours de mathématiques à l'Université

De nos jours, il semble que les mathématiques sont de plus en plus perçues de façon dichotomique : très (trop) schématiquement, on peut affirmer que chaque individu adore ou abhorre les mathématiques ; certaines personnalités se vantent même d'être « nulles » en maths … sous-entendant probablement que cette lacune n'a pas freiné leur progression dans la hiérarchie de la société.

Au surplus, vu les efforts demandés pour s'approprier en profondeur les théories mathématiques, il est tentant de se servir de ces dernières comme de « boîtes noires », en laissant le soin à d'autres de développer ces théories (« ceux que cela amuse et qui n'ont rien d'autre à faire » comme le pensent certains). Il existe même des intellectuels qui font appel à cette métaphore : il n'est pas nécessaire d'être un bon mécanicien pour pouvoir conduire une automobile.

De là, on enregistre une certaine tendance à vouloir réduire l'impact des mathématiques dans le système éducatif de nos régions, à tous niveaux, y compris dans certains programmes universitaires.

Bien entendu, on peut certes « bien vivre sans maths » ; mais si l'on veut former des élites intellectuelles dans des domaines quantitatifs, vouloir réduire l'importance accordée aux mathématiques dans la formation universitaire semble être une erreur colossale, car la compréhension en profondeur des théories mathématiques est indispensable pour pouvoir appliquer ces dernières avec efficacité et discernement.

Pour en revenir à l'analogie avec la conduite automobile, on peut dire qu'un pilote de course, s'il veut être performant au plus haut niveau, doit faire preuve de connaissances, au moins théoriques, en mécanique et en électronique ; or, pour continuer la comparaison, on peut penser que l'Université a pour mission de former non pas seulement des conducteurs amateurs, mais aussi les meilleurs pilotes de Formule 1.

J’en viens ainsi à formuler ce que sont, selon moi, les objectifs d’un cours de mathématiques, singulièrement à l’Université.

A la suite de Rouche, je pense que *« l’objectif premier de l’apprentissage des mathématiques est moins d’accumuler des connaissances que d’apprendre à penser mathématiquement, même s’il ne faut pas oublier qu’on ne peut penser mathématiquement sans connaissances théoriques »* (Crem, *op cit.*, p. 38).
En conséquence, bien plus qu’une succession logique d’axiomes, de définitions et de théorèmes qui admettent des applications utiles, les mathématiques représentent avant tout, selon moi, un moyen pour chaque étudiant d’acquérir et de perfectionner ce que Polya appelle des <u>acquis méthodologiques</u>. En effet, je suis toujours Rouche lorsqu’il écrit : « *chaque activité nouvelle est porteuse d’acquisitions qui contribuent à la formation de la pensée mathématique, de la pensée tout court, de la personnalité intellectuelle, morale et sociale.[…] La compétence transversale la plus utile n’est-elle pas de pouvoir, après chaque travail particulier sur une matière donnée, jeter un regard en arrière sur le cheminement de son esprit, pour y discerner ’’ce qui pourra resservir’’ ? Ainsi se construit, petit à petit, la capacité de penser mathématiquement (ou de penser dans une autre discipline), capacité qui unit indissolublement des attitudes mentales, des points de méthode, des connaissances. […] Les acquis méthodologiques dessinent une perspective de l’apprentissage dans la mesure où, dans le développement de la pensée mathématique, ce qui est une méthode à un stade devient souvent objet de pensée ou de recherche au stade suivant.* » (Crem, *op cit.*, pp. 17, 19, 38).

Le but ultime poursuivi me semble être d’amener chaque étudiant à posséder trois des qualités qui distinguent souvent les mathématiciens dans une assemblée, à savoir la rigueur, la cohérence et la recherche d’une certaine « perfection » dans les raisonnements. Je suis en effet intimement convaincu que tout étudiant, quelle que soit son orientation, retirera du profit, aussi bien pour la fin de ses études que plus tard sur le plan professionnel, en exploitant ces trois qualités qu’un cours de mathématiques développe probablement mieux que tout autre cours. A ce qui précède, on peut encore ajouter une autre qualité indispensable pour être performant en mathématiques (supérieures), c’est la flexibilité [36].

[36] Voir l’article suivant déjà mentionné : “Success and failure in mathematics : the flexible meaning of symbols as process and concept”, par E. Gray et D. Tall, *op cit.*

Plus concrètement, les cours de mathématiques peuvent servir à développer ces compétences transversales :

a) Raisonner

b) Résoudre des problèmes et modéliser

c) argumenter

d) communiquer

Quant aux objectifs spécifiques visés par le cours de mathématiques, ils dépendent de l'orientation des études dont les programmes peuvent être confectionnés selon une lecture épistémologique influencée, de façon éventuellement variable, par les deux manières de penser les connaissances, à savoir par le réalisme et par l'instrumentalisme.

En guise d'exemple, voici la liste des objectifs fondamentaux que je présentais aux étudiants lors du premier cours de mathématiques en première année de Bac en Ingéniorat de Gestion :

- la connaissance de résultats
- l'utilisation de l'outil mathématique en économie et en gestion
- la modélisation et la résolution de problèmes concrets rencontrés dans le monde des affaires

mais aussi, une certaine façon

- de poser les problèmes en y discernant ce qui est possible de ce qui ne l'est pas
- d'appréhender la réalité avec un esprit critique, pour savoir d'où vient ce que l'on pense être vrai
- d'acquérir un raisonnement scientifique, précis et rigoureux
- de développer un esprit d'analyse, de synthèse et d'abstraction.

En résumé, il importe que le cours de mathématiques remplisse, dans une mesure pouvant varier en fonction de son contexte, les trois fonctions qui peuvent lui être attribuées (Cazzaro *et al.* [37], p. 63) :

1) *une fonction de formation de l'esprit destinée à rendre les jeunes gens capables de réagir rationnellement devant une situation problématique*

[37] Voir le livre *Structurer l'enseignement des mathématiques par des problèmes*, par Cazzaro J.-P. – Noël G. – Pourbaix F. – Tilleuil P., De Boeck, Bruxlles, 2001, 413 pages.

2) *une fonction utilitaire destinée à munir tout individu des savoirs et des savoir-faire dont il aura besoin dans ses activités professionnelles ou tout simplement pour comprendre ce qui se passe autour de lui,*
3) *une fonction culturelle destinée à fournir aux hommes et aux femmes les informations qui leur permettront de situer les mathématiques dans l'évolution intellectuelle de l'humanité.*

En d'autres termes, je pense, avec conviction, que les cours de mathématiques sont des plus opportuns pour offrir aux étudiants la possibilité d'acquérir, exploiter et développer des savoirs, des savoir-faire, des savoir-être, des habiletés, des capacités, bref des compétences, dans les domaines de la résolution de problèmes quantitatifs, de la modélisation et du raisonnement. En ce sens, ils jouent, à mon avis, un rôle fondamental dans toute formation universitaire orientée dans des domaines présentant ou exploitant des théories mathématiques. En effet, en plus de transmettre des connaissances utiles, les cours de mathématiques se révèlent précieux sur le plan métacognitif : ils permettent aux étudiants d'être confrontés à des démarches intellectuelles qui leur faciliteront grandement la vie dans la suite de leurs études universitaires et, ultérieurement, dans leur carrière professionnelle. Par exemple, peut-on imaginer un financier de haut vol ne maîtrisant pas à la perfection des données numériques à traiter, incapable d'interpréter correctement des graphiques, ne comprenant que superficiellement les modèles stochastiques (souvent sophistiqués) qu'il utilise quotidiennement, ou encore imprécis, peu profond ou peu rigoureux dans ses raisonnements ?

Au surplus, et cela me semble primordial au niveau de la formation des futurs diplômés universitaires (qui, je le rappelle, seront les élites intellectuelles de demain), les mathématiques facilitent [38] l'acquisition de dispositions d'esprit indispensables pour performer au plus haut niveau dans des activités demandant de la rigueur et traitant de données quantitatives.

---

[38] Par souci d'objectivité, je signale que tout le monde n'est pas d'accord avec cette prise de position, jugée quelquefois apologétique ; par exemple, certains psycho-pédagogues se méfient de « *conclusions hâtives concernant l'effet formateur de telle ou telle discipline* » (Frenay *et al*,, p. 39) et illustrent leurs propos par l'exemple des mathématiques.

6. Les exigences à l'Université

Les exigences à l'Université sont très variables : elles dépendent de multiples facteurs : du cours, du contexte, de l'enseignant, du règlement facultaire, …. [39]. .

Je vais reprendre l'échelle SOLO pour préciser ce que j'entends à propos des exigences dans l'enseignement universitaire dans un cours de mathématiques.

On pourrait dire, en simplifiant la réalité [40], qu'il existe une sorte de « bijection » entre les mentions qualitatives prévues dans le règlement universitaire et les niveaux de l'échelle SOLO.

Les niveaux préstructurel et unistructurel me paraissent insuffisants, gravement en ce qui concerne le premier des deux. Le niveau intermédiaire multistructurel est passable : il pourrait correspondre à ce qui était jadis une « balance » et entraîne actuellement une réussite avec une mention « faible ». Seuls les deux niveaux les plus hauts sur cette échelle, à savoir le relationnel et l'abstrait étendu, peuvent être assimilés, pour moi [41], à de véritables réussites à l'Université, le relationnel à une courte réussite sans problème, et l'abstrait étendu à une belle réussite, éventuellement avec un grade élevé.

Le tableau suivant résume et précise cette comparaison :

Echelle SOLO	**Echelle qualitative à l'Unif.**	**Echelle numérique à l'Unif.**
Préstructurel	Insuffisance grave (IG)	De 0 à 7
Unistructurel	Insuffisance (I)	8 ou 9
Multistructurel	Passable (P)	10 ou 11
Relationnel	Satisfaisant (S) ou Bien (B)	De 12 à 15
Abstrait étendu	Très bien (TB) ou Excellent (E)	De 16 à 20

Je vais illustrer ces propos par un exemple concret qui a été inspiré par un cas réel.

[39] Elles se modifient au cours du temps, notamment en fonction des décrets ministériels.

[40] Il est indéniable que cette comparaison peut être critiquée, car le problème de toute évaluation est particulièrement complexe : c'est clairement un problème multicritère. Il est assez paradoxal de constater dans la pratique qu'est très souvent utilisée une seule échelle d'évaluation numérique (par exemple, à l'aide d'une note comprise entre 0 et 20), et que cette dernière est même linéaire, ce qui n'a aucun sens dans ce contexte.

[41] Depuis mon départ à la retraite, la cote de réussite est fixée à 10 sur 20 et il n'existe pratiquement plus de distinction entre une « vraie résussite » (avec une cote au moins égale à 12) et une « balance » (avec une cote de 10 ou de 11). Sans être nostalgique, je me contente de signaler que les deux solutions présentent des avantages et des inconvénients.

Exemple. Soit un futur ingénieur de gestion de deuxième année du Master (donc dans sa cinquième année à l'Université) qui exploite, dans son travail de fin d'études (TFE, en abrégé), des parties du cours de statistique descriptive dispensé lors de la première année de Bachelier. Plus particulièrement, il fait appel, de façon récurrente, à un coefficient faisant intervenir la quatrième puissance de l'écart-type, c'est-à-dire le carré de la variance ; il effectue de nombreux calculs de cet indice à l'aide d'un ordinateur, et ses calculs sont corrects. Mais, chaque fois qu'il fait référence (dans son texte, mais également lors de sa présentation orale et de sa défense) au coefficient en question, il confond la variance d'une série statistique avec son écart-type. Pareille confusion est-elle « grave » ? [42] Les avis peuvent être partagés là-dessus. Certains pourraient penser que l'essentiel, pour un futur ingénieur, consiste à effectuer des calculs corrects, ce qui est réalisé grâce à l'exploitation d'un logiciel adéquat. Mais je ne partage nullement cette appréciation laxiste, car un examen de cette situation au moyen de l'échelle SOLO nous place clairement dans l'unistructurel. En effet, dans ce cas, une seule approche est utilisée correctement, à savoir le calcul par ordinateur du coefficient. Il y a par contre méconnaissance d'autres procédures : par exemple, si l'étudiant devait calculer manuellement le coefficient, il aboutirait à ces résultats erronés puisqu'il part d'une formule fausse. Bien plus, d'après son TFE, cet élève ignore la différence entre les deux concepts fondamentaux, pour un scientifique, de variance et d'écart-type ; il n'a dès lors pas compris pourquoi on introduit l'un et l'autre de ces indices, ni dès lors la signification réelle de ceux-ci ; il ne se soucie pas non plus des incohérences potentielles de son travail au niveau des unités des données traitées et il est vraisemblable qu'il utilise son ordinateur comme une « boîte noire », de façon aveugle, sans réfléchir, par exemple, à l'ordre de grandeur des résultats obtenus. Bref, d'après mon analyse, l'étudiant n'a pas bien compris les fondements de la statistique : en ce qui concerne précisément la partie « statistique » de son TFE, le travail me semble insuffisant, surtout pour un futur diplômé Ingénieur par une Université.

Pour clore cette section, je vais m'interroger quelque peu sur les taux de réussite à l'entrée dans l'enseignement universitaire [43].

Les échecs enregistrés par les jurys des premières années sont assurément très nombreux. Ils peuvent toutefois s'expliquer par diverses raisons déjà évoquées au sein des pages précédentes :

---

[42] Bien sûr, il existe des choses bien plus « graves » dans la vie. Mais je me place ici d'un strict point de vue d'un professeur de mathématiques à l'Université dans une section formant de futurs ingénieurs.

[43] Le cas des années ultérieures à la première année ne fait pas spécialement l'objet de ce travail.

- le décalage substantiel entre les enseignements secondaire et universitaire ;
- le niveau requis par l'enseignement universitaire qui prolonge le secondaire et est inévitablement plus exigeant que ce dernier ;
- la spécificité des cours de mathématiques, cette matière restant pour certains élèves abstraite, fort (voire trop) rigoureuse et « vide de sens » ;
- le fait que, de nos jours, la plupart des étudiants sortant du secondaire souhaitent tenter leur chance à l'Université, même ceux dont le choix des études s'est fait « un peu au hasard » et ceux qui ont déjà éprouvé des difficultés lors de leurs études antérieures. Ainsi, certains élèves ont opté, par élimination successive, pour des sections faibles en humanités, ce qui ne les a certainement pas bien préparés pour leur passage dans le supérieur ; de plus, quelques-uns ne choisissent pas positivement, c'est-à-dire « par vocation », la section dans laquelle ils s'inscrivent à l'Université et, en conséquence, ne sont pas suffisamment motivés dans leur travail. De la sorte, de tels étudiants ne font pas toujours preuve d'assez de détermination et ne sont pas prêts à consentir suffisamment d'efforts pour surmonter les difficultés qu'ils vont (probablement) rencontrer dans le supérieur.

Devant ce constat, qui est un phénomène général, la tentation est grande pour certaines autorités de la Société, comme des politiciens ou des responsables universitaires, de vouloir réduire les exigences des cours universitaires, et spécialement ceux de mathématiques. Elles ont en effet le souci d'attirer à l'Université, le plus grand nombre possible d'étudiants et de chercher à les y faire réussir.

Ce courant part probablement d'une bonne intention au niveau de la société, à savoir donner la chance à chaque individu d'accéder à une certaine élite intellectuelle, quels que soient ses origines, son parcours et son milieu de vie. Il peut aussi, plus pragmatiquement, s'expliquer peut-être le fait que les Universités sont subsidiées au nombre d'inscrits.

Je ne pense toutefois pas que la réduction des exigences à l'Université et le remplacement de cours réputés difficiles par d'autres jugés plus faciles, moins « intellectuels », notamment moins théoriques, soient une bonne solution pour les générations futures qui devront diriger, politiquement, économiquement ou encore socialement, notre Monde.

Annexe A : Métacognition et mathématique, par **Melvyn MAININI** [44]

A.1. Généralités

Le concept de *métacognition*, tel qu'il est présenté dans cet article [45] est apparu aux Etats-Unis au début des années 1970 dans le cadre de recherches sur le fonctionnement de la mémoire. La structure même du mot *métacognition* fait référence à la cognition sur la cognition. Plus précisément:

Définition. La métacognition désigne « une réflexion de deuxième niveau qui consiste, pour l'apprenant, à élaborer des connaissances sur la manière dont lui-même construit ses connaissances ». ([GRA]). Elle « fait référence à la connaissance qu'on a de ses propres processus cognitifs et de leurs produits ou de ce qui leur est relié […] La métacognition se rapporte, entre autres choses, au contrôle actif, à la régulation et à l'orchestration de ces processus en fonction des objets cognitifs et des données sur lesquels ils portent » ([FLA], p. 232).

Selon J. H. Flavell, l'un des pionniers dans le domaine, la métacognition s'articule donc autour de ces deux points :

- le *composant déclaratif* ([CRA], p.203) a trait aux connaissances de ses propres connaissances. [46]

---

[44] Cette annexe a été rédigée par M. Mainini qui m’a aimablement autorisé à reproduire son travail. Celui-ci est une adaptation d'un chapitre du mémoire intitulé « *Vers une systématisation de la formation à la résolution de problèmes mathématiques* », réalisé par l'auteur dans le cadre du travail de candidature et défendu au Campus de Walferdange de l'Université du Luxembourg en juin 2009. Cette épreuve est organisée par le Ministère de la Culture, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche du Grand Duché de Luxembourg qui a également donné son autorisation pour la publication de ce travail.

[45] Un concept très proche de la métacognition est celui d'*intelligence abstraite* décrit par J. Piaget dans le cadre de sa théorie du développement intellectuel. Par opposition à l'intelligence pratique, qui est de nature sensorielle et agit sans prendre conscience de ses actes, l'intelligence abstraite, qui lui fait suite, est de nature cognitive et opératoire, et a quant à elle acquis la capacité de comprendre ce qu'elle fait. A. Robert et J. Robinet ajoutent d'autres évocations de mécanismes proches de la métacognition dans les travaux de Piaget : citons un ouvrage dont le titre parle de lui-même comme « *La prise de conscience* » (1974), ou rappelons l'idée de l'abstraction réfléchissante comme moteur de la construction des connaissances. Ou encore, lorsqu'ils réfléchissent à la construction des mathématiques par les mathématiciens, Piaget et Garcia prétendent que l'analyse réflexive fait partie intégrante du travail du mathématicien à certains moments de réorganisation. (Robinet [ROB], p. 152).

[46] Pour lever dans la suite toute ambiguïté à ce sujet, précisons que contrairement au « savoir », qui est socialement et culturellement déterminé, les « connaissances » font référence à des éléments du patrimoine cognitif d'un individu ([JON], pp.68-69), de ses processus cognitifs, ainsi que de ses états

- le *composant exécutif* ([CRA], p. 204) opère au niveau de la régulation active, consciente et délibérée de ces processus en vue de la réalisation d'un objectif déterminé : on parlera de *régulation métacognitive*.

Cette dichotomie a été reprise par de nombreux auteurs traitant de la métacognition, et a mené à deux champs de recherche distincts : le premier, lié à la nature et au développement des connaissances métacognitives, fut emmené par Flavell, et le second, axé sur les processus de contrôle et de régulation métacognitive des activités, fut initié par A. Brown et ses collaborateurs.

S'appuyant en sus sur divers travaux théoriques en science de l'éducation, D. Leclercq et M. Poumay ont proposé une définition plus opérationnelle de la métacognition ([LEC2], p.9 ou [LEC], chap.6): ils distinguent également les deux composants de la métacognition mentionnés ci-dessus - jugement et analyse de ses processus cognitifs et productions d'une part, et régulation d'autre part - en précisant en outre que ces opérations mentales peuvent avoir lieu avant, pendant ou après une situation d'apprentissage ou d'évaluation, et qu'elles sont observables via des performances, c'est-à-dire des comportements ou conduites de la part des apprenants.

Analysons davantage chacun des deux volets de la métacognition, en y incluant ces divers aspects.

A.2. Connaissances métacognitives

Les connaissances métacognitives (ou *métaconnaissances*) d'un individu portent sur ses propres processus cognitifs, comme par exemple la mémorisation, le raisonnement ou l'attention, et sur les produits de ces processus, dont bien sûr ses propres connaissances. Flavell distingue trois champs sur lesquels peuvent porter les métaconnaissances ([CRA], pp. 203—204 :

- sur les personnes et sur soi-même : selon T. Guldimann, elles concernent principalement la « perception de sa propre personne en tant qu'apprenant qui conduit l'individu à se poser des questions sur ce qu'il est en train d'apprendre, sur la qualité des conditions de travail et sur le processus d'apprentissage qui mène ou non au

---

affectifs et tous autres facteurs favorables et défavorables à ces processus : ces connaissances seront dites *connaissances métacognitives.*

succès » (cité dans [HDB]); ce sont aussi les représentations qu'un apprenant a au sujet d'autres apprenants en les comparant à lui-même et au sujet des connaissances universelles ; on peut enfin y ajouter les connaissances relatives à ses propres motivations et à ses émotions : De Corte et Verschaffel parlent dans ce cas de *métacognition conative* ;

- ces connaissances portent sur la difficulté, la familiarité et le type de traitement exigé par la tâche ; elles amènent l'individu à se poser des questions sur la façon d'aborder la tâche et sur les connaissances prérequises à cet effet ; plus généralement, elles servent donc à distinguer et à comparer différentes activités à effectuer ;
- sur les stratégies : ces connaissances concernent la nature et l'utilité de chaque stratégie en tant que moyen de réaliser tel ou tel but ; elles portent sur les manières les plus efficaces de conduire une activité à son but, c'est-à-dire sur les méthodes de travail.

Que ce soit en situation d'apprentissage ou d'évaluation, ces trois types de connaissances métacognitives sont forcément interactifs.

Exemple. « Je suis meilleur en géométrie qu'en probabilités » correspond à une interaction entre les connaissances métacognitives relatives à ma propre personne et aux caractéristiques des tâches ([CRA], p. 204).

Conformément à la définition de Leclercq et Poumay ([LEC], chap. 6), les métaconnaissances peuvent être mobilisées soit en amont de la tâche à réaliser, soit pendant, soit en aval de la tâche.

Exemples. La prédiction de réussite de la tâche s'effectue a priori.
Le degré de certitude ou l'auto-évaluation s'effectuent après coup.

A.3. Régulation métacognitive

L'on distingue trois types de régulation métacognitive. Le premier est centré sur les activités de l'apprenant.

1) Régulation métacognitive des activités. Elle porte essentiellement sur la capacité de l'individu à planifier et contrôler délibérément ses propres processus cognitifs en vue de la réalisation d'un but ou d'un objectif déterminé. Ces mécanismes se réalisent à travers l'emploi de *stratégies d'autorégulation cognitive* (ou *stratégies métacognitives*). A la suite des travaux de Brown [47], P. Pintrich et B. Zimmerman, J. Focant et J. Grégoire ([CRA], pp. 204 - 207) en distinguent quatre [48] : la *détermination du but*, la *planification*, le *contrôle* et l'*ajustement*. Ainsi donc

- par la détermination du but, l'apprenant décide du point d'aboutissement, de l'état final ou recherché des procédures qu'il va mener ; ce but reste présent à tout moment de l'entreprise cognitive, et sert de point de référence qui permet, en cours de tâche, d'évaluer et de guider les actions à mener ;
- la stratégie de planification se réfère à l'élaboration d'un plan d'action ; l'apprenant y envisage les procédures à mettre en oeuvre afin d'atteindre les buts déterminés ;
- durant la mise en oeuvre du plan d'action, la stratégie de contrôle permet à l'apprenant de surveiller et d'évaluer le cours de l'action et ses résultats ; Focant et Grégoire postulent l'existence de quatre types de contrôle, complémentaires car ils visent la détection de types d'erreurs différents :

- le *monitoring* désigne cette « veille constante, inconsciente ou semi-consciente, qui déclenche en nous un signal d'alerte lorsque nous nous rendons compte […] de l'existence d'un problème non clairement défini au moment du contrôle ([CRA], p.205) ; par opposition, les trois types de contrôle suivants identifient une erreur précise ;
- le *contrôle de la poursuite du but* correspond à un jugement conscient de l'adéquation entre intention et mise en oeuvre ;
- la *révision des étapes menées* est un contrôle périodique du bien-fondé des procédures en cours, la question étant donc de savoir si la procédure est menée avec raison, non pas si elle est menée correctement ;
- la vérification des résultats s'effectue également de manière périodique à la recherche d'erreurs survenues dans l'application des procédures prévues par le plan d'action ;

[47] A. Brown distingue les *opérations d'anticipation* qui consistent à planifier les étapes de la démarche et à prévoir d'éventuels résultats, les *opérations d'évaluation-régulation* qui, au cours de l'activité, consistent à vérifier si l'on se dirige bien vers le but escompté, et les *opérations d'évaluation terminales* qui consistent à comparer le résultat de l'activité au but visé. Le premier type d'opérations correspond aux stratégies de *détermination du but* et de *planification* présentées ici, et les deux autres types aux stratégies de *contrôle* et d'*ajustement*.

[48] Dans [GAR], J. Garofalo et F. Lester proposent un cadre analogue, inspiré des travaux de Sternberg, dans lequel peuvent rentrer toutes les opérations métacognitives des apprenants : orientation (identification du problème), organisation (planification et choix des actions), exécution, vérification (séparément des deux premières phases et de la troisième) [ROB], p. 153).

- la stratégie d'ajustement a pour but d'utiliser les informations obtenues par les stratégies de contrôle pour adapter ses actions et l'attribution de ses ressources ; elle varie en fonction du type de contrôle appliqué : si le monitoring donne un signal d'alerte suite à un constat d'anormalité, l'apprenant fait le point de la situation en analysant plus systématiquement cette impression via l'un des trois autres types de contrôle ; s'il s'éloigne du but poursuivi, il peut modifier son action déjà menée ou planifiée; de même, s'il constate une erreur ou l'application d'une procédure erronée, il tente de la corriger et reprend la mise en oeuvre du plan depuis l'étape de correction; néanmoins, dans les deux cas, il peut s'avérer nécessaire de repasser par une nouvelle phase de planification qui donnera lieu à un second contrôle lors de sa mise en oeuvre.

Parmi ces stratégies d'autorégulation cognitive, Focant et Grégoire affirment que la stratégie de contrôle est la plus complexe d'entre toutes, pour deux raisons notamment : d'une part parce qu'elle implique diverses sous-stratégies, et d'autre part parce que les comportements sous-jacents à un contrôle efficace ne se laissent pas appréhender facilement. Néanmoins, il s'agit également de la stratégie la plus utile pour traiter de la complexité d'une tâche. En effet, le contrôle « permet aux élèves de repérer eux-mêmes leurs erreurs et leurs contradictions, et donc de se questionner » ([ROB], p. 158). Mais il présente un autre avantage de poids : alors que généralement les performances en planification déclinent fortement à mesure que la charge cognitive exigée par une tâche augmente, la stratégie de contrôle semble quant à elle indépendante du niveau de complexité. En pratique, un contrôle périodique de la mise en oeuvre d'une séquence partielle d'actions - donnant lieu à une planification d'une nouvelle séquence partielle en fonction des observations obtenues, jusqu'à atteindre le but visé - permet de décomposer une tâche complexe en composants exigeant chacun une charge cognitive moindre. Ainsi donc « le contrôle permet […] de traiter la complexité en induisant des boucles plus courtes dans la circularité des mécanismes autorégulateurs » ([CRA], p. 217).

A l'instar de C. Carver et M. Scheier, concluons donc que les « mécanismes autorégulateurs fonctionnent de manière circulaire », et ce à plusieurs égards. « Le fonctionnement interactif et dynamique de l'autorégulation agit par des boucles de rétroaction basées sur un élément de référence que constitue le but » (cités dans [CRA], p. 207).

2) Régulation métacognitive du but. Le deuxième type de régulation métacognitive porte sur les buts fixés par l'apprenant. Au moment de l'ajustement du plan d'action suite à un éloignement du but à atteindre, l'apprenant peut soit - comme esquissé ci-dessus - procéder à un nouveau cycle de régulation de son activité conditionnée en permanence par l'atteinte du but visé, soit prendre une mesure plus radicale et modifier l'objectif fixé à l'origine : cette régulation métacognitive du but peut elle aussi opérer de manière cyclique.

3) Régulation métacognitive des connaissances métacognitives. Une fois que la mise en oeuvre du plan d'action - éventuellement ajusté au fur et à mesure - est certifiée exempte d'erreurs et conforme au but visé par l'apprenant, un troisième type de régulation métacognitive peut être mis à contribution, à savoir la régulation métacognitive des connaissances métacognitives. A l'inverse de la régulation des activités ou des buts, celle des métaconnaissances ne cherche pas à influencer le résultat de la tâche en cours, mais agit au profit de l'issue de tâches ultérieures. L'apprenant « prend distance par rapport à la tâche menée, et réfléchit à ce que la tâche lui a appris par rapport aux diverses catégories de connaissances métacognitives. Il peut évaluer l'efficacité des stratégies de résolution qu'il a menées, et en déduire si elles sont adaptées ou non à ce genre de situations. Il peut réfléchir aux caractéristiques de la tâche qui l'ont rendue difficile ou facile. De situation en situation, ces réflexions permettent un affinement progressif de son répertoire de connaissances métacognitives » ([CRA], p. 207).

A.4. La métacognition au service de la résolution de problèmes

La métacognition peut être entendue dans son double rôle de moyen et de fin pour l'apprentissage de la résolution de problèmes. Ainsi, d'une part, les activités métacognitives constituent un moyen essentiel, à titre général ou individuel, pour s'orienter et progresser à bon escient dans la démarche de résolution d'un problème. D'autre part, la métacognition est une fin en soi car une formation à la résolution de problèmes, comme tout apprentissage à caractère scientifique, exige et développe « un niveau réflexif quant à la constitution et au contrôle des connaissances » ([ROB], p. 161). Ces deux aspects de la métacognition sont étroitement liés. En effet, les métaconnaissances au sujet des mathématiques « contribuent à aider les mises en fonctionnement mathématiques. Mais comme en même temps toute activité mathématique contribue à alimenter la réflexion qu'a celui qui la mène sur les mathématiques, et à renforcer l'image qu'il en a, les deux niveaux ci-dessus sont en interaction étroite » ([ROB], p. 161).

M. Grangeat définit les quatre caractéristiques suivantes comme étant porteuses de régulations métacognitives (cité dans [HDB]) :
1) L'apprenant est invité à réaliser une tâche assez complexe et pouvant être réalisée de manière réfléchie, notamment pas uniquement par des automatismes ou des tâtonnements.
2) L'apprenant peut effectuer des choix stratégiques pour atteindre des objectifs explicites et compris.
3) L'apprenant peut se référer à des transcriptions de son activité d'apprentissage.
4) L'apprenant peut bénéficier d'interactions langagières pour discuter de stratégies efficaces.

Par ailleurs, selon A.-M. Doly, la métacognition présente, entre autres intérêts éducatifs, l'avantage d'accroître les chances de transférabilité d'une habileté d'un domaine à un autre, de rendre l'apprenant plus autonome dans la gestion des tâches et dans les apprentissages - « être autorégulé et savoir se faire aider » - , et de faciliter le développement d'une motivation à apprendre et la construction d'un concept de soi comme apprenant ([GRA]). Focant et Grégoire ajoutent au sujet de la régulation métacognitive : « en tant que processus de direction et de gestion de ses propres activités mentales et de ses comportements, elle constitue le moyen d'optimaliser son stock de connaissances en cours de tâche » ([CRA], p. 204). Autant d'aspects qui conditionnent la réussite en résolution de problèmes.

On notera dès lors que la métacognition et l'autorégulation cognitive en particulier constituent des outils précieux propices à la résolution de problèmes mathématiques. Signalons à ce propos que l'importance de l'autorégulation dans la résolution de problèmes a déjà été amplement documentée durant les années 1980 par Schoenfeld ([SCHOE]).

A.5. Difficultés liées à la métacognition

Tout comme dans le cas des connaissances disciplinaires, sinon davantage, des lacunes au niveau des métaconnaissances peuvent se révéler handicapantes au niveau de la résolution de problèmes. La source principale de difficultés au niveau de la métacognition provient néanmoins de la mise en oeuvre de stratégies d'autorégulation cognitive.

En effet, d'après L. Vygotski, le développement des stratégies autorégulatrices se produirait « comme une internalisation progressive d'une régulation externe » ([CRA], p. 212), typiquement induite par l'enseignant en contexte scolaire. Même si l'âge clé de l'acquisition des comportements autorégulés fait débat - certains spécialistes se contredisent d'ailleurs à ce sujet - l'on peut considérer la période de l'adolescence comme particulièrement favorable à ce développement [49]. Il n'est donc pas étonnant de constater que les stratégies autorégulatrices sont étroitement liées à la performance scolaire. De nombreuses études ont ainsi établi que les élèves en difficulté d'apprentissage, contrairement aux élèves performants, présentent souvent des déficiences majeures quant aux stratégies d'autorégulation cognitive, notamment en ce qui concerne la planification, les différents types de contrôle et les ajustements correspondants. Ces stratégies ne sont pas mises en oeuvre spontanément par ces élèves dans la réalisation d'une tâche complexe ; de plus, ces élèves « sont très résistants à l'idée que leur choix des étapes puisse être erroné, et ne parviennent à réaliser un contrôle de la poursuite de l'objectif et une révision des étapes menées que très superficiellement » ([CRA], p. 212). Par ailleurs, selon Chartier et Lautrey dans [CHA], les sujets réflexifs bénéficieraient plus d'un entraînement métacognitif que les sujets impulsifs.

Ces constats dressés en relation avec la performance scolaire sont révélateurs d'une situation pour le moins alarmante : E. De Corte et L. Verschaffel rapportent que lors d'une étude menée par Schoenfeld, il a été constaté que les activités d'autorégulation cognitive sont totalement absentes dans plus ou moins 60 % des tentatives de résolution ! « La stratégie typique des étudiants se présente comme suit : lecture du problème et mise en route rapide d'une démarche ; ensuite, les étudiants s'accrochent à cette façon de faire sans considérer d'alternative même lorsqu'il est évident qu'aucun progrès n'est réalisé » ([CRA], p. 29).

Aussi une approche générale de résolution devra-t-elle refléter les mécanismes de la métacognition décrits plus haut, de sorte à exploiter au mieux ses effets bénéfiques et variés, sans négliger « l'impact, sur les composantes cognitives de l'autorégulation, des représentations motivationnelles telles […] la perception de soi, […] la valeur accordée à la tâche ou au domaine, les croyances liées aux causes des échecs et des réussites » ([CRA], p. 207).

D'autres difficultés, d'ordre didactique, sont liées aux observations pratiques des activités métacognitives. Selon Robert et Robinet, il s'avère très délicat de tirer des informations fiables à partir de questionnements, de productions d'élèves ou de comportements observés en

[49] Il est question ici des compétences autorégulatrices décrites ci-dessus, car pour Wong par exemple, elles s'acquièrent très précocement, dès 5 ans, mais sont alors basées sur un comportement mené par essais-erreurs ([CRA], p. 212).

situation, d'autant plus qu'un « rapport verbal en cours de tâche peut avoir un effet sur le déroulement de la tâche (positif, négatif ou neutre) » ([CRA], p. 208). Qui plus est, des études ont montré un « manque de concordance entre ce qu'un élève dit sur sa manière d'apprendre ou de réaliser des tâches et ce qu'il fait réellement » ([CRA], p. 208). Par ailleurs, en supposant possible un « entraînement métacognitif » ([ROB], p. 150), il est très ambigu de savoir si le message envoyé est perçu de la façon escomptée par les apprenants. D'autres questions concernent la conception même d'un tel entraînement, ou la part qui lui est due si l'on constate effectivement une amélioration des conduites auprès des élèves.

Bibliographie

- [CHA] Chartier D. – Lautrey J., L'apprentissage de stratégies métacognitives, *L'Orientation scolaire et professionnelle*, 21, n°1, 1992.
- [CRA] Crahay M. - Verschaffel L. - De Corte E. - Grégoire, J., *Enseignement et apprentissage des mathématiques, Que disent les recherches psychopédagogiques*, de Boeck, Bruxelles, 2005.
- [FLA] Flavell J. H., Metacognitive aspects of problem solving, *The nature of intelligence*, L. B. Resnick, Hillsdale (New Jersey), pp. 231 - 236, 1976.
- [GAR] Garofalo J. - Lester F., Metacognition, cognitive monitoring and mathematical performance, *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, n° 3, 1985, pp. 63 - 176.
- [GRA] Grangeat M. - Meirieu P., *La métacognition, une aide au travail des élèves*, éditeur, Paris, 1999.
- [HDB] Henry V. - Bair J. - Delagardelle J.C., Les narrations de recherche en tant qu'activités métacognitives dans l'enseignement des mathématiques, *Transfert*, n° 5, Luxembourg, Hiver 2007.
- [JON] Jonnaert J., *Compétences et socioconstructivisme*, De Boeck, Bruxelles, 2003.
- [LEC] Leclercq D., *Psychologie éducationnelle*, Editions de l'Université de Liège, 2005.
- [LEC2] Leclercq D., La métacognition: d'une définition opérationnelle - des pratiques en 1er Bac en psychologie, *CDS*, Université de Liège, 2008.
- [ROB] Robert A. - Robinet J., Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16, n° 2, 1996, pp. 145 - 176.

- [SCHOE] Schoenfeld A.H., *Mathematical problem solving,* Academic Press Inc., Orlando, 1985

Annexe B : Remerciements professionnels

Arrivé à l'âge de la retraite, je mesure l'immense chance que j'ai eue de pouvoir exercer un métier me permettant de me consacrer sans réserve à l'une de mes deux passions [50], les mathématiques et leur enseignement, et de « travailler » [51] pendant plusieurs décennies au sein d'une institution, l'Université de Liège, à laquelle j'ai été (souvent) content et fier d'appartenir.

J'ai la faiblesse de croire [52] que ma carrière académique n'a pas été (globalement) trop mauvaise. Mais je me rends parfaitement compte que cette (présumée) réussite aurait été impossible sans ma rencontre avec de nombreuses personnes à qui je tiens à rendre hommage en ces lignes.

Cet exercice périlleux [53] me donne l'opportunité de revivre par la pensée des bons (et nombreux) moments de ma carrière. Accessoirement, cela me permettra de faire connaître des idées qui me sont chères à propos des mathématiques et de leur enseignement, ainsi que d'émettre pour le futur quelques vœux basés sur mon expérience professionnelle.

Je prends la précaution de mentionner que je pense tout ce que j'écris [54]. Par ailleurs, je demande aux personnes que je blesserai par mes propos de bien vouloir être indulgente avec moi et de pardonner mon côté parfois abrupt, mais toujours sincère (et qui, par ailleurs, n'est peut-être pas toujours habile, ...mais je n'ai jamais cherché à être diplomate!).

L'ensemble des personnes que je souhaite remercier est d'effectif assez grand [55]. Aussi, pour structurer [56] un peu ce texte, j'ai décidé de le partitionner [57] en des sous-ensembles. J'ai choisi

[50] L'autre étant la formation et la pratique du tennis.
[51] Ce n'était pas pour moi un travail contraignant, mais bien un passe-temps fort agréable.
[52] Je suis bien conscient de la subjectivité de cet avis.
[53] D'une part, il ne me semble guère facile d'écrire tout ce que l'on ressent et, d'autre part, je crains d'oublier des collègues qui ont compté pour moi.
[54] Mais, évidemment, je n'écris pas forcément tout ce que je pense!
[55] Etant un convaincu défenseur des hyperréels utilisés en Analyse Non Standard, je ne suis pas loin de penser que ce nombre peut être assimilé à un nombre « infiniment grand »!
[56] Le concept de structure n'est-il pas un des plus importants en mathématiques ?
[57] En réalité, je vais considérer une quasi-partition ainsi que le lecteur le découvrira en cours de lecture.

un ordre d'énumération mathématique, donc [58] « esthétique », puisque leurs effectifs évoluent en croissant, selon une progression géométrique, ...au début tout du moins.
Conformément avec ce qui précède, je commence par un singleton, c'est-à-dire un sous-ensemble composé d'un seul élément. Mais celui-ci est "de taille" puisqu'il s'agit du premier Vice-Recteur Albert Corhay [59]. Je suis attaché à une hiérarchie bien établie, non seulement parce j'aime (par déformation professionnelle, peut-être) tout ce qui est structuré, mais aussi parce j'ai souvent constaté ceci : avoir des personnalités fortes, qui œuvrent pour le bien commun, favorise (et est même peut-être nécessaire pour obtenir) de bons résultats. Ayant le privilège (lié à l'âge) d'avoir été le témoin direct de toute sa (brillante) carrière académique au sein du Département EAA, de la FEGSS puis de l'Université toute entière, je le considère avant tout comme un collègue, voire un ami, à qui j'aimais exposer mes idées, dont j'ai particulièrement apprécié l'accueil lors de mon passage du Département d'Economie à l'EAA; j'ai également été admiratif devant sa gestion des conflits (inéluctables, mais parfois délicats) quand il était aux commandes du Département EAA, puis de la Faculté EGSS : il les traitait, selon moi, avec beaucoup de courtoisie, de respect envers les personnes et, « l'air de rien », avec grande efficacité. Je considère sa présence ici comme un honneur et une certaine reconnaissance ... ce qui me réconforte car je dois avouer que je me suis parfois demandé, ces derniers temps, si les idées, auxquelles j'ai cru si profondément pendant toute ma carrière académique, n'étaient pas devenues un peu obsolètes; il m'a toujours accueilli chaleureusement lors de mes périodes de doutes et m'a réconforté. J'exprime un premier vœu: je lui souhaite, du fond du cœur, d'atteindre les sommets qu'il décidera d'escalader (et je connais ses aptitudes dans ce domaine). J'aimerais également qu'il continue à exercer ses talents en défendant les idées que nous avons eues (j'ose le croire) en commun. En particulier et tout simplement, pourquoi ne pas remettre à l'honneur la devise, adoptée par l'EAA quand il présidait cette dernière, à savoir « privilégier l'excellence » ?

[58] Par ce petit mot donc, je ne fais guère planer de mystère sur ma position par rapport au titre « Mathématiques, esthétiques ou pratiques ? » du présent séminaire. Je trouve qu'il s'adapte très bien à ma personne, puisque je crois avoir été toujours sensible à ces deux aspects des maths; mais, selon moi, le point d'interrogation peut être supprimé et la disjonction « ou » peut être remplacée par la conjonction « et ». Bien plus, j'ai acquis au fil des ans l'intime conviction que les mathématiques sont avant tout belles et que les bonnes mathématiques sont pratiques notamment parce qu'elles sont esthétiques. A ce propos, je recommande la lecture de l'article « Surprenante beauté des mathématiques », paru dans la revue *Losanges* (15, 2011, pp. 7 - 10) : je m'y positionne un peu sur la beauté des maths à mes yeux. Par ailleurs, le lecteur trouvera dans l'article « What is good mathematics ? », par T. Tao, paru dans *Bull. Amer. Math. Soc.* (44, 2007, pp. 623 - 634), ce qu'un (grand) mathématicien entend par « bonnes mathématiques ».
[59] Devenu Recteur depuis la rédaction de ce texte.

Le deuxième sous-ensemble est une paire [60], composée des deux “patrons” du service universitaire au sein duquel j’ai tout appris de mon métier; il s’agit de François Jongmans et Jules Varlet. Quand j’étais étudiant en première licence [61], j’ai eu véritablement un coup de foudre pour le cours de topologie générale dispensé par F. Jongmans. C’est pourquoi, je décidais de demander à celui-ci de diriger mon mémoire de licence. Il accepta de s’occuper personnellement de mon travail en m’orientant vers un article de V. Klee, auteur de grande renommée internationale (qui deviendra d’ailleurs Docteur Honoris Causa de notre Université.) dont les travaux allaient inspirer non seulement mon mémoire de licence, mais également ma thèse de doctorat, puis celle de l’agrégation de l’enseignement supérieur, chaque fois avec F. Jongmans comme promoteur (et avec notamment G. Valette, de l’ULB et la VUB, dans mon jury). Il va sans dire que F. Jongmans fut, pour moi, un véritable « père spirituel » : il m’a d’abord orienté, puis conseillé, encouragé, guidé, corrigé avec autant de patience que de persévérance et de compétences; sans son aide puis, très souvent, sa collaboration dans de nombreux articles rédigés en commun, il ne fait aucun doute que ma carrière n’aurait pas été ce qu’elle a été. Je lui en suis infiniment reconnaissant. C’était également, à mes yeux, un « grand patron » sachant construire et diriger toute une équipe. Il a eu, à plusieurs reprises, le « nez fin » en orientant son enseignement et les travaux de ses collaborateurs dans des directions de pointe et d’avenir (pour l’époque) : c’est ainsi, par exemple, qu’il fut un des premiers, à ma connaissance, à proposer des cours libres en recherche opérationnelle, ou encore de faire travailler ses élèves en géométrie convexe, théorie alors naissante; dans cette dernière, pas moins de cinq thèses doctorales (dans l’ordre chronologique, L. Bragard, J. Bair, R. Fourneau, A. Dessard, P. Goossens) furent défendues, avec, au surplus, de nombreux travaux post-doctoraux, sans compter les recherches sur le sujet de J. Vangeldère qui était notre aîné et de ce fait notre guide ; c’est assurément un bilan magnifique, d’autant plus que la charge principale de F. Jongmans ne se situait pas en Faculté des Sciences (où évidemment furent défendus les doctorats en question). Au total, il fut à la tête d’un service assez imposant et surtout soudé, au sein duquel il était fort agréable et enrichissant de travailler [62] ; pendant ces années “insouciantes”, de merveilleuses aventures

[60] On l’aura compris, la raison de la progression géométrique suivie par les effectifs de mes sous-ensembles est égale à 2.
[61] A l’époque, c’était en troisième année à l’Université puisqu’il n’y avait que deux ans de candidature (correspondant actuellement aux trois années de bachelier). Par ailleurs, le mot “licence” est devenu aujourd’hui “master”.
[62] Et j’ose l’avouer aujourd’hui, de jouer souvent au tennis.

ont été vécues par le groupe des “jeunes” [63], comme les séminaires bruxello-liégeois [64], les rencontres avec les amis français de Lille et Valenciennes [65], les séjours en congrès [66], ... Tout ceci eut évidemment une influence très positive, et même décisive, sur la suite de ma carrière.

J. Varlet, qui était l’associé de mon patron, n’a pas véritablement travaillé dans le même secteur de recherches que moi (il travaillait sur l’algèbre booléenne et des structures algébriques apparentées), mais il a partagé pendant plusieurs années (en début de carrière) le bureau se situant à côté du mien (au Val Benoît, à l’époque). J’étais donc bien situé pour pouvoir bénéficier de ses nombreux conseils et prendre exemple sur lui, sur ses méthodes rigoureuses de travail, sur ses grandes exigences intellectuelles (vis-à-vis de tous, lui y compris), sur sa constante quête de l’excellence. Assurément, j’ai été à très bonne école ! J’ai aussi beaucoup appris de mes deux patrons sur le plan pédagogique, auquel je tiens particulièrement. Ils étaient tous deux des « didacticiens » [67] de premier plan; il convient de se souvenir que J. Varlet était passé, fait que je crois assez rare, par toutes les étapes de l’apprentissage des mathématiques, puisqu’il avait été successivement instituteur, puis régent, licencié et enfin docteur en mathématiques. Ils ont tous deux construit des cours parfaitement adaptés à leurs auditoires, m’initiant par la même occasion à un type d’enseignement que l’on qualifie aujourd’hui de réaliste [68] et auquel je suis fort attaché. Ils étaient tous deux des modèles pour préparer consciencieusement leurs cours et les donner avec clarté. J’ai souvent essayé d’imiter J. Varlet qui, de sa belle écriture, remplissait systématiquement un tableau en commençant son cours à partir du coin supérieur gauche, pour atteindre le bord inférieur droit en fin de leçon : je dois reconnaître que je n’ai jamais (et de loin) atteint une telle performance. Ma passion pour l’enseignement des mathématiques m’a certainement été transmise par mes deux patrons!

---

[63] A cette époque, évidemment.

[64] Avec, entre autres, la participation régulière des bruxellois G. Valette et J.P. Doignon.

[65] P. Antoine, G. Coquet, J.C. Dupin, J.L. Valein.

[66] Avec notamment de mémorables excursions en Israël avec René.

[67] Au début de ma carrière, la didactique, telle qu’on la conçoit de nos jours, n’existait pas encore. Il est d’ailleurs à noter que tous deux n’ont pas eu besoin de certaines théories jargonnantes modernes pour réfléchir, avec profondeur et efficacité, sur l’enseignement des mathématiques et pour construire des cours qui restent, à mes yeux, des modèles à (essayer d’)imiter.

[68] Il s’agit, d’après le document « Les mathématiques de la maternelle jusqu’à 18 ans » du CREM (1995, pp. 32 - 33), d’un enseignement qui recherche ≪ l’équilibre entre les points de vue horizontal et vertical dans la classification de Treffers, [...sachant que] le point de vue horizontal est celui qui s’occupe du contexte, des sources familières des mathématiques, qui pousse aux observations, aux manipulations, [tandis que] le point de vue vertical est celui de l’architecture déductive des mathématiques, des enchaînements d’axiomes, définitions, lemmes, théorèmes et corollaires, celui qui privilégie le sens interne aux mathématiques. ≫

Le sous-ensemble suivant est, forcément, un 4-uple, c'est-à-dire composé de quatre éléments. Il s'agit des quatre conférenciers qui ont été invités à ce séminaire [69]. Je leur suis infiniment [70] reconnaissant d'avoir bien voulu, spontanément (apparemment) accepter cette invitation, ce que je prends pour un grand honneur : j'ai rarement eu l'occasion d'assister à un séminaire regroupant, en une après-midi, des intervenants dont la réputation n'est plus à faire et qui, à noter pour l'anecdote, proviennent (en quelque sorte) de quatre villes wallonnes différentes : Mons pour Guy Noël, Louvain-la-Neuve pour Jean Mawhin (même s'il est verviétois), Liège pour Adelin Albert (même si son cœur penche aussi vers Waimes) et Bruxelles pour Daniel Justens; il ne manque peut-être que Namur, mais cette ville est d'une certaine manière un peu présente grâce à l'organisatrice de cette manifestation ! J'aimerais présenter en quelques mots ce que j'éprouve pour chacun des conférenciers; cela traduira fort peu tous les sentiments qu'ils m'inspirent et la reconnaissance que je leur dois.

J'ai connu Guy dans les années 1980; depuis lors, nous nous sommes retrouvés très souvent, fréquentant un peu les mêmes assemblées : CA de la SBPMef, CA du CREM, journées, colloques et congrès sur les mathématiques et leur enseignement. Il m'a particulièrement conseillé et guidé lorsque je me suis occupé de la revue *Mathématique et Pédagogie* et a toujours été disponible pour donner ses précieux conseils tant sur le plan mathématique proprement dit que d'un point de vue plus technique; je pense en particulier à tout son travail informatique au CREM et à la SBPMef, et son aide déterminante pour les différentes revues de la SBPMef. De plus, j'apprécie beaucoup chez Guy sa curiosité, ses analyses toujours profondes [71], mais aussi sa gentillesse, sa générosité et son sens de l'humour (que j'essaie parfois maladroitement d'imiter). Guy incarne pour moi la Didactique des Mathématiques que j'aime; avec le regretté Nicolas Rouche, pour qui j'éprouvais également une estime colossale, ils ont créé tous deux ce que j'appelle l'« Ecole Belge de Didactique »; celle-ci est, selon moi, réfléchie (notamment basée sur une réflexion profonde relative aux mathématiques), simple (en particulier, exempte de verbiage pompeux), efficace (car fort « réaliste »), ouverte (réalisant singulièrement une synthèse très opportune entre les apports de didacticiens français et certains anglophones); j'y adhère pleinement et suis ravi de constater que de jeunes belges marchent dans cette même direction.

---

[69] Il est à noter que, conformément à la tradition universitaire, je n'ai pas choisi les intervenants ...mais que je n'aurais pas pu trouver mieux au niveau des compétences en mathématiques (dans leur domaine respectif), mais également dans l'art oratoire et sur le plan humain.

[70] Il ne fait pas de doute que j'apprécie cet adverbe qui est peut-être « hyperréel ».

[71] C'est lui qui m'a fait prendre conscience du fait qu'une des grandes forces des mathématiques consiste à traiter un problème jusqu'à « le tuer complètement » selon ses propres termes.

Je côtoie Jean depuis moins longtemps peut-être que Guy, mais je le connais aussi, de réputation bien sûr, depuis les années 1980 : il ne le sait pas encore, mais il a été déterminant pour le début de ma carrière puisque la préparation de ma leçon publique (en 1984) pour l'obtention du diplôme d'agrégé de l'enseignement supérieur s'est basée de façon décisive sur son cours d'analyse. Depuis quelques années, Jean est devenu mon ami et m'a demandé de le tutoyer ...ce que j'ai accepté de suite, car j'étais content d'avoir parmi mes intimes un réputé mathématicien et historien des mathématiques, mais aussi un talentueux orateur dont les exposés, teintés de multiples anecdotes truculentes, sont toujours captivants et instructifs, ainsi que, depuis peu, une « vedette » de la radio et du cinéma [72]. Jean s'est toujours montré bienveillant avec moi. Je suis assez fier et reconnaissant qu'il ait accepté spontanément de bien vouloir publier trois articles avec moi dans la revue française *Tangente*.
Ma première rencontre avec Adelin est encore plus ancienne, puisqu'elle remonte à 1966, lors de notre inscription à l'Université. De suite, nous avons sympathisé et travaillé ensemble, mettant notamment en commun nos (in-)compétences lors de travaux pratiques en sciences [73]. Depuis cette époque mémorable, nous ne nous sommes guère quittés. J'ai particulièrement apprécié quand il s'était proposé gentiment pour me faire profiter de son expérience personnelle relative à l'épreuve [74] de la leçon publique pour l'Agrégation et qu'il était venu répété avec moi dans la Salle Académique de notre Université. Je le remercie (tout simplement) de sa grande amitié (fraternelle), notamment pour toutes les agréables réunions annuelles que nous avons eues avec toute son adorable famille. Je souhaite que nos rencontres soient désormais plus fréquentes et que nous menions à bien des projets communs (particulièrement un livre déjà commencé sur « les mathématiques et la santé » [75]).
Daniel est un ami (très) fidèle depuis notre première publication conjointe (en 1989), pour le compte de la SBPMef, intitulée *Les applications économiques au service de la mathématique*; il me recontacta ensuite lorsqu'il cherchait un promoteur pour finaliser (en 1993) sa thèse doctorale sur les équations différentielles stochastiques appliquées à la finance. Depuis lors,

[72] Connaissant son sens de l'humour, je suis certain que Jean ne m'en voudra pas de faire allusion ici aux passionnantes émissions de radio organisées trois dimanches successifs, ainsi qu'à sa participation en tête d'affiche lors d'un festival de cinéma en France, à l'occasion des manifestations organisées récemment en l'honneur de H. Poincaré : Jean en est un éminent spécialiste.
[73] D'après un assistant de chimie, nous avons même réussi l'« exploit » d'étonner Lavoisier lui-même ... pourtant à l'époque déjà dans sa tombe !
[74] Rétrospectivement, je trouve encore maintenant que cela en était vraiment une d'épreuve pour une personne qui, comme moi alors, ne travaillait pas alors à l'Université !
[75] Note ajoutée après la rédaction de ce texte : ce projet est à la base du livre *Mathématiques et médecine : les maths au service de notre santé*, Bibliothèque Tangente HS n° 58, Editions Pole, Paris, 2016, 156 pages.

nous avons collaboré efficacement, toujours en nous « amusant » sans réserve, dans des situations les plus éclectiques : journées sur des thèmes variés (mathématiques actuarielles, financières, concrètes, sportives, amusantes, musicales, ludiques, biologiques, ...), maths en Rue, maths dans la grande Salle de l'Hôtel de Ville de Bruxelles, maths sur la façade de ce même Hôtel de Ville, défenses de mémoires à l'Institut anciennement Cooremans, séminaires aux IREM de Liège et de Bruxelles ainsi qu'au GEMME, nombreux livres et articles rédigés en collaboration, ... Un tout grand merci à Daniel pour son amabilité, son accueil chaleureux (lors de ses nombreuses visites à Liège ou encore de mes déplacements à Bruxelles et mes délicieuses rencontres avec son épouse et ses enfants), son dynamisme, son humour, sa simplicité, sa fidélité, sa confiance (me donnant notamment le privilège de lire et commenter la toute première version du célèbre livre *Les mathématiques du Chat*), ses idées, ses compétences. Cela a été extrêmement précieux pour moi de pouvoir le compter dans mon entourage le plus proche. Je suis certain que nous vivrons ensemble de multiples et « surprenantes » aventures ces prochaines années.

Je mesure pleinement quelle chance j'ai d'avoir des amis-collègues d'une telle envergure !

Le sous-ensemble suivant de personnes que je tiens à remercier comporte, évidemment $2^3= 8$ éléments : ce sont ceux qui ont été mes assistants pédagogiques (anciennement appelés « remédiateur »), à savoir, en tenant compte de leur « ancienneté » à mon service : A. Coolen, M. Haesbroeck, J. Rossi, B. Jadin, Y. Haine, A. Sprimont, L. Biquet, C. Counson, E. Chavet. On pourra m'objecter que ce sous-ensemble comporte non pas 8 mais 9 éléments : cela est vrai, mais, dans mon esprit [76], je ne me suis effectivement occupé que de sept assistants pédagogiques [77] ; pouvant donc prendre en considération aussi bien les nombres 7 ou 9, j'ai choisi tout simplement leur moyenne arithmétique 8 ... ce qui m'arrangeait parfaitement !

C'est le recteur W. Legros qui, il y a une quinzaine d'années, avait eu l'excellente idée d'engager (à mi-temps) des professeurs expérimentés du secondaire : les « remédiateurs » avaient pour mission de faciliter quelque peu la (souvent) délicate transition entre le secondaire et l'Université pour les étudiants primants, mais allaient par la même occasion aider les enseignants universitaires qui le souhaitaient dans leur tâche pédagogique. J'ai été un des premiers à être convaincu de l'apport positif potentiel de cette initiative. Tout d'abord, j'étais dès le départ persuadé que les assistants pédagogiques peuvent aider efficacement des

---

[76] Que certains jugeront peut-être « tordu », mais cela ne m'affectera guère !

[77] Suite à mon désaccord profond avec le responsable des programmes en IG, concernant l'organisation des séances dites de remédiation, j'avais décidé de « laisser tomber » cette activité il y a presque deux ans; heureusement, je le crois vraiment, pour les étudiants et pour l'Ecole en général, V. Henry a repris cette « affaire » en mains, avec tout le dynamisme et l'efficacité qu'on lui connaît.

étudiants au niveau de leurs connaissances sur le cours proprement dit (spécialement en mettant en évidence des liens entre les connaissances anciennes et les nouvelles), mais aussi au niveau de leur méthode de travail (en insistant particulièrement sur la métacognition). De plus, j'étais de suite convaincu qu'une collaboration entre professeurs expérimentés du secondaire et encadrants universitaires pourrait aider ces derniers à progresser sur le plan pédagogique. Enfin, j'ai toujours pensé que l'engagement de collègues du secondaire pourrait améliorer l'image de marque de l'Université. Ces premières impressions ont été renforcées par la pratique. En effet, par expérience, je reste intimement persuadé que la présence d'enseignants du secondaire au sein des équipes pédagogiques universitaires est fort pertinente et particulièrement utile pour améliorer les taux de réussite en première année tout en ne diminuant pas (trop) la qualité de la formation et les exigences requises [78]. J'émets le souhait que les autorités mesurent bien l'impact réel du travail réalisé par les assistants pédagogiques et, surtout, que les activités de ceux-ci soient facilitées [79] et reconnues à leur vraie valeur. [80] Pour ma part, j'ai eu beaucoup de satisfactions avec les différents assistants pédagogiques qui ont travaillé avec moi; nous avons passé ensemble de nombreux moments agréables et enrichissants. Les discussions que nous avons eues entre nous m'ont notamment permis d'améliorer, je le pense vraiment, le contenu et la présentation de mes cours. Il m'est agréable de constater que les assistants pédagogiques me sont toujours restés fidèles, malgré parfois des difficultés d'horaires ... et aussi de l'évolution dans la façon de présenter mes cours. [81] A ma connaissance, et j'en suis fort content, aucun de ces précieux collègues n'a cessé sa collaboration avec moi en raison de conflits personnels entre nous ou pour des motifs liés à mes cours.

---

[78] Contrairement à ce que j'ai déjà entendu, la question essentielle n'est pas, selon moi, de faire réussir le plus grand nombre possible d'étudiants ; c'est d'ailleurs très facile d'amener des étudiants à réussir (...ou à rater). Je crois que la vraie question est d'amener les étudiants à un niveau d'excellence visé par des programmes universitaires de qualité (et inévitablement exigeants). J'espère qu'à l'avenir, un tel discours sera souvent tenu pour les économistes et les gestionnaires formés à l'ULg !

[79] Car elles sont certes difficiles à organiser en complément à l'horaire officiel.

[80] La coordination entre les différents acteurs de l'enseignement nécessite beaucoup de temps et d'énergie pour les membres de l'Université : ce travail est certes fort enrichissant pour un universitaire, mais, et je l'affirme de façon tout à fait neutre et totalement désintéressée, n'est peut-être pas toujours suffisamment pris en compte.

[81] Je revois encore, avec un certain amusement, la déception que semblait avoir ressentie Madeleine Haesbroeck, qui était une grande amatrice des « epsilon – êta » dans la définition des limites en analyse, quand je lui annoncé que nous allions abandonner l'approche weierstrassienne pour adopter une présentation non standard. Une de mes grandes satisfactions professionnelles est d'avoir convaincu Madeleine, je le pense tout du moins, des avantages (auxquels je crois de plus en plus fermement) de la version robinsonienne.

$2^4 = 16$: c'est précisément le nombre d'académiques de ma Faculté que je souhaite remercier. Comme les sous-ensembles qui vont être désormais considérés comptent plus de 10 éléments, je vais prendre la convention de ne plus citer, sauf mention explicite du contraire, les noms en entier, me contentant d'indiquer les initiales des prénoms et noms, classées par ordre alphabétique sur les noms de famille : le lecteur qui aura le courage de lire ces lignes pourra ainsi s'amuser à deviner les « heureux sélectionnés ». Conformément à un précepte cartésien, je vais diviser le sous-ensemble en question en plusieurs « parcelles ». J'évoque avant tout des membres qui ont fait partie du Département d'Economie dans lequel j'ai initialement débarqué. Au début, j'ai passé de magnifiques années en leur compagnie, notamment quand j'ai assuré le secrétariat du Département. Ensuite, il est vrai, je n'ai pas toujours été sur la même longueur d'onde que certains [82], mais j'ai toujours eu beaucoup de respect et de considération pour tous. C'est avec plaisir que je revoie (physiquement ou par la pensée) HB, BJ, FF, JG, YL, PP. Je pense ensuite aux collègues du Département EAA dans lequel je me suis épanoui : je me souviens même avoir dit à mon Doyen de l'époque, mon grand ami Léopold, que je ne partais pas en vacances ... parce que je me sentais toujours en vacances et qu'il ne me semblait guère possible de trouver en été un plus agréable endroit que les bois du Sart Tilman. De cette époque, je ne garde en effet que d'excellents souvenirs, notamment lorsque j'ai dirigé le DEG et les formations complémentaires ou encore quand nous avons créé, collégialement et après de multiples réunions constructives, le DCAA, le diplôme d'ingénieur de gestion et celui de LAAhd. Un incommensurable merci [83] à JMC, YC, CDB, PM, RM, MS, DVC. Tous ces noms se réfèrent à l'ex-FEGSS, et non à la nouvelle structure HEC-ULg dans laquelle je ne me suis pas réellement intégré [84]. J'ai pourtant rencontré certains collègues de ex-HEC avec qui j'aurais aimé parler plus souvent; je pense principalement à JMD, MM et JR qui ont toujours été (j'ai la faiblesse de le croire) bienveillants avec moi.

---

[82] N'est-il pas courant, et somme toute normal, que des universitaires ne pensent pas tous de la même façon ?

[83] Je précise que, pour obtenir ma quasi-partition, je ne reprends pas ici les noms de personnes déjà citées (notamment LB et AC, ce qui ne m'empêche pas de repenser avec émotion à elles).

[84] Après réflexion, il me semble probable que mon expérience antérieure donne une explication à ce constat. J'ai en effet enseigné pendant onze années dans l'enseignement supérieur non universitaire, à l'ISI de Huy (duquel j'ai gardé quelques excellents souvenirs, d'ailleurs) et j'ai alors pu constater, sur le terrain en quelque sorte, la grande différence entre les deux « cultures », celle de l'Université et celle de l'Enseignement Supérieur non universitaire, chacune des deux ayant ses qualités et ses défauts. C'est donc en toute connaissance de cause et sans aucune contrainte (puisque j'étais nommé à titre définitif à l'ISI) que j'ai choisi la voie universitaire ... et je ne le regrette nullement (même si la vie aurait été vraisemblablement plus « paisible » pour moi à Huy).

$2^5 = 32$: c'est exactement le nombre de co-auteurs belges qui ont bien voulu rédiger avec moi au moins un article (et pour certains, beaucoup plus qu'un seul !). En faisant une entorse à ma convention d'obtenir un sous-ensemble disjoint des précédents [85], mais en évitant néanmoins les répétitions [86], je forme ainsi un sous-ensemble comprenant les noms suivants : AA, AC, YC, MD,AD, HD, RF, JG, PG, PG, GH, JJH, MH, GH ,VH, AH, RH, FG, DJ, JL, GL, SM, CM, JM, RM, JN, PP, SP, VR, FS, JV, VW. Pouvoir faire connaître ses idées et modestes découvertes à autrui est une de mes plus grandes satisfactions professionnelles. C'est pourquoi, je suis « infiniment » reconnaissant à tous mes co-auteurs, ici belges, aussi bien les occasionnels que les habituels.

Les termes de la progression géométrique (de raison supérieure à l'unité) croissant sans cesse et devenant assez imposants, je me vois contraint à présent de réunir (pêle-mêle) divers sous-ensembles. C'est pourquoi, je distingue, au cours de cette étape dans l'élaboration de mes souvenirs, plusieurs « catégories » de personnes (rangées par ordre d'effectifs croissants) qui ont beaucoup compté dans ma carrière.

– Un mathématicien-actuaire, PD, qui occupe un poste de responsabilité dans un organisme d'assurance.

– Un ancien étudiant (de la première promotion d'IG), CS, qui est devenu professeur dans des universités du Canada et d'Angleterre : nos échanges d'idées sur l'épistémologie furent passionnants et instructifs.

– Trois assistants pédagogiques travaillant dans des services autres que le mien, mais avec qui je me suis toujours parfaitement entendu et ai eu des conversations bien intéressantes; il s'agit de MCC, JC et PG.

– Trois collègues français appartenant à la rédaction de la revue française *Tangente*. Je dis merci à GC, HL et ET de m'avoir accueilli dans leur équipe performante et de me donner ainsi l'occasion d'exposer certaines de mes idées à leur vaste lectorat.

– Cinq pédagogues Ulgistes, membres du service Guidance-Etudes et du CDS : DD, SJ, AFL, LL, BM. J'ai beaucoup appris à leur contact et ai passé des moments bien agréables en leur compagnie.

– Six titulaires de cours de mathématiques aux Facultés des Sciences et des Sciences Appliquées de l'ULg, soit FB, GH, PL, PM, MR, PT. Je n'ai peut-être pas toujours été sur la

[85] Je rappelle ici que je construis une "quasi-partition".

[86] Certaines initiales se retrouvent plusieurs fois, mais se réfèrent à des personnes différentes : deviner les "heureux sélectionnés" devient plus difficile !

même longueur d’onde que certains d’entre eux, mais j’ai eu, surtout ces dernières années et avec tous, d’excellents contacts et des discussions souvent passionnantes et instructives.
– Huit membres du personnel administratif de l’ULg avec qui je me suis particulièrement bien entendu et ai assez bien travaillé : PB, EB, GB, LL, CM, JP, CV.
– Mes quinze co-auteurs non belges, à savoir AA, PB, JCD, JCD, KHE, RE, JG, GH, KK, MK, SK, TMG, RN, DS, JLV. Tous occupent une place importante dans mes pensées, mais je tiens à épingler tout particulièrement les quatre noms suivants : le français André Antibi qui m’a donné l’occasion d’entrer un peu dans le monde (parfois inutilement hermétique à mes yeux) d’une certaine didactique, le luxembourgeois Jean-Claude Delagardelle avec qui nous avons échangé de nombreuses expériences enrichissantes à la Faculté de Droit et d’Economie de l’Université du Luxembourg (dont il fut le Doyen) et à la FOPED (qu’il dirige), l’argentin Guillermo Hansen avec qui j’ai passé bien d’agréables moments lors de son séjour à Liège ou lors de ma visite à Buenos Aires, l’israélien Mikail Katz qui a bien voulu accueillir les deux “petits belges” dans son équipe internationale favorable à un enseignement non standard de l’analyse mathématique.
– Vingt-deux professeurs et/ou inspecteurs de mathématiques travaillant (ou ayant travaillé) dans des écoles belges (aussi bien du secondaire que du supérieur) et qui n’ont pas encore été cités. Je les ai rencontrés souvent, et toujours avec beaucoup de plaisir, lors de réunions ou de congrès. Ce sont : AMB, JPC, MD, MF, TG, RG, PG, MFG, CH, MH, JPH, PL, RM, CM, JM, NM, YN, AP, MS, CV, SX, JW. A ce stade de mes réflexions, j’ai une pensée toute particulière pour ceux qui œuvrent dans trois organisations auxquelles j’attache une grande importance et pour lesquelles j’ai essayé (et compte encore essayer) d’apporter ma (modeste) contribution; il s’agit de l’IREM de Liège, principalement du sous-groupe TSU(M), de la SBPMef et du CREM; je sais qu’elles sont toutes trois entre de bonnes mains, puisqu’elles dirigées par des personnes compétentes et dévouées : merci [87] à JN, FB, VH et CM pour le temps [88] consacré à une “ si belle cause” : j’émets le vœu que le travail accompli soit prolongé, spécialement avec de riches échanges (via un site électronique, par des publications, ...) et avec de fructueuses recherches-actions qui tiennent compte de problèmes réellement rencontrés sur le terrain et qui mettent en commun des expériences d’enseignants (ou de personnes ayant enseigné).
Au total cela donne comme effectif de ce dernier sous-ensemble :

[87] Comme ce point me tient particulièrement à cœur, je fais, volontairement, une nouvelle infidélité à ma règle “d’ensembles disjoints”.
[88] Oh combien précieux !

$2 \times 1 + 2 \times 3 + 5 + 6 + 8 + 15 + 22 = 64$.

Eh oui, cette somme est égale à 2^6. Mais il est quand même prévisible que la progression géométrique utilisée ne puisse pas être maintenue jusqu'au bout. Les modèles mathématiques ont tous leur limite de validité ! Et c'est effectivement ce qui se produit pour les sous-ensembles suivants. Je m'écarte donc de mon beau [89] modèle mathématique. Et je n'y vais pas par le dos de la cuillère, puisque je considère à présent le sous-ensemble de tous les étudiants qui ont eu cours avec moi. Ce sous-ensemble est assurément un de ceux qui m'est le plus cher [90]. En effet, si j'ai choisi en son temps le magnifique métier de prof de maths, c'est avant tout pour former des jeunes à l'esthétique et à la pratique de ma discipline de prédilection, en insistant autant sur le développement de l'esprit [91] que sur les applications pratiques des mathématiques. Pour moi, et au niveau qui est le mien, j'ose affirmer qu'un prof d'unif comme j'ai essayé d'être n'existerait tout simplement pas s'il n'y avait pas d'étudiants; il me semble que cette évidence est parfois oubliée ou méconnue [92]. Je suis dès lors reconnaissant aux étudiants, que j'ai parfois fait souffrir, j'en suis conscient, d'avoir suivi mes enseignements avec une (certaine) assiduité, en faisant des efforts (pas toujours aussi grands que ce que je n'aurais parfois souhaité), mais toujours, je crois, dans un grand respect mutuel. Une pensée particulière va à mes anciens élèves-moniteurs, toujours choisis pour leur savoir mais aussi leurs compétences relationnelles. Si je m'en réfère uniquement aux étudiants universitaires [93] qui ont "dû subir" mes cours, je dénombre grosso modo 400 étudiants en moyenne par an pendant 25 ans [94]. Je me contente donc d'écrire, à ce stade de mon exposé, simplement mais avec énormément de sincérité : $25 \times 400 = 10.000$ fois merci. J'émets le souhait que les générations suivantes d'économistes et de gestionnaires formés à l'ULg y

---

[89] La simplicité et la régularité sont certainement des caractéristiques de la surprenante beauté des mathématiques.

[90] C'est en grande partie pour retrouver des étudiants tels que ceux rencontrés à l'Université que j'ai décidé de postuler en tant qu'académique à l'ULg.

[91] Existe-t-il une discipline qui développe aussi bien que les mathématiques la rigueur, la précision, la cohérence, le sens de l'effort, l'abstraction, ..., qualités attendues de la part d'un économiste ou gestionnaire de haut niveau ?

[92] Ainsi, quand j'étais président de jury, des collègues m'ont reproché d'attacher plus de crédit à des étudiants qu'à un enseignant ...mais cela ne m'a guère perturbé, de sorte que je n'ai pas modifié ma façon de travailler !

[93] A l'ISI de Huy et à son siège de Verviers, j'ai eu environ 150 étudiants en moyenne par an pendant 11 ans.

[94] Cette approximation est certainement trop faible puisqu'au début de ma carrière, j'avais tous les étudiants en Economie, en Gestion ainsi que ceux à horaire décalé à l'ULg, mais aussi les étudiants des Facultés de Droit et de Philosophie ayant choisi des mathématiques en option, ainsi que ceux de la seconde candidature en Economie au Centre Universitaire de Luxembourg, soit près de 1000 étudiants par an, alors que ces dernières années, je n'ai eu (si l'on peut dire) qu'entre 250 et 300 futurs ingénieurs de gestion par an avec, en plus, une petite vingtaine de stagiaires en mathématiques de la FOPED à (ce qui est depuis lors devenu) l'Université du Luxembourg.

reçoivent un enseignement de qualité qui les prépare au mieux à leur vie professionnelle future ; je souhaite qu'ils accomplissent les (inévitables) efforts nécessaires pour devenir ultérieurement d'excellents acteurs de la vie économique et des leaders, responsables et de premier plan, dans la société de demain.

Il ne me reste plus qu'un seul sous-ensemble à considérer : « *last but not least* », comme on écrit parfois en pareil cas, il s'agit de celui composé des assistants qui ont travaillé pour et à côté de moi. C'est assurément un de ceux qui m'ont apporté les plus grandes satisfactions à bien des égards, et notamment, évidemment, sur le plan intellectuel : si je n'avais pas choisi la carrière universitaire, je n'aurais évidemment pas connu les scientifiques qui ont été mes collaborateurs à l'ULg! L'effectif de mes sous-ensembles devenant trop élevé, il me semble normal [95] de passer aux logarithmes (et je choisis, pourquoi pas, la base décimale) :

$\log 10000 = 4$.

C'est exactement [96] le nombre d'assistants qui ont travaillé à mon service. Bien sûr, je triche un peu, car beaucoup plus de mathématiciens ont assuré les répétitions pour mes cours ou pour ceux du service de statistique dont j'ai eu la charge lorsque L. Bragard est devenu Administrateur de notre Alma Mater : au début de ma carrière, les assistants émanaient de l'Institut de Mathématique (ils étaient donc des membres de la faculté des Sciences, pas de la FEGSS), tandis qu'en fin de carrière, ils ne faisaient plus partie d'un service (comme le mien) mais appartenaient plutôt à l'UER (et j'aurais d'ailleurs aimé mieux connaître CP). J'avoue que les contacts professionnels que j'ai eus avec toutes ces personnes étaient (trop) peu fréquents et ne concernaient que les répétitions relatives à mes cours, sauf pour ce qui concerne AJ et JL avec qui je m'entendais particulièrement bien. Je garde aussi un bon souvenir des discussions que j'ai eues avec mes deux assistantes non mathématiciennes, CB et VR, avec qui j'aurais bien aimé travailler davantage. Je me remémore également avec plaisir des rencontres avec PA et GL qui intervenaient non pas pour mes cours mais pour les cours voisins de statistique. Il m'est encore agréable de signaler que j'ai eu alors le privilège de cotoyer trois scientifiques, à savoir EG, PL et MR, qui sont devenus ultérieurement des académiques à l'ULg. Malgré tout, il est vrai que je n'ai eu que quatre « véritables » assistants pour mon service. On peut penser que ce nombre est petit. Je ne vois pas la problématique de cette façon. Je pense au contraire que j'ai eu la chance extraordinaire d'avoir quatre personnes

[95] Ce n'est peut-être pas habituel chez tout le monde, mais il s'agit, me semble-t-il, d'un réflexe naturel chez un mathématicien !

[96] Pour paraphraser J. Stewart, je me demande si « Dieu joue aux dés » ?

de grande qualité qui ont bien voulu travailler assez longtemps à mes côtés : j'ai en effet eu deux assistantes GH et VH, et deux assistants FS et PP [97]. Les deux agents masculins n'ont pas eu l'opportunité de prolonger leur contrat (de six ans et de quatre ans respectivement) autant que je ne l'aurais souhaité ; certaines décisions de la vie ne dépendent pas forcément des qualités intellectuelles [98] et humaines des personnes, ce qui était assurément le cas pour ces deux scientifiques de valeur. Il me reste donc $4 - 2 = 2$ noms sur lesquels je voudrais m'étendre, tant ils ont compté et comptent encore aujourd'hui pour moi. Je fréquente Gentiane et Valérie, puisque c'est d'elles qu'il s'agit, depuis longtemps ; réciproquement, elles me connaissent également fort bien : les assistants qui deviennent académiques sont assurément au courant de (presque) tous les points faibles de leur ancien patron [99]. C'est évidemment vrai dans mon cas ; je suis extrêmement satisfait de constater que, malgré cela, toutes deux éprouvent encore de la considération et du respect (j'ai la faiblesse de le croire) pour moi. Et pourtant, nous n'avons pas toujours été d'accord sur tout : j'avoue qu'elles m'ont toutes les deux fait souvent changer d'opinion, leur avis étant généralement plus pertinent que le mien. Je suis content, et je le concède volontiers, assez fier, de voir tout ce qu'elles ont accompli, le travail qu'elles abattent aujourd'hui au quotidien ... et j'en suis certain, tout ce qu'elles réaliseront encore dans le futur. Toutes deux ont, depuis le début de notre association, des qualités pédagogiques hors du commun ; de plus, je suis impressionné en observant l'importance qu'elles ont acquise toutes deux dans le domaine scientifique qu'elles ont choisi. A présent, je constate avec joie qu'elles se retrouvent parmi les leaders incontestables dans leur discipline et qu'elles sont déjà devenues à mes yeux des « profs d'unif » de valeur et sur qui l'on peut compter sans réserve. Cette affirmation est tout à fait objective. Je n'ai aucun mérite en la matière, car, d'une part, je ne les ai même pas choisies puisque je ne connaissais pas les futurs mathématiciens formés à Liège, et, d'autre part, je n'ai pas réussi, malgré mes efforts, à les embarquer avec moi dans des recherches en géométrie convexe, ce qui était mon domaine de recherches durant la première partie de ma carrière. Elles ont toutes deux choisi une direction dans laquelle j'étais complètement ignorant ... comme, à l'époque la majorité de mes collègues liégeois, et même belges d'ailleurs. L'une se lança dans la statistique (robuste), ce qui était quasi inconcevable à Liège en ce temps-là, tandis que l'autre a choisi la didactique

[97] Ces quatre couples d'initiales ont déjà été rencontrés, mais je rappelle que mes sous-ensembles forment une « quasipartition ». Il me semble naturel de citer plusieurs fois ces quatre personnes, vu l'importance qu'elles ont eue pour ma carrière.
[98] Comme je crois pouvoir en attester à la lumière de mon cas personnel (lors de ma « première vie » professionnelle à l'ISI de Huy et son siège de Verviers).
[99] Elles figurent d'ailleurs parmi les rares personnes qui sont capables de comprendre les multiples allusions implicites qui se trouvent dans ce texte.

des mathématiques, alors naissante (et alors presqu'inconnue) dans notre pays. Bien plus, elles m'ont permis de me développer intellectuellement. En effet, je ne suis certainement pas devenu un « as » en statistique, mais j'ai eu, grâce à Gentiane, l'occasion de rencontrer des statisticiens de « haut vol » dont j'ai beaucoup apprécié les exceptionnelles qualités intellectuelles et humaines. Par contre, Valérie a réussi à redonner une « deuxième vie scientifique » en m'entraînant, grâce à son dynamisme, à son enthousiasme mais aussi à la qualité de son travail scientifique, dans le milieu de la didactique des mathématiques : le volet épistémologique de cette discipline correspondait parfaitement à mes aspirations en fin de carrière ; par ailleurs, il est évident que, sans elle, je n'aurais pas développé mon cours d'analyse non standard auquel j'attache, rétrospectivement, la plus grande importance.
Estimant, sans aucun mérite de ma part, que « ma relève » est ainsi assurée (de mon point de vue, tout du moins), et de façon combien avantageuse, il ne me reste plus qu'à terminer par un dernier petit vœu, tout simple (et un peu égoïste) : celui d'avoir l'opportunité de prendre encore quelques tasses de café ou d'échanger des mails avec des collègues-amis qui le désirent (et qui en auront, comme moi, le temps), de manière à « refaire un peu le monde » et à discuter de mathématiques et de leur enseignement!
Merci encore à tous ... spécialement aux lecteurs qui auront eu le courage (et, je le pense vraiment, la gentillesse) de lire mes élucubrations jusqu'au bout.

Jacques Bair
Liège, mai 2013