Les mathématiques : une science comme les autres ?

Jacques Bair

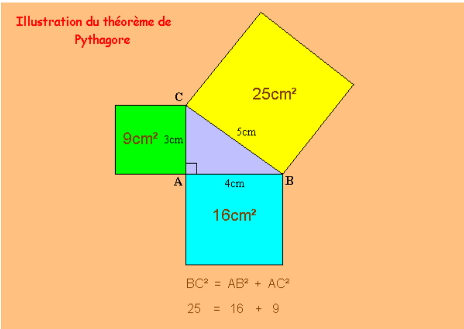
Le mot « science » est assurément polysémique. Nous ne souhaitons pas mener ici une longue dissertation sur ce thème, car cela dépasse le cadre de ce travail. Contentons-nous seulement d'accepter le sens suivant donné par le Dictionnaire Hachette Encyclopédique de Poche 2015 : « *corps de connaissances constituées sur le calcul et l'expérimentation ou l'observation* ». Cette formulation, certes assez grossière, possède le mérite de mettre en évidence deux directions sur lesquelles vont porter nos réflexions.
Le premier axe est de nature ontologique. De fait, les trois premiers mots de la définition, à savoir « corps de connaissances », donnent une idée globale de ce que recouvre le terme en question. Il existe effectivement une multitude de disciplines scientifiques.
On peut avoir une idée de cette diversité en consultant des programmes universitaires. Par exemple, l'Université de Liège possède une Faculté des Sciences, où sont organisés des cours en sciences biologiques, chimiques, géographiques, géologiques, mathématiques et physiques. Mais elle dispose également d'une Faculté des Sciences Appliquées qui confère un diplôme d'ingénieur civil ou encore de *master* en sciences informatiques. A côté de ces deux Facultés directement liées à notre propos, elle se compose encore de neuf autres Facultés qui mènent à des études en sciences agronomiques, économiques, de l'éducation, de gestion, de la santé, dentaires, juridiques, médicales, philosophiques, politiques, psychologiques, …
A ce stade de nos investigations, rien ne nous permet de distinguer les mathématiques des autres sciences. Pour aller plus loin dans nos réflexions et ainsi apporter des éléments originaux de réponse à la question étudiée, nous ne considérerons pas toutes les disciplines scientifiques, mais choisirons la physique comme seul représentant des autres sciences, notamment en raison de sa proximité avec la mathématique.

Le second axe fourni par le Dictionnaire est de nature méthodologique. Il concerne une distinction, grâce à l'emploi de la conjonction « et », au niveau de la constitution du savoir. En effet, celui-ci peut être construit à partir de calculs, comme cela est expressément le cas en mathématiques (même si celles-ci ne font pas appel qu'à des calculs, et loin de là !). Le savoir peut aussi se baser sur l'expérimentation ou l'observation, ce qui se passe effectivement en science physique (et donc dans les autres sciences). Nous voyons déjà apparaître une première différence entre les mathématiques et la physique. Nous allons approfondir ce point, en nous référant à des travaux réalisés par d'éminents épistémologues des sciences, à savoir le physicien P. Duhem et le mathématicien G. Polya.

Pierre DUHEM (1861-1916)

George POLYA (1887-1985)

Une activité en physique cherche souvent à décrire, à comprendre, éventuellement à expliquer et même parfois à prévoir, certains phénomènes sensibles. Par exemple, d'après une analyse du physicien et historien des sciences français P. Duhem (1861 - 1916) « *une théorie physique est un ensemble de propositions logiquement déduites d'un petit nombre de postulats, ceux-ci servant, d'une part, de fondements à ce système hypothético - déductif et, d'autre part, de lien entre la théorie et la réalité : les éléments non définis qu'ils introduisent sont regardés comme des représentations symboliques d'éléments réels, et les relations entre éléments théoriques auxquelles la théorie aboutit sont comparées aux relations observables entre les éléments réels homologues ; si elles les représentent bien, la théorie est dite sauver les apparences sensibles ; sinon, elle est jugée inacceptable, et retouchée ou remplacée. On notera que l'expérience ne confirme jamais une théorie physique : si bonne que soit la représentation des phénomènes étudiés, il est toujours possible d'agencer une autre théorie, qui fournira une représentation aussi bonne ou même meilleure ; par contre, l'expérience peut infirmer une théorie. Ainsi, les connaissances de ce type procèdent par renouvellement d'édifices construits* ». Cette description de la physique montre une distinction fondamentale entre les deux disciplines qui sont toutes deux hypothético - déductives. Au contraire de la physique (et des autres sciences), les mathématiques ne se réfèrent pas directement à l'univers sensible. Bien sûr, les objets qui y sont manipulés sont souvent introduits dans un premier temps par référence au monde tangible : par exemple, c'est visiblement le cas pour les nombres servant aux dénombrements d'objets, ou encore les figures géométriques qui décrivent de manière stylisée des objets du plan ou de l'espace ; par la suite, on y développe, en respectant des règles universelles et immuables de la logique, de nouveaux concepts, avec leurs propriétés, à partir d'axiomes et des définitions adoptées, comme c'est d'ailleurs le cas en physique ; mais il n'y a pas *in fine* de confrontation des résultats théoriques avec le monde sensible, puisque les objets sont volontairement abstraits et leur lien avec la réalité importe peu, tout compte fait ; seule la cohérence des développements permet de décider si une théorie est acceptable (ou non). En conséquence, un résultat mathématique, obtenu par démonstration logique, n'est pas falsifiable ; il ne sera jamais invalidé dans l'univers théorique défini par les postulats adoptés ; par exemple, le théorème de Pythagore démontré durant l'Antiquité restera éternellement valide en géométrie euclidienne plane … ce qui ne l'empêche pas de connaître plusieurs centaines de bonnes preuves et d'être généralisé de très nombreuses manières différentes. En conséquence, le savoir mathématique se développe, non pas par renouvellement, mais bien par accumulation de ce que Duhem appelle des « *édifices construits* ».



Par ailleurs, la confrontation finale éventuelle des résultats scientifiques avec la réalité autorise une catégorisation des raisonnements utilisés. Dans toutes les sciences autres que les mathématiques, comme la physique par exemple, l’induction est essentiellement de mise, étant donné que le scientifique cherche à dégager des lois générales à partir de cas particuliers observés dans la nature ou résultant d’expériences réalisées ; chaque raisonnement débouche sur une conclusion qui est plausible, puisqu'elle doit être confrontée à du concret, et dès lors n'est pas certaine, mais peut être réfutée (ou non) expérimentalement ; le but recherché consiste alors à obtenir des conclusions toujours plus plausibles par rapport à la réalité physique. Par contre, en mathématiques et lorsque celles-ci sont construites, les raisonnements sont appelés démonstratifs par Polya ; leur conclusion est essentiellement obtenue par un raisonnement déductif obéissant aux règles précises de la logique : elle est certaine, définitive et ne pourra donc jamais être falsifiée (dans l'univers décrit par les axiomes et définitions adoptés) ; l'objectif principal est ici de développer un raisonnement cohérent. A l'instar de G. Polya, nous pensons qu' « *un étudiant en mathématiques vraiment sérieux, désireux de consacrer sa vie à cette discipline, doit apprendre le raisonnement démonstratif ; c'est son métier et la marque distinctive de sa science. Mais s'il veut vraiment réussir il doit aussi apprendre le raisonnement plausible ; c'est de cette sorte de raisonnement que dépendra son travail créateur. L'étudiant moyen ou seulement amateur doit aussi goûter au raisonnement démonstratif: sans doute n'aura-t-il que rarement l'occasion de s'en servir directement, mais il doit acquérir un élément de comparaison qui puisse lui permettre de juger les prétendues preuves de toutes sortes qui lui seront offertes dans le monde où nous vivons actuellement. Par contre dans tout ce qu'il entreprendra il aura besoin du raisonnement plausible* ».

Pour conclure notre petite étude, synthétisons notre propos.

Un scientifique est amené à exploiter des raisonnements qui peuvent être démonstratifs ou plausibles. Le tableau comparatif ci-dessous résume des avantages et inconvénients de ces deux façons de raisonner :

Raisonnement démonstratif	Raisonnement plausible
• sûr • à l'abri de controverses • définitif • rigide • incapable de conduire à des connaissances nouvelles sur le monde • exploité uniquement en mathématiques	• hasardeux • potentiellement controversé • provisoire • souple • peut apporter des connaissances nouvelles sur le monde • exploité dans toute démarche scientifique

En définitive, nous avons mis en évidence une certaine distinction entre les mathématiques et les autres sciences.

En effet, bien que les mathématiques soient fréquemment présentées comme étant la science la plus ancienne, à laquelle pratiquement toutes les autres font appel, elles nous paraissent néanmoins différer sensiblement des autres disciplines scientifiques par plusieurs aspects qui sont repris schématiquement dans le résumé ci-dessous :

Critères de distinction	Mathématiques	Autres sciences
Référence à la réalité tangible	seulement en amont	en amont et en aval
Moyen de validation des modèles	cohérence logique	confrontation avec le réel
Construction du savoir	accumulation d'édifices construits	renouvellement d'édifices construits
Types de raisonnements	plausibles et démonstratifs	plausibles uniquement
Durée de vie d'une théorie	définitive	temporaire

En résumé, nous pensons donc que les mathématiques constituent sans conteste une science, mais qu'elles diffèrent effectivement des autres activités scientifiques. En définitive, elles sont bien pour nous « *la reine et la servante des sciences* », ainsi que l'écrivait E. Bell.

Pour en savoir plus :

[1] Bair J., Les mathématiciens ont-ils un sixième sens ?, *Losanges* (revue de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française), n° 26, 2014, pp. 12-18.

[2] Bell E.T., *La mathématique, reine et servante des sciences*, Reliure inconnue, 1953.

[3] Duhem P., *La théorie physique*, Desclée, Paris, 3e édition, 1939.

[4] Polya G., *Les mathématiques et le raisonnement « plausible »*, Gauthier-Villars, Paris, 1958.