SOLUTIONS DES PROBLÈMES

DE

MATHÉMATIQUES ET DE PHYSIQUE

DONNÉS A LA SORBONNE

DANS LES COMPOSITIONS DU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PAR

MOMENHEIM

Licencié ès sciences, Chef d'Institution à Paris

ET

E. CATALAN

Agrégé de l'Université, Docteur ès sciences, Professeur de sciences mathématiques à Paris

PARIS

VICTOR DALMONT, ÉDITEUR

Successeur de Carilian-Gœury et V$^{\text{ve}}$ Dalmont

LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES

Quai des Augustins, n° 49

SOLUTIONS DES PROBLÈMES

DE

MATHÉMATIQUE ET DE PHYSIQUE

DONNÉS A LA SORBONNE,

DANS LES COMPOSITIONS DU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

(du 10 juillet 1853 au 26 août 1854)

PAR

MOMENHEIM,

Licencié ès sciences, Chef d'Institution à Paris,

ET

CATALAN,

Agrégé de l'Université, [illegible] ès sciences, Professeur de sciences mathématiques à Paris.

PARIS.

CARILIAN-GŒURY ET Vor DALMONT,

LIBRAIRES DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, n° 49.

1855

SOLUTIONS DES PROBLÈMES

DE

MATHÉMATIQUES ET DE PHYSIQUE.

Paris. — Imprimé par E. THUNOT et Cᵉ, rue Racine, 26.

SOLUTIONS DES PROBLÈMES

DE

MATHÉMATIQUES ET DE PHYSIQUE

DONNÉS A LA SORBONNE,

DANS LES COMPOSITIONS DU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES.

PAR

MOMENHEIM,
Licencié ès sciences, Chef d'Institution à Paris,

ET

E. CATALAN,
Agrégé de l'Université, Docteur ès sciences, Professeur de sciences mathématiques à Paris.

PARIS
VICTOR DALMONT, ÉDITEUR,
Successeur de Carilian-Gœury et V^or Dalmont,
LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,
Quai des Augustins, nº 49.

PROBLÈMES

DU

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES.

SESSION DE JUILLET-AOUT 1853.

I.

(Lundi, 11 juillet 1853.)

1° Rendre compte des expériences qui mettent en évidence la pression atmosphérique.

2° Calculer la valeur numérique de la pression qui s'exerce sur un cercle dont le diamètre est $1^m,37$, en supposant la hauteur barométrique égale à $0^m,76$. Le poids spécifique du mercure est 13,596.

Considérons une surface d'un centimètre carré; elle supporte une pression égale au poids d'une colonne prismatique de mercure dont la base est un centimètre carré, et la hauteur $0^m,76$. Le volume de cette colonne est de 76 centimètres cubes; son poids, évalué en grammes, est donc $76 \,.\, 13,596$. Cette pression étant celle que supporte un centimètre carré, et l'aire du cercle donné ayant pour expression $\frac{1}{4}\pi \cdot 137^2$, la pression cherchée sera

$$P = 76 \cdot 13{,}596 \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot 137^2 = 19 \cdot 13{,}596 \cdot 137^2 \cdot \pi.$$

$$\begin{aligned}
\log 19 &= 1{,}2787536 \\
\log 13{,}596 &= 1{,}1334112 \\
2 \log 137 &= 4{,}2734411 \\
\log \pi &= 0{,}4971509 \\
\hline
\log P &= 7{,}1827568\,;
\end{aligned}$$

$P = 15\,232\,000$ grammes $= 15\,232$ kilogrammes.

II.

(Mercredi, 13 juillet.)

1° Lois de la réfraction de la lumière et leur démonstration par l'expérience.

2° Chercher combien il faut de kilogrammes de vapeur d'eau pour porter, de 13° à 28°, un bain de 246 kilogrammes d'eau, sachant que la chaleur latente de la vapeur d'eau est 540.

En désignant par x le nombre de kilogrammes de vapeur d'eau, nous aurons à considérer le mélange de 246 kilogrammes d'eau à 13° avec x kilogrammes de vapeur, la température finale devant être 28°.

Or 1 kilogramme d'eau, pour se transformer en vapeur, absorbe 540 unités de chaleur latente; par conséquent 1 kilogramme de vapeur, pour former 1 kilogramme d'eau, perd 540 unités de chaleur. Les x kilogrammes de vapeur contiennent donc 540 x unités de chaleur latente, plus $100x$ unités de chaleur sensible ; en tout $640x$ unités de chaleur.

Cette vapeur devant arriver à 28°, perdra $(640-28)\,x$ unités de chaleur, qui seront gagnées par les 246 kilogrammes d'eau dont la température varie de 13° à 28°.

Nous aurons donc

$$(640-28)\,x = 246\,(28-13);$$

d'où

$$x = \frac{246\,.\,15}{612} = \frac{205}{34};$$

$$x = 6^{\text{kilog.}},029.$$

III.

(Vendredi, 15 juillet.)

1° Dilatation des corps par la chaleur.

2° On a un carré de 3 mètres de côté à 0° ; on porte sa température à 64°. Calculer ce que devient sa surface, sachant que le coefficient de dilatation du fer est 0,000 012 2.

Soient l la longueur d'une barre à 0°, et k le coefficient de dilatation de la substance, c'est-à-dire la quantité dont s'allonge 1 mètre de la barre, quand la température varie de 1°. Pour une variation de t°, 1 mètre de la barre s'allongera de kt, et la longueur l s'allongera de lkt, de sorte que la longueur finale sera $l+lkt$ ou $l(1+kt)$.

Le côté du carré sera donc, après l'échauffement :

$$3\,(1+0{,}000\,012\,2\,.\,64) \text{ ou } 3{,}002\,342\,4.$$

La surface du carré sera $(3{,}002\,342\,4)^2$; ou, à fort peu près,

$$9^{\text{m.c}},014\,060.$$

IV.

(Lundi, 18 juillet.)

1° Exposer l'extraction de la racine carrée des nombres quelconques, d'abord à moins d'une unité près, ensuite à un degré quelconque d'approximation.

2° On a un vase cylindrique dont le diamètre intérieur est de $0^m,1$; ce vase étant placé sur un plan horizontal, par son fond circulaire, on y verse 12 kilogrammes de mercure. On demande à quelle hauteur le liquide s'élèvera. On prend, pour densité * du mercure, 13,596.

Le volume du cylindre est $V = \frac{1}{4}\pi D^2 H$, D étant le diamètre de la base, et H la hauteur inconnue.

Dans l'exemple proposé, $V = \frac{1}{4}\pi H$, en prenant le décimètre pour unité; le poids du mercure est donc, en kilogrammes,

$$P = \frac{1}{4}\pi H \,.\, 13{,}596 = 12.$$

Conséquemment,

$$H = \frac{12 \,.\, 4}{\pi \,.\, 13{,}596} = \frac{4}{\pi \,.\, 1{,}133}.$$

$$\begin{aligned}
\log 4 &= 0{,}6020599 \\
-\log \pi &= -0{,}4971509 \\
-\log 1{,}133 &= -0{,}0542299 \\
\hline
\log H &= 0{,}0506791\,; \\
H &= 1{,}1237 = 112^{\text{millim.}},37.
\end{aligned}$$

---

* Il serait plus exact de dire : on prend pour *poids spécifique*, etc. Cette observation est faite une fois pour toutes.

V.

(Mardi, 19 juillet.)

1° Déterminer les densités des gaz.

2° Le poids de l'air atmosphérique étant $\frac{1}{770}$ du poids de l'eau, déterminer le poids de l'air contenu dans un cylindre dont la circonférence de la base est $0^m,3$, et la hauteur $0^m,8$.

La longueur d'une circonférence de rayon R est $2\pi R$; donc le rayon du cylindre sera, en décimètres,

$$R = \frac{3}{2\pi}.$$

Si le cylindre était plein d'eau distillée, son poids, exprimé en kilogrammes, serait $\pi\left(\frac{3}{2\pi}\right)^2.8 = \frac{18}{\pi}$. Le poids de l'air qui remplit le cylindre sera donc

$$P = \frac{18}{770\pi}.$$

$$\begin{aligned} \log 18 &= 1{,}2552725 \\ -\log 770 &= -2{,}8864907 \\ -\log \pi &= -0{,}4971509 \\ \hline \log P &= \bar{3}{,}8716309; \\ P &= 0{,}0074410; \end{aligned}$$

ou

$$P = 7^g{,}441.$$

VI.

(Mercredi, 20 juillet.)

1° Énoncer le principe d'Archimède. En donner la démonstration par le raisonnement et par l'expérience.

2° Quel effort exigerait, pour être soutenu dans du mercure à 0°, un décimètre cube de platine, la densité du mercure étant supposée 13,6 et celle du platine 21,5.

1 décimètre cube d'eau pèse 1 kilogramme.

1 décimètre cube de platine pèse donc $21^{\text{kilog.}},5$. Plongé dans du mercure, il perd de son poids une partie égale au poids du liquide qu'il déplace, c'est-à-dire $13^{\text{kilog.}},6$. Le platine ne pèse donc plus que $21^{\text{kilog.}},5 - 13^{\text{kilog.}},6$ ou $7^{\text{kilog.}},9$.

L'effort qu'exige le platine pour être soutenu dans la masse de mercure est donc de $7^{\text{kilog.}},9$.

En général, soit p le poids spécifique d'un corps plongé dans un liquide dont le poids spécifique est p'. V étant le volume du corps, exprimé en décimètres cubes, l'effort F, nécessaire pour le soutenir dans le liquide, sera, en kilogrammes,

$$F = V(p - p').$$

VII.

(Jeudi, 21 juillet.)

1° **Théorie de la presse hydraulique.**

2° **Pour exploiter une mine de sel gemme, on a percé, dans un terrain salifère, un trou de sonde, et on y a introduit un tuyau de 100 mètres de longueur, qui ne remplit pas exactement l'ouverture, et qui dépasse le sol de 1 mètre; ce tuyau plonge, de $0^m,75$, dans une dissolution saline, dont la densité est 1,3. On verse de l'eau douce dans l'intervalle compris entre le tuyau et les parois du trou de sonde. A quelle hauteur la solution s'élèvera-t-elle dans le tuyau?**

Puisque le tube a 100 mètres de longueur, et qu'il dépasse le sol de 1 mètre, il ne plonge que de 99 mètres dans le trou de sonde. L'épaisseur de la dissolution saline étant $0^m,75$, et la partie de tuyau qui y plonge ne pouvant être entourée d'eau, la hauteur de l'eau autour du tuyau sera seulement $99^m - 0^m,75 = 98^m,25$. Cette eau fera monter la dissolution d'eau salée à une hauteur déterminée par cette loi de l'équilibre de deux liquides dans des vases communiquants : que les hauteurs sont réciproquement proportionnelles aux densités.

En appelant x la hauteur de l'eau salée, on aura donc

$$\frac{x}{98,25} = \frac{1}{1,3};$$

d'où

$$x = 75^m,577.$$

VIII.

(Vendredi, 22 juillet.)

1° Exposer la méthode de la mesure des aires par la décomposition en trapèzes.

2° L'arête d'un cube est de $0^m,36$. On demande le volume de la sphère circonscrite.

Le volume d'une sphère de diamètre D est $\frac{1}{6}\pi D^3$. Il suffit donc de connaître la diagonale D du cube dont l'arête est $0^m,36$.

Or, on sait que le carré de la diagonale d'un parallélipipède rectangle est égal à la somme des carrés des trois arêtes. Dans le cube donné

$$D^2 = 3 \,.\, (0,36)^2,$$
$$D = 0,36 \,.\sqrt{3}.$$

En multipliant ces deux expressions, on obtient

$$D^3 = (0,36)^3 .\, 3\sqrt{3};$$

le volume de la sphère sera donc

$$V = \frac{1}{6}\pi \,.(0,36)^3 .\, 3\sqrt{3},$$

ou

$$V = \frac{1}{2}\pi \,.\, (0,36)^3 .\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned}
\log \pi &= \quad 0,4971509 \\
3 \log 0,36 &= \quad \bar{2},6689075 \\
\frac{1}{2}\log 3 &= \quad 0,2385606 \\
-\log 2 &= -0,3010300 \\
\hline
\log V &= \quad \bar{1},1035890 \\
V &= \quad 0,126\,937;
\end{aligned}$$

ou $V = 126^{d.c.},937.$

IX.

(Samedi, 23 juillet.)

1° Aire d'un polygone régulier, d'un cercle, d'un secteur et d'un segment de cercle. Expression de l'aire d'un cercle en valeur du rayon et du nombre de degrés de l'arc.

2° Calculer le poids du mercure que contiendrait, à la température de 26° centigrades, un vase conique dont la hauteur serait de $0^m,87$, et dont la base aurait $0^m,23$ de rayon. On sait que la densité du mercure, à la température de 0°, est 13,596, la densité de l'eau étant prise pour unité, et que le coefficient de dilatation cubique du mercure est 0,00018.

Le volume d'un cône est donné par la formule $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$; le volume du cône proposé est donc, en décimètres cubes,

$$V = \frac{1}{3}\pi \,.\, (2,3)^2 \,.\, 8,7,$$

ou

$$V = \pi \,.\, (2,3)^2 \,.\, 2,9.$$

Il faut, pour avoir le poids du mercure, multiplier ce volume par la densité du mercure à la température de 26°.

Or, soient v le volume d'un corps à 0°, k son coefficient de dilatation, t la température à laquelle on le chauffe; on aura, pour le volume à cette dernière température,

$$v' = v(1 + kt).$$

Comme les densités de deux corps sont inversement proportionnelles à leurs volumes, à poids égal, nous aurons, en appelant d, d' les densités du corps, à 0° et à $t°$:

$$\frac{d}{d'}=\frac{v'}{v}=1+kt,$$

ou
$$d'=\frac{d}{1+kt}.$$

Dans la question actuelle,

$$d'=\frac{13,596}{1+0,00018\,.\,26}=\frac{13,596}{1,00468}.$$

Le poids du mercure sera donc

$$P=\frac{\pi\,.\,(2,3)^2\,.\,2,9\,.\,13,596}{1,00468}.$$

$$\begin{aligned}
\log.\ \pi &= 0,4971509\\
2\log 2,3 &= \overline{0},7234556\\
\log 2,9 &= 0,4623980\\
\log 13,596 &= 1,1334112\\
-\log 1,00468 &= -0,0020278\\
\hline
\log P &= 2,8143879;
\end{aligned}$$

$$P=652^{\text{kilog.}},210.$$

X.

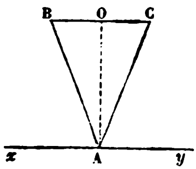
(Lundi, 25 juillet.)

1° **Méthode de réduction des fractions ordinaires en fractions décimales. Les différents cas.**

2° **On a un triangle isocèle tournant autour d'une droite fixe parallèle à la base BC, et passant par le sommet A. On demande quel sera le volume engendré.**

$$AB = 9^m, \ BC = 6^m.$$

Le corps engendré a pour mesure la surface que décrit le côté BC, multipliée par le tiers de la perpendiculaire AO; c'est-à-dire que



$$V = 2\pi \, AO \,.\, BC \,.\, \frac{AO}{3},$$

ou

$$V = \frac{2}{3}\pi \overline{AO}^2 \,.\, BC.$$

Or

$$\begin{aligned}\overline{AO}^2 &= \overline{BA}^2 - \overline{BO}^2,\\ &= 9^2 - 3^2,\\ &= 72,\end{aligned}$$

donc

$$V = \frac{2}{3}\pi \,.\, 72 \,.\, 6,$$

ou

$$V = 288 \,.\, \pi.$$

$$\begin{aligned}\log 288 &= 2{,}4593925\\ \log \pi &= 0{,}4971509\\ \hline \log V &= 2{,}9565434\,;\\ V &= 904^{mc}{,}780\end{aligned}$$

XI.

(Mardi, 26 juillet.)

1° Des manomètres.

2° Combien faudrait-il de kilogrammes de glace à 0°, pour amener à 10° centigrades l'eau contenue dans un bassin à bords circulaires et à fond horizontal, dont la circonférence supérieure serait de $8^m,30$, la circonférence inférieure de $6^m,15$, et la hauteur de $1^m,76$; ce bassin étant rempli, à moitié de sa hauteur, d'eau à 30° ?

Les rayons R, r des deux circonférences sont donnés par les formules

$$R = \frac{8,30}{2\pi}, \qquad r = \frac{6,15}{2\pi}.$$

Le rayon r' de la surface supérieure du liquide est évidemment égal à $\frac{R+r}{2}$; donc

$$r' = \frac{7,225}{2\pi}.$$

Le volume du tronc de cône contenant l'eau est

$$V = \frac{1}{3}\pi h\,(r^2 + r'^2 + rr')$$

$$= \frac{1}{3}\pi \,.\, 0,88 \frac{(6,15)^2 + (7,225)^2 + (6,15 \,.\, 7,225)}{4\pi^2}$$

$$= \frac{0,22}{3\pi}\left[(6,15)^2 + (7,225)^2 + (6,15 \,.\, 7,225)\right].$$

La parenthèse a pour valeur 134,4569; donc

$$V = \frac{0,22 \,.\, 134,4569}{3\pi}.$$

Un mètre cube d'eau pesant 1000 kilogrammes *, il s'ensuit que le poids de l'eau contenue dans le bassin sera

$$P = \frac{220 \,.\, 134,4569}{3\pi}.$$

Actuellement, appelons x le nombre de kilogrammes de glace nécessaire pour amener cette eau, de 30° à 10°; chaque kilogramme de glace absorbant 79 unités de chaleur pour se fondre, les x kilogrammes de glace absorberont $79x$ unités de chaleur. De plus, pour passer de 0° à 10°, ils absorberont $10x$ unités de chaleur; la chaleur gagnée par la glace sera donc $79x + 10x$ ou $89x$.

Cette chaleur gagnée par la glace doit égaler celle que perd l'eau pour passer de 30° à 10°, c'est-à-dire $P\,(30 - 10)$.

Nous aurons donc

$$89x = P \,.\, 20 = \frac{220 \,.\, 134,4569 \,.\, 20}{3\pi};$$

d'où

$$x = \frac{220 \,.\, 134,4569 \,.\, 20}{267\pi}.$$

$$\begin{aligned}
\log 220 &= 2,3424227 \\
\log 134,4569 &= 2,1285831 \\
\log 20 &= 1,3010300 \\
-\log 267 &= -2,4265113 \\
-\log \pi &= -0,4971509 \\
\hline
\log x &= 2,8483736; \\
x &= 705^{\text{kilog.}},300.
\end{aligned}$$

---

* On néglige ici la dilatation de l'eau.

XII.

(Mercredi, 27 juillet.)

1° Déterminer la surface de la sphère, et démontrer les propositions sur lesquelles on s'appuie. On supposera connue l'expression de la surface du tronc de cône.

2° Les profondeurs de trois puits artésiens sont respectivement $A = 220$ mètres; $B = 395$ mètres; $C = 543$ mètres.

On demande si, pour ces trois puits, il est exact de dire que l'accroissement de la température soit proportionnel à l'accroissement de profondeur. Quelle serait la température de l'eau fournie par C, si la loi précédente était exacte? On sait que les températures des eaux sont pour A, 19°,75; pour B, 25°,33, et pour C, 30°,50.

Si la loi énoncée était exacte, on aurait, en appelant x la température de l'eau fournie par C,

$$\frac{543-395}{395-220} = \frac{x-25,33}{25,33-19,75};$$

d'où

$$x = 25,33 + \frac{5,58 \cdot 148}{175} = 25,33 + 4,72 = 30°,05.$$

La loi est donc à peu près exacte.

XIII.

(Jeudi, 28 juillet.)

1° Faire un électro-aimant. Ses propriétés.

2° Une barre de 3 mètres, d'un certain métal, a pour coefficient de dilatation $\frac{1}{754}$; une barre de 5 mètres, d'un autre métal, se dilate autant que la première. Trouver son coefficient de dilatation.

Soit x le coefficient de dilatation de la seconde barre, c'est-à-dire la quantité dont s'allonge 1 mètre de cette barre pour une variation de 1°. Une barre de 5 mètres s'allongera de $5x$ par degré; de même la barre de 3 mètres, dont le coefficient de dilatation est $\frac{1}{754}$, s'allongera de $\frac{3}{754}$ par degré.

On aura donc

$$5x = \frac{3}{754},$$

$$x = \frac{3}{754 \cdot 5} = \frac{3}{3770};$$

x égale environ $\frac{1}{1257}$.

XIV.

(Vendredi, 29 juillet.)

1° Démontrer les théorèmes sur lesquels s'appuie la décomposition d'un nombre en facteurs premiers.

2° Supposant la terre sphérique et sachant que le mètre est la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre, trouver le rayon et la surface de la terre.

Puisque la terre est supposée sphérique, son rayon sera donné par la relation

$$2\pi R = 40\,000\,000,$$

d'où

$$R = \frac{20\,000\,000}{\pi}.$$

$$\begin{aligned} \log 20\,000\,000 &= 7{,}3010300 \\ -\log \pi &= -0{,}4971509 \\ \hline \log R &= 6{,}8038791 \end{aligned}$$

$$R = 6366181 \text{ mètres.}$$

La surface de la terre est donnée par la formule

$$A = 4\pi R^2;$$

donc

$$A = \frac{4\pi \,.\, (20\,000\,000)^2}{\pi^2},$$

$$A = \frac{1\,600\,000\,000\,000\,000}{\pi}.$$

$$\begin{aligned} \log 1\,600\,000\,000\,000\,000 &= 15{,}2041200 \\ -\log \pi &= -0{,}4971509 \\ \hline \log A &= 14{,}7069691; \end{aligned}$$

$$A = 509\,295\,000\,000\,000,$$

ou environ 5 092 950 myriamètres carrés.

XV.

(Samedi, 30 juillet.)

1° Décrire et expliquer le phénomène de la rosée.

2° Deux hauteurs barométriques ont été observées, l'une de 737^{mm} à $-10°$, l'autre de 763^{mm} à $+15°$. On demande quelles corrections il faut leur faire subir pour les ramener l'une et l'autre à ce qu'elles eussent été à la température de 0°, sachant que le coefficient de dilatation cubique du mercure est $\frac{1}{5550}$.

En appelant H la hauteur à 0° et H' la hauteur à $t°$, on aura

$$H' = H\left(1 + \frac{t}{5550}\right),$$

attendu que la dilatation cubique se confond ici avec la dilatation linéaire. Cette formule donne, pour la première observation,

$$H = \frac{737}{1 - \frac{10}{5550}} = 737 \cdot \frac{5550}{5540} = 737 + \frac{737}{554} = 738^{mm},3;$$

et, pour la seconde,

$$H = \frac{763}{1 + \frac{15}{5550}} = 763 \cdot \frac{5550}{5565} = 763 - \frac{763}{371} = 761^{mm},0.$$

XVI.

(Lundi, 1er août.)

1° Exposer dans son ensemble la théorie de la mesure des polyèdres.

2° La surface d'un rectangle est de $23^{m},85$; sa base est à sa hauteur dans le rapport de 5 à 3. Quelles sont les longueurs de ses côtés ?

En appelant b la base et h la hauteur, on a

$$(1) \qquad bh = 23,85,$$

$$(2) \qquad \frac{b}{h} = \frac{5}{3};$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$b^2 = 23,85 \cdot \frac{5}{3} = 39,75;$$

puis,

$$b = 6^{m},3037,$$

et

$$h = 6,3037 \cdot \frac{3}{5} = 3^{m},7822.$$

XVII.

(Mardi, 2 août.)

1° **Décrire sur une droite donnée un segment capable d'un angle donné. — Quelle est la valeur de l'angle pour lequel le rayon du segment est le plus petit possible?**

2° **Une machine soufflante lance 14 kilogrammes d'air par minute. Cette machine se compose d'un cylindre dont le diamètre intérieur est de $0^m,75$; la course du piston est de $0^m,50$, de telle sorte que chaque coup de piston lance un volume d'air égal à celui d'un cylindre de $0^m,50$ de hauteur et de $0^m,75$ de diamètre. Combien dure chaque coup de piston? On sait que le mètre cube d'air pèse 1298 grammes.**

Le volume d'air lancé par chaque coup de piston est celui d'un cylindre dont le diamètre est $0^m,75$ et la hauteur $0^m,50$.

Ce volume est donc

$$V = \frac{1}{4}\pi \,.\, (0,75)^2 \,.\, 0,50.$$

D'un autre côté, le volume de l'air lancé par la machine en une minute est $v = \frac{14}{1,298}$. La durée du coup de piston, *évaluée en minutes*, est

$$\frac{v}{V} = \frac{1}{4}\,\frac{\pi(0,75)^2 \,.\, 0,50 \,.\, 1,298}{14} = \frac{\pi \,.\, (0,75)^2 \,.\, 0,50 \,.\, 1,298}{56}.$$

Cette même durée, *exprimée en secondes*, serait

$$x = \frac{\pi \; . \; (0,75)^2 \; . \; 0,50 \; . \; 1,298 \; . \; 60}{56}.$$

$$\begin{aligned}
\log \pi &= 0,4971509 \\
2 \log 0,75 &= \bar{1},7501225 \\
\log 0,50 &= \bar{1},6989700 \\
\log 1,298 &= 0,1132747 \\
\log 60 &= 1,7781512 \\
-\log 56 &= -1,7481880 \\
\hline
\log x &= 0,0894813\,;
\end{aligned}$$

$$x = 1^s,2288$$

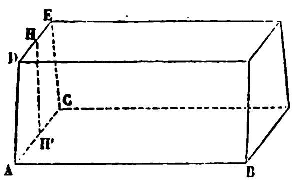
XVIII.

(Mercredi, 3 août.)

1° Démontrer qu'un prisme triangulaire peut être décomposé en trois pyramides équivalentes, qui ont pour bases la base du prisme, et pour hauteur la hauteur du prisme.

2° On veut construire une digue en granit, longue de 750 mètres, haute de $3^m,50$, large de $5^m,75$ à la base et de $4^m,20$ au sommet. Un mètre cube de granit pèse 2500 kilogrammes, et le prix du kilogramme est de $0^f,03$. On demande le prix de la digue.

Cette digue est un prisme à base trapézoïdale ACED. Les deux bases de ce trapèze sont AC et DE, sa hauteur est HH′, de sorte que l'aire de ce trapèze est



$$\frac{5,75+4,20}{2} \,.\, 3,50 = 9,95 \,.\, 1,75.$$

Si nous la multiplions par 750, nous aurons, pour le volume de la digue,

$$V = 9,95 \,.\, 1,75 \,.\, 750.$$

Puisque chaque mètre cube de granit pèse 2500 kilogrammes, le poids de la digue sera

$$P = 9,95 \,.\, 1,75 \,.\, 750 \,.\, 2500.$$

Enfin, le prix du kilogramme de granit étant $0^f,03$, le prix de la digue sera

$$x = 9,95 \,.\, 1,75 \,.\, 750 \,.\, 2500 \,.\, 0,03.$$

En opérant par logarithmes, on trouve

$$x = 979\,453 \text{ fr.}$$

XIX.

(Jeudi, 4 août.)

1° De la chaleur latente.

2° On a un aérostat sphérique de 4 mètres de diamètre; on l'emplit d'hydrogène impur qui pèse 100 grammes le mètre cube; le taffetas verni dont est formée l'enveloppe pèse 250 grammes le mètre carré. On demande combien il faut d'hydrogène pour le remplir, et à quel poids il peut faire équilibre, sachant que l'air pèse 1300 grammes le mètre cube.

Le volume V du ballon est celui d'une sphère dont le diamètre est 4 mètres; donc

$$V = \frac{1}{6}\pi \cdot 4^3 = \frac{32}{3}\pi.$$

$$\begin{aligned} \log 32 &= 1{,}5051500 \\ \log \pi &= 0{,}4971509 \\ -\log 3 &= -0{,}4771212 \\ \hline \log V &= 1{,}5251797; \end{aligned}$$

$$V = 33^{mc}{,}5104.$$

Puisque 1 mètre cube d'hydrogène pèse 100 grammes, le poids d'hydrogène contenu dans le ballon sera

$$P = 3\,351^{gr}{,}04.$$

La surface de l'enveloppe est représentée par

$$4\pi \cdot 2^2 = 16\pi;$$

et comme 1 mètre carré pèse 250 grammes, le poids de l'enveloppe est

$$P' = 16\pi \cdot 250 = 4000\pi = 12\,566^{gr}{,}37.$$

Le poids du ballon plein d'hydrogène est donc

$$3\,351^{gr},04 + 12\,566^{gr},37 = 15\,917^{gr},41.$$

Maintenant considérons la poussée de bas en haut. Elle est égale au poids P″ de l'air déplacé par le ballon :

$$P'' = V \,.\, 1300.$$

$$\begin{aligned} \log V &= 1,5251797 \\ \log 1300 &= 3,1139433 \\ \hline \log P'' &= 4,6391230\,; \\ P'' &= 43\,563^{gr},52. \end{aligned}$$

En retranchant de ce poids celui du ballon, nous aurons le poids x auquel le ballon ferait équilibre ; donc

$$x = 43\,563^{gr},52 - 15\,917^{gr},41 = 27\,646^{gr},11.$$

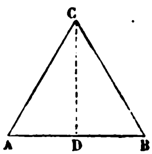
XX.

(Vendredi, 5 août.)

1° Expliquer la manière dont les équations du 2^{me} degré peuvent servir à la recherche des *maxima* et des *minima*.

2° Un triangle équilatéral dont le côté est de 2^m,75 tourne autour d'un de ses côtés; calculer le volume engendré.

Le corps engendré par ABC tournant autour de AB est le double du cône engendré par ADC; donc, en appelant V le volume cherché, nous aurons



$$V = \frac{1}{3}\pi\overline{CD}^2 . AB.$$

Mais

$$\overline{CD}^2 = \overline{AB}^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2 = \frac{3}{4}\overline{AB}^2;$$

donc

$$V = \frac{1}{4}\pi\overline{AB}^3 = \frac{\pi . (2,75)^3}{4}.$$

$$\begin{array}{rcr} \log\pi & = & 0,4971509 \\ 3\log 2,75 & = & 1,3179980 \\ -\log 4 & = & -0,6020600 \\ \hline \log V & = & 1,2130889, \\ V & = & 16^{mc},33386. \end{array}$$

XXI.

(Samedi, 6 août.)

1° Exposer la théorie de la division des polynômes.

2° Calculer, à $\frac{1}{100}$ près, la corde qui sous-tend un arc de 14° dans un cercle dont le rayon est de $475^m,23$.

Cette corde est égale au rayon, multiplié par le double du sinus de 7° (voyez la *Trigonométrie*).

$$\begin{aligned} \log 475,23 &= 2,6769038 \\ \log 2 &= 0,3010300 \\ \log \sin 7^\circ &= \bar{1},0858945 \\ \hline \log x &= 2,0638283; \\ x &= 115^m,83. \end{aligned}$$

XXII.

(Lundi, 8 août.)

1° Exposer la mesure des angles dièdres, et démontrer les propositions qui s'y rattachent.

2° Trois personnes se sont associées et ont mis en commun, la première, 4000 fr.; la deuxième, 7000 fr.; la troisième, 9000 fr. Au bout d'un certain temps ces trois sommes ont produit 5340 fr. de bénéfice. Comment doivent se répartir les bénéfices?

La somme des trois mises est 20000 fr.

Si 20000 fr. rapportent 5340 fr.,

$$1 \text{ fr. doit rapporter } \frac{5340^{f}}{20000} = 0^{f},267.$$

Les bénéfices sont donc

$$0^{f},267 \cdot 4000 = 1068 \text{ fr.},$$
$$0^{f},267 \cdot 7000 = 1869 \text{ fr.},$$
$$0^{f},267 \cdot 9000 = 2403 \text{ fr.}$$

$$\overline{5340 \text{ fr.}}$$

XXIII.

(Mardi, 9 août.)

1° Équilibre des liquides. — Pressions sur les parois des vases qui les contiennent.

2° La capacité de l'or pour la chaleur est 0,0298, celle de l'eau étant prise pour unité. On demande combien il faudra de ce métal à 45° pour élever, de 12°,3 à 15°,7, la température de 1kilog.,00058 d'eau.

Soit x la quantité cherchée. La capacité calorifique, ou la chaleur nécessaire pour diminuer de 1° la température de 1 kilogramme d'or, étant 0,0298, la quantité de chaleur perdue par les x kilogrammes d'or sera

$$x \,.\, 0{,}0298 \,.\, (45 - 15{,}7).$$

Cette quantité doit égaler la chaleur gagnée par l'eau.

Or cette dernière a pour valeur

$$1{,}00058 \,.\, (15{,}7 - 12{,}3)\,;$$

donc

$$x \,.\, 0{,}0298 \,.\, 29{,}3 = 1{,}00058 \,.\, 3{,}4\,;$$

d'où

$$x = \frac{1{,}00058 \,.\, 3{,}4}{0{,}0298 \,.\, 29{,}3}.$$

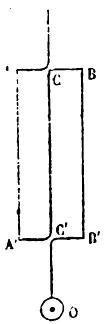
$$\begin{aligned}
\log 1{,}00058 &= 0{,}0002518 \\
\log 3{,}4 &= 0{,}5314789 \\
-\log 0{,}0298 &= -\bar{2}{,}4742163 \\
-\log 29{,}3 &= -1{,}4668676 \\
\hline
\log x &= 0{,}5906468\,; \\
x &= 3^{\text{kilog.}}{,}8962.
\end{aligned}$$

XXIV.

(Mercredi, 10 août.)

1° Mélange des fluides élastiques.

2° On veut faire, avec de l'acier et du laiton, un pendule compensateur dont la longueur constante soit de $0^m,50$; on sait que le coefficient de dilatation de l'acier est de 0,000 010 791, et celui du laiton 0,000 018 782. — On demande quelle disposition on devra donner à ce pendule, et quelles devront être les longueurs des barres d'acier et de laiton pour que la compensation ait lieu.



On donnera au pendule la disposition de celui de Julien Leroy. La tige CO est en acier; elle tend à faire descendre, par sa dilatation, le centre d'oscillation du pendule; les tiges AA', BB' sont en laiton; elles tendent à faire remonter le centre d'oscillation.

Soient, à la température 0°, $CO = l$, $C'O = l'$; à la température t, ces longueurs deviendront $l(1+ft)$, $l'(1+f't)$, f et f' étant les coefficients de dilatation de l'acier et du laiton. Or, on doit avoir, quel que soit t,

$$l(1+ft) - l'(1+f't) = 0,50. \qquad (1)$$

Si l'on suppose $t = 0$, on obtient d'abord

$$l - l' = 0,50; \qquad (2)$$

donc, en retranchant de l'équation (1) et en supprimant le facteur t :

$$lf - l'f' = 0. \qquad (3)$$

Les équations (2) et (3), qui sont du premier degré, donnent

$$l = \frac{f'.0.50}{f'-f} = \frac{0,000\,009\,396}{0,000\,007\,991} = \frac{9396}{7991} = 1^m,1758,$$

$$l' = l - 0^m,50 = 0^m,6758.$$

XXV.

(Vendredi, 12 août.)

1° De la machine pneumatique.

2° Un ballon sphérique, de $0^m,14$ de rayon, est rempli de mercure à la température de 70°. On verse ce mercure dans de l'eau à 4° qui remplit à moitié un vase cylindrique de $0^m,40$ de hauteur et de $0^m,20$ de diamètre. On sait que la densité du mercure est 13,59, son coefficient de dilatation 0,000 180 24, et sa capacité pour la chaleur 0,033. On demande quelle sera la température du mélange, en supposant nulle la température des parois du vase.

Afin de simplifier les calculs, nous prendrons pour unités le décimètre et le kilogramme. Le poids P du mercure est égal à son volume $\frac{4}{3}\pi\ (1,4)^3$ multiplié par la densité du mercure à 70°, densité donnée par la formule

$$d' = \frac{d}{1+kt}.$$

$$d' = \frac{13,59}{1+0,000\,180\,24 . 70} = \frac{13,59}{1,012\,616\,8};$$

donc

$$P = \frac{\pi . 4,53 . (1,4)^3}{0,253\,154\,2}.$$

Le volume de l'eau est celui d'un cylindre dont le diamètre est 2 et la hauteur 2; il a pour expression

$$\frac{1}{4}\pi . 2^3 = 2\pi,$$

et comme 1 décimètre cube d'eau pèse 1 kilogramme, le poids P' de l'eau sera représenté par 2π.

Soient c la chaleur spécifique du mercure, T sa température initiale, t la température initiale de l'eau; soit enfin θ la température finale du mélange. On aura

$$Pc(T-\theta)=P'(\theta-t);$$

d'où

$$\theta=\frac{PcT+P't}{Pc+P'}=\frac{\frac{4,53\,.\,(1,4)^3}{0,2531542}\,.\,0,033\,.\,70+2\,.\,4}{\frac{4,53\,.\,(1,4)^3}{0,2531542}\,.\,0,033+2}$$

$$=\frac{4,53\,.\,(1,4)^3\,.\,2,31+2,0252336}{4,53\,.\,(1,4)^3\,.\,0,033+0,5063084}.$$

En opérant par logarithmes, on trouve

$$4,53\,.\,(1,4)^3\,.\,2,31=28,7140;\ 4,53\,.\,(1,4)^3\,.\,0,033=0,4102;$$

donc

$$\theta=\frac{30,7392}{0,9165}=33^\circ,54.$$

XXVI.

(Samedi, 13 août.)

1° Exposer les règles de la multiplication des monômes. — Quelle est la signification de l'exposant 0 ?

2° Un rouleau cylindrique de bois de chêne a $0^m,3$ de diamètre et $2^m,5$ de longueur. Le poids spécifique du chêne est 1,17. On demande le volume et le poids du rouleau.

Le volume du rouleau, exprimé en décimètres cubes, est

$$V = \frac{1}{4}\pi \,.\, 9 \,.\, 25 = 176,714;$$

son poids en kilogrammes est donc

$$P = 176,714 \,.\, 1,17 = 206,756.$$

XXVII.

(Mardi, 16 août.)

1° Exposer les principales propriétés des progressions géométriques.

2° On a un mélange de sulfate de potasse et de sulfate de soude, dont le poids total est de $1^{\text{kilog.}},348$. Après avoir dissous ce mélange dans l'eau, on précipite l'acide sulfurique par le moyen du nitrate de baryte, et on a $2^{\text{kilog.}},582$ de sulfate de baryte. En déduire la quantité totale d'acide sulfurique contenue dans les deux sulfates, et par suite la proportion de chacun d'eux dans le mélange. On sait que le sulfate de potasse contient $\frac{45}{93}$ pour 100 d'acide sulfurique, le sulfate de soude $\frac{56}{18}$ pour 100, et le sulfate de baryte $\frac{34}{35}$ pour 100.

Appelons x et y les quantités de potasse et de soude contenues dans les deux sels; nous aurons, d'après l'énoncé,

$$x + y = 1,348,$$

$$x \cdot \frac{45}{9300} + y \cdot \frac{56}{1800} = 2,582 \cdot \frac{34}{3500};$$

de plus, le second membre de la dernière équation représente la quantité *totale* d'acide sulfurique.

Cette quantité demandée est donc

$$\frac{1}{100} \cdot 2,582 \cdot \frac{34}{35} = \frac{1}{100}\left(2,582 - \frac{2,582}{35}\right) = 0^{\text{kilog.}},025082.$$

La seconde équation devient, étant simplifiée,

$$135x + 868y = 2,582 \cdot \frac{34}{35} \cdot 279.$$

Par conséquent,

$$y = \frac{2,582 \cdot \frac{34}{35} \cdot 279 - 1,348 \cdot 135}{733} = 0^{\text{kilog.}},70644$$

et $$x = 0^{\text{kilog.}},64156.$$

Les quantités d'acide sulfurique contenues dans les deux sels sont donc :

dans le sulfate de potasse, $641^{\text{g}},56 \cdot \frac{45}{9300} = 3^{\text{g}},104;$

dans le sulfate de soude, $706^{\text{g}},44 \cdot \frac{56}{1800} = 21^{\text{g}},978.$

XXVIII.

(Mercredi, 17 août.)

1° Étant donnée une fraction décimale périodique simple ou mixte, trouver les fractions génératrices.

2° Trouver ce que devient, au bout de 6 ans, une somme de 11058f,20, placée à intérêt composé, au taux de 5 pour 100.

La formule des intérêts composé, $A=a\,(1+r)^n$, donne

$$A = 11058{,}20\,.\,(1{,}05)^6.$$

$$\begin{aligned} \log 11058{,}20 &= 4{,}0436845 \\ 6 \log 1{,}05 &= 0{,}1271358 \\ \hline \log A &= 4{,}1708203; \\ A &= 14819^{f}{,}04. \end{aligned}$$

XXIX.

(Jeudi, 18 août.)

1° Construction et usage du multiplicateur.

2° On a un parallélipipède de glace dont les trois dimensions sont $10^m,50$, $15^m,75$ et $20^m,45$. Ce parallélipipède plonge dans l'eau de la mer. La densité de la glace est 0,930 ; celle de l'eau de mer est 1,026. On demande quelle sera la hauteur du parallélipipède au-dessus de la surface de la mer.

En admettant que, dans la position d'équilibre du parallélipipède, deux de ses faces soient horizontales, appelons B l'aire de chacune d'elles, H la hauteur correspondante, et x la hauteur cherchée. D'après le principe d'Archimède, le poids du parallélipipède proposé doit être égal au poids du parallélipipède liquide déplacé.

Par conséquent

$$BH \cdot 0{,}93 = B(H - x) \cdot 1{,}026 ;$$

d'où

$$x = H \cdot \frac{0{,}096}{1{,}026} = \frac{16}{171} H.$$

Si l'on suppose, successivement,

$$H = 10^m,50, \qquad H = 15^m,75, \qquad H = 20^m,45,$$

on trouve

$$x = 0^m,982, \qquad x = 1^m,484, \qquad x = 1^m,914.$$

XXX.

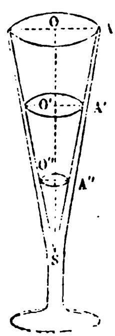
(Vendredi, 19 août.)

1° De la balance.

2° Un verre de vin de Champagne, de forme conique, a intérieurement $0^m,06$ de diamètre au bord; il a été complétement rempli de mercure, d'eau et d'huile, dans une proportion telle, que la couche formée par chacun de ces liquides a $0^m,05$ d'épaisseur. On sait que la densité du mercure est 13,596, et que celle de l'huile employée est 0,915, l'eau ayant une densité prise pour unité. Calculer le poids du mercure, de l'eau et de l'huile, en négligeant l'influence de la température sur les densités de ces liquides.

La similitude des triangles SOA, SO'A', SO''A'' donne

$$\frac{OA}{3}=\frac{O'A'}{2}=\frac{O''A''}{1}.$$



Le rayon OA étant $0^m,03$, le rayon O'A' sera $0^m,02$, et le rayon O''A'' $0^m,01$.

Le volume V du mercure est celui d'un cône SO''A''; donc, en prenant le centimètre pour unité,

$$V=\frac{\pi}{3}.5.1.$$

Le volume de l'eau s'obtiendra en retranchant le volume du mercure de celui du cône SO'A':

$$V'=\frac{\pi}{3}.5.2.4-\frac{\pi}{3}.5.1.$$

$$=\frac{1}{3}\pi.5.7.$$

Le volume de l'huile s'obtiendra de même en retranchant, du volume du cône SOA, le volume du cône SO'A' :

$$V''=\frac{\pi}{3}5.3.9-\frac{\pi}{3}5.2.4,$$

$$=\frac{\pi}{3}.5(3.9-2.4).$$

$$V''=\frac{\pi}{3}.5.19.$$

Nous multiplierons V par 13,596, V' par 1, V'' par 0,915, et nous aurons les poids cherchés :

$$P=\frac{\pi}{3}.5.13{,}596\ldots=71^{gr},188,$$

$$P'=\frac{\pi}{3}.5.\ 7.\ldots\ldots=36^{gr},652,$$

$$P''=\frac{\pi}{3}.5.19.0{,}915=91^{gr},027.$$

On aurait pu arriver au même résultat en déterminant le volume de l'huile et celui de l'eau par la considération des troncs de cône.

XXXI.

(Samedi, 20 août.)

1° Théorie du plus grand commun diviseur.

2° Trouver les dimensions d'un cylindre de la contenance d'un hectolitre, dont la hauteur soit égale au diamètre de la base.

Le volume d'un cylindre a pour expression $\pi r^2 h$; dans la question actuelle, $h = 2r$. Nous aurons donc, pour le volume de notre cylindre, $\pi r^2 . 2r$, ou $2\pi r^3$.

Ce volume doit égaler 1 hectolitre $= 0^{mc},1$; donc

$$2\pi r^3 = 0,1;$$

d'où

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{20\pi}}.$$

$$\begin{aligned}
\log 1 &= \quad 0 \\
-\log 20 &= -\ 1,3010300 \\
-\log \pi &= -\ 0,4971509 \\
\hline
& \quad\ \bar{2},2018191 \\
\frac{1}{3} &= \quad \bar{1},4006064 = \log r; \\
r &= \quad 0^{m},25154.
\end{aligned}$$

Le diamètre de la base, et la hauteur, sont donc égaux chacun à 503 millimètres.

XXXII.

(Lundi, 22 août.)

1° Exposer le système des poids et mesures adopté en France.

2° On a deux triangles équilatéraux dont les côtés sont $43^m,57$ et $68^m,35$. On demande de calculer le côté d'un troisième triangle équilatéral, dont la surface serait égale à la somme des surfaces des deux premiers.

Les trois triangles sont entre eux comme les carrés de leurs côtés ; par conséquent le côté x du triangle cherché est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit seraient 43,57 et 68,35. On a donc

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt{(43,57)^2 + (68,35)^2} \\
&= \sqrt{6570,0674} \\
&= 81^m,0560.
\end{aligned}
$$

XXXIII.

(Mardi, 23 août.)

1° De l'électromètre condensateur.

2° On a une sphère de platine, de 0,05 de rayon à 95°. On la plonge dans 2 litres d'eau à 4°. On demande la température de l'eau lorsque l'équilibre s'est établi. La capacité calorifique du platine est 0,03351; le coefficient de dilatation est 0,000 008 565 et la densité 21,53.

Le volume de la sphère de platine est donné par la formule

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(0,5)^3.$$

Pour avoir son poids P, il faut multiplier ce volume par la densité du platine à 95°, densité donnée par la formule

$$d' = \frac{d}{1+kt},$$

$$d' = \frac{21,53}{1+0,000\,008\,565\,.\,95} = \frac{21,53}{1,000\,813\,675}.$$

On a ainsi

$$P = \frac{4\,.\,\pi\,.\,(0,5)^3\,.\,21,53}{3\,.\,1,000\,813\,675},$$

$$= 11^{\text{kilog.}},262.$$

Appliquons maintenant la formule

$$Mc(T-\theta) = m(\theta - t);$$

nous aurons

$$11,262\,.\,0,03351(95-\theta) = 2(\theta-4),$$

$$\theta = \frac{11,262\,.\,0,03351\,.\,95 + 2\,.\,4}{11,262\,.\,0,03351 + 2},$$

$$\theta = 18°,44.$$

XXXIV.

(Mercredi, 24 août.)

1° De la galvanoplastie.

2° On donne un corps A pesant $7^g,55$ dans l'air, $5^g,17$ dans l'eau, et $6^g,35$ dans un liquide B. De ces données, tirer la densité du corps A et celle du liquide B.

Le poids spécifique d'un corps étant le quotient de son poids dans l'air, par la perte de poids qu'il subit dans l'eau, il faudra, pour résoudre la première partie de la question, diviser 7,55 par l'excès de 7,55 sur 5,17. On trouve ainsi, pour le poids spécifique du corps A,

$$\frac{7,55}{2,38} = 3,1723.$$

Le même corps perd, dans le liquide B, $7,55 - 6,35$ ou 1,20. Cette perte est égale au poids du liquide déplacé par le corps. 1,20 et 2,38 représentent donc les poids de deux volumes égaux de liquide et d'eau; par suite, le poids spécifique du liquide B sera

$$\frac{1,20}{2,38} = 0,5042.$$

XXXV.

(Jeudi, 25 août.)

1° De la bouteille de Leyde.— Donner l'explication de la charge, de sa limite, de la décharge instantanée et de la décharge successive.

2° Le poids de l'air atmosphérique étant $\frac{1}{770}$ du poids de l'eau, déterminer le poids de l'air contenu dans un cylindre dont la circonférence de la base est $0^m,3$, et la hauteur $0^m,8$.

(Problème donné le 19 juillet.)

XXXVI.

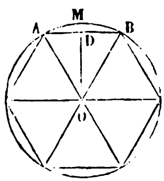
(Vendredi, 26 août.)

1° Exposer les principes de la construction des tables trigonométriques, et faire connaître la disposition et l'usage de ces tables.

2° Calculer en hectares la surface d'un hexagone régulier dont le côté a une longueur de 235 mètres.

La surface d'un polygone régulier a pour mesure le périmètre, multiplié par la moitié de l'apothème.

Or, dans le triangle équilatéral AOB,



$$\overline{OD}^2 = \overline{AO}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4} = \frac{3}{4}\overline{AB}^2;$$

donc

$$OD = \frac{AB}{2}\sqrt{3} = \frac{235}{2}\sqrt{3}.$$

Par suite, l'aire de l'hexagone a pour valeur

$$A = \frac{6\ .\ 235\ .\ 235}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{2}(235)^2\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} \log 3 &= 0,4771212 \\ 2\log 235 &= 4,7421356 \\ \frac{1}{2}\log 3 &= 0,2385606 \\ -\log 2 &= -0,3010300 \\ \hline \log A &= 5,1567874; \end{aligned}$$

A = 143478 mètres carrés = 14 hectares, 3478.

XXXVII.

(Samedi, 27 août.)

1° Donner les principales expériences sur les courants.

2° Dans 25kilog.,45 d'eau à 12°,5 on met 6kilog.,17 d'un corps à la température de 80°; le mélange prend une température de 14°,17. On demande quelle est la chaleur spécifique du corps.

Soit x la chaleur spécifique du corps, c'est-à-dire la quantité de chaleur nécessaire à 1 kilogramme de ce corps pour que sa température varie de 1°; la quantité de chaleur nécessaire pour faire passer les 6kilog.,17, de 80° à 14°,17, sera

$$x \,.\, 6{,}17 \,.\, (80 - 14{,}17).$$

Cette chaleur perdue par le corps doit égaler celle qui est gagnée par l'eau ; or celle-ci a pour expression

$$25{,}45 \,.\, (14{,}17 - 12{,}5)\,;$$

donc

$$x \,.\, 6{,}17 \,.\, (80 - 14{,}17) = 25{,}45 \,.\, (14{,}17 - 12{,}5)\,;$$

et

$$x = 0{,}105\ldots,$$

c'est-à-dire qu'il faut, pour faire passer 1 kilogramme du corps, de 0° à 1°, une quantité de chaleur qui soit les 105 millièmes de celle qu'il faut pour élever de 1° la température d'un kilogramme d'eau.

SESSION DE DÉCEMBRE 1853.

XXXVIII.

(Mardi , 6 décembre.)

1° Théorie du paratonnerre.

2° Un vase sphérique, dont le rayon intérieur égale $\frac{2}{3}$ de mètre, à 0°, est formé d'une matière dont le coefficient de dilatation linéaire égale $\frac{1}{2500}$. On demande combien de kilogrammes de mercure ce vase renferme à 0° et à 25°.

Le volume du vase, à 0°, est

$$\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{2^3}{3^3} = \frac{32}{81}\pi ;$$

le poids du mercure, évalué en kilogrammes, est

$$P = \frac{32}{81}\pi \cdot 1000 \cdot 13,596,$$

ou

$$P = \frac{32\pi \cdot 4,532}{27}.$$

$$\begin{aligned}
\log 32 &= \quad 1,5051499 \\
\log \pi &= \quad 0,4971509 \\
\log 4532 &= \quad 3,6562899 \\
-\log 27 &= -1,4313637 \\
\hline
\log P &= \quad 4,2272270 ; \\
P &= \quad 16874^{\text{kilog.}},348.
\end{aligned}$$

Pour avoir la quantité de mercure que renferme le vase à 25°, il faut chercher ce que devient le volume de ce vase à cette température.

La formule $V' = V(1 + kt)$ donne

$$V' = \frac{4\pi \cdot 2^3}{3 \cdot 3^3}\left(1 + \frac{3.25}{2500}\right)$$

Le poids P′ du mercure est donc

$$P' = \frac{4\pi \cdot 2^3 \cdot 13{,}596}{3 \cdot 3^3}\left(1 + \frac{3}{100}\right)$$

$$= P \cdot \frac{101}{100} \cdot = P + \frac{3 \cdot P}{100};$$

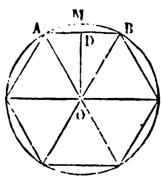
$$P' = 17380^{\text{kilog.}}, 578.$$

XXXIX.

(Mercredi, 7 décembre.)

1° Expliquer les règles de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division des fractions ordinaires.

2° Étant donné un arc de 60°, calculer la corde, la surface du segment et la surface du secteur, le rayon du cercle étant $2^m,35$.



La corde qui sous-tend l'arc de 60° est le côté de l'hexagone inscrit; par conséquent elle est égale au rayon donné.

Le secteur est le $\frac{1}{6}$ du cercle ; l'aire du secteur est donc

$$A = \frac{1}{6}\pi \cdot (2,35)^2.$$

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0.4971509 \\ 2 \log 2,35 &= 0,7421357 \\ -\log 6 &= -0,7781512 \\ \hline \log A &= 0,4611354; \\ A &= 2,8916. \end{aligned}$$

Pour avoir le segment AMBD, il faut retrancher le triangle AOB du secteur AMBO.

Or, le triangle équilatéral AOB a pour mesure

$$T = \frac{1}{4}\overline{AB}^2\sqrt{3} = \frac{1}{4} \cdot (2,35)^2 \cdot \sqrt{3}.$$

$$2 \log 2{,}35 = 0{,}7421357$$

$$\frac{1}{2} \log 3 = \quad 0{,}2385606$$

$$- \log 4 = -0{,}6020600$$

$$\log T = \quad 0{,}3786363\,;$$

$$T = \quad 2{,}3913\,,$$

$$A - T = \quad 0{,}5003.$$

Ainsi, les valeurs demandées sont

Secteur. . . . $2^{m \cdot q}{,}8916$
Segment. . . $0^{m\,q}{,}5003$

XL.

(Jeudi, 8 décembre.)

1° Équilibre des fluides dont les diverses parties sont de densités différentes.

2° Trouver combien il faut de kilogrammes de vapeur d'eau pour élever 20 kilogrammes d'eau de 0° à 90°.

(Ce problème se résout comme celui du 13 juillet, dont il ne diffère que par les valeurs numériques des données. On a donc

$$(640 - 90)x = 20 \,.\, 90,$$

$$x = \frac{20 \,.\, 90}{640 - 90} = \frac{1800}{1550} = 3^{\text{kilog.}},273).$$

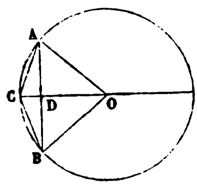
XLI.

(Vendredi, 9 décembre.)

1° Théorie de la nature des polyèdres.

2° Étant donné un arc de 83°,20, dans un cercle de 10 mètres de rayon, trouver la surface du triangle formé par la corde qui sous-tend cet arc, et par les deux cordes qui joignent les extrémités de la première corde au milieu de l'arc.

En appelant r le rayon donné, nous aurons, dans le triangle rectangle OAD



$$AD = r \sin 41^\circ\ 40',$$
$$OD = r \cos 41^\circ\ 40',$$

puis

$$CD = r - r \cos 41^\circ\ 40',$$
$$= r(1 - \cos 41^\circ\ 40').$$

Or, A représentant un arc quelconque,

$$1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{1}{2} A;$$

donc

$$CD = r \,.\, 2 \sin^2 \frac{1}{2} (41^\circ\ 40'),$$
$$CD = 2r \sin^2 20^\circ\ 50'.$$

La surface du triangle ACB a pour mesure AD . CD;

donc

$$T = r \sin 41^\circ\ 40' \,.\, 2r \sin^2 20^\circ\ 50',$$
$$= 2r^2 \sin 41^\circ\ 40' \,.\, \sin^2 20^\circ\ 50.$$

Remplaçons r par 10, nous aurons

$$T = 200 \,.\, \sin 41^\circ\ 40' \,.\, \sin^2 20^\circ\ 50'.$$

$$\log 200 = 2{,}3010300$$
$$\log \sin 41^\circ\ 40' = \bar{1}{,}8226883$$
$$2 \log \sin 20^\circ\ 50' = \bar{1}{,}1020474$$
$$\log T = 1{,}2257657;$$
$$T = 16^{m.q},8176.$$

XLII.

(Samedi, 10 décembre.)

1° Théorie des progressions arithmétiques et des progressions géométriques.

2° On donne un cylindre de fer, du poids de 41 kilogrammes; la hauteur est de $2^m,50$; la densité du fer est 7,788. On demande le diamètre du cylindre.

Prenons pour unités le décimètre et le kilogramme, nous aurons, en appelant r le rayon inconnu,

$$\pi r^2 . 25 . 7,788 = 41 ;$$

d'où

$$r = \sqrt{\frac{164}{\pi . 778,8}}.$$

$$\begin{aligned}
\log 164 &= 2,2148438 \\
-\log \pi &= -0,4971509 \\
-\log 778,8 &= -2,8914259 \\
\hline
& \bar{2},8262670 \\
\frac{1}{2} &= \bar{1},4131335 = \log r ; \\
r &= 0,25890 = 25^{mm},890.
\end{aligned}$$

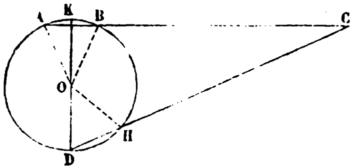
Le diamètre $= 51^{mm},78$.

XLIII.

(Lundi, 12 décembre.)

1° Des chaleurs spécifiques. — Leur détermination.

2° Trouver l'angle d'un polygone régulier de dix-sept côtés ; y a-t-il dans un pareil polygone deux côtés parallèles? — Trouver le plus petit angle que forment deux côtés prolongés.



La somme des angles intérieurs du polygone de 17 côtés égale 15 fois 2 droits ou 30 droits.

Chaque angle vaut donc

$$\left(\frac{30}{17}\right)^d = \frac{30 \;.\; 90^\circ}{17} = \frac{2700^\circ}{17},$$

ou

$$158^\circ\ 49'\ 24''\ \frac{12}{17}.$$

L'angle au centre a pour valeur

$$\left(\frac{4}{17}\right)^d = \frac{4 \;.\; 90^\circ}{17} = \frac{360^\circ}{17},$$

ou

$$21^\circ\ 10'\ 35''\ \frac{5}{17}.$$

Le polygone ayant un nombre impair de côtés, il n'y a pas de côtés parallèles, et la perpendiculaire élevée sur le milieu d'un côté vient aboutir à un sommet du polygone.

Le plus petit angle formé par deux côtés prolongés est celui que forme un côté AB avec le côté DH à l'extrémité duquel aboutit la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB.

Cet angle ACD a pour mesure $\frac{AD - BH}{2}$.

$$AD = 180° - \frac{1}{2}AKB,$$

$$BH = 180° - AKB - \frac{1}{2}AKB = 180° - \frac{3}{2}AKB;$$

donc

$$ACD = \frac{1}{2}AOB = 10°\ 35'\ 17''\ \frac{11}{17}.$$

XLIV.

(Mardi, 13 décembre.)

1° **Extraction de la racine carrée.**

2° **Le diamètre d'une sphère est de 4 mètres ; une corde parallèle à ce diamètre est de 2 mètres. On demande quelle est la surface qu'engendre cette corde, en tournant autour du diamètre.**

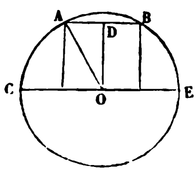
AB tournant autour du diamètre CE engendre la surface latérale d'un cylindre dont le rayon est OD.

Or,

$$OD = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3};$$

donc la surface décrite par AB a pour mesure

$$A = 2\pi . 2 . \sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3}.$$



$$\begin{aligned}
\log 4 &= 0,6020599\\
\log \pi &= 0,4971509\\
\frac{1}{2}\log 3 &= 0,2385606\\
\hline
\log A &= 1,3377714;\\
A &= 21^{m},7656.
\end{aligned}$$

XLV.

(Mercredi, 14 décembre.)

1° Usage du multiplicateur en physique.

2° On fabrique avec de l'or, dont la densité est 19,362, des feuilles qui ont un dix-millième de millimètre d'épaisseur. Quelle surface pourrait-on couvrir avec 5 grammes d'or?

Soit x la surface cherchée, exprimée en centimètres carrés; en la multipliant par l'épaisseur de la feuille d'or, on aura le volume de celle-ci; et si l'on multiplie ce volume par 19,362, on devra obtenir le poids des feuilles, évalué en grammes, c'est-dire 5.

De
$$x \,.\, 0{,}000\,01 \,.\, 19{,}362 = 5,$$
on conclut
$$x = \frac{5}{0{,}000\,193\,62} = 25824.$$

La surface que l'on pourrait couvrir serait de

$$25\,824 \text{ centimètres carrés} = 2^{\text{m.q}},5824.$$

XLVI.

(Jeudi, 15 décembre.)

1° Des densités.

2° Un ballon pèse $254^{gr.},735$ lorsqu'il est vide et $5422^{gr.},788$ lorsqu'il est plein d'air à la température de 4°. On sait que le poids de l'air est à celui de l'eau comme 129 est à 10 0000. On demande la capacité du ballon.

Le même ballon, plein d'un autre gaz à 4°, pèse $651^{gr.},175$, la pression atmosphérique étant $0^{m},76$. Quel en serait le poids si la pression était 1,23?

Le poids de l'air est la différence entre $5422^{gr},788$ et $254^{gr},735$, c'est-à-dire $5168^{gr},053$.

Puisque le poids x de l'air est les 0,00129 du poids de l'eau, à volume égal,

$$x = \frac{5168,053}{0,00129} = 4006242^{gr.} = 4006^{kilog.},242.$$

Et comme 1 kilogramme d'eau est le poids d'un litre, la capacité du ballon sera

$$4006^{l},243.$$

Le même ballon, plein d'un autre gaz, pèse $651^{g},175$; le poids de ce gaz seul est donc $651^{g},175$ diminué de $254^{g},735$, poids du verre; ce qui donne $396^{g},387$, à la pression $0^{m},76$. Les poids des gaz étant proportionnels aux pressions qu'ils supportent, on connaîtra le poids de ce gaz à la pression $1^{m},23$ en posant la proportion

$$\frac{396,387}{x} = \frac{0,76}{1,23};$$

$$x = 641^{g},521.$$

XLVII.

(Vendredi, 16 décembre.)

1° Électricité dissimulée. — Bouteille de Leyde. — Condensateur.

2° On plonge dans un bain de 20 litres d'eau à 80° centigrades, une sphère en glace, de 0,144 millimètres de rayon. Calculer la température du bain après la fusion de la glace, la chaleur latente étant 79,25.

Le volume de la sphère de glace est, en décimètres cubes,

$$V = \frac{4}{3}\pi . (1,44)^3 = 12,507 ;$$

et si nous supposons la glace de même densité que l'eau, le poids de cette glace sera

$$12^{\text{kilog.}},507.$$

Or 1 kilogramme de glace absorbe, pour se fondre, 79,25 unités de chaleur; donc les $12^{\text{kilog.}},507$ absorberont 12,507 . 79,25 unités de chaleur; de plus, comme ils doivent ensuite s'élever à la température inconnue θ, ils absorberont encore 12,507 θ unités de chaleur; en tout

$$12,507\,(79,25 + \theta).$$

Cette chaleur est égale à celle que perdent les 20 litres d'eau en passant de 80° à θ, chaleur exprimée par $20\,(80 - \theta)$; d'où

$$12,507\,(79,25 + \theta) = 20\,(80 - \theta).$$

Cette équation donne

$$\theta = \frac{20 . 80 - 12,507 . 79,25}{12,507 + 20},$$

ou

$$\theta = 18^\circ,73.$$

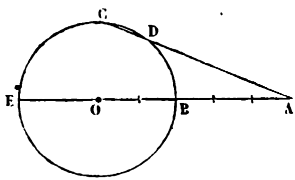
XLVIII.

(Samedi, 17 décembre.)

1° Discuter la marche à suivre pour trouver le rapport de la circonférence au diamètre.

2° Étant donné un cercle C dont le rayon égale 2 mètres, et un point A extérieur à ce cercle, et distant de 3 mètres de la circonférence, trouver la longueur de la partie extérieure d'une sécante menée du point A au cercle et dont la partie intérieure égale 1 mètre.

AE et AC sont deux sécantes menées à un cercle par un point extérieur. Elles sont inversement proportionnelles à leurs parties extérieures. On a donc



$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}.$$

Soit $AD = x$, d'où $AC = x + 1$; à cause de $AE = 7$, x sera donné par l'équation

$$\frac{7}{x+1} = \frac{x}{3},$$

ou

$$x^2 + x - 21 = 0;$$

donc

$$x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{85})$$

$$= \frac{-1 \pm 9{,}2195\ldots}{2}.$$

La seconde valeur étant entièrement négative ne peut satisfaire à l'énoncé; donc

$$AD = \frac{-1 + 9{,}2195\ldots}{2}$$

$$= 4^{m},1097\ldots$$

Remarque. Si l'on change x en $-x$ dans l'équation $\frac{7}{x+1} = \frac{x}{3}$, on obtient $\frac{7}{x-1} = \frac{x}{3}$; par conséquent la racine *positive* de cette nouvelle équation, ou la racine *négative* de la première, prise positivement, satisfait à cet autre énoncé :

Étant donné un cercle C, *dont le rayon égale* 2 *mètres, et un point* A *extérieur à ce cercle et distant de* 3 *mètres de la circonférence, trouver la longueur de la sécante menée du point* A, *et dont la partie intérieure égale* 1 *mètre.* Cette question ne diffère pas de la première.

XLIX.

(Lundi, 19 décembre.)

1° Comment peut-on aimanter par les courants?

2° On donne une sphère de cuivre de $0^m,18$ de rayon, creuse, contenant une sphère de platine de $0^m,05$ de rayon, de telle sorte qu'il n'y ait aucun vide entre les deux sphères; la densité étant pour le platine 21,53 et pour le cuivre 8,85, calculer le poids de la masse ainsi formée.

Le volume de la sphère dont le rayon est $0^m,18$ est, en décimètres cubes,

$$\frac{4}{3}\pi.(1,8)^3;$$

celui de l'autre sphère est

$$\frac{4}{3}\pi.(0,5)^3 = \frac{1}{3}\pi.0,5.$$

En retranchant le second volume du premier, nous aurons le volume du cuivre :

$$V = \frac{4}{3}\pi\left[(1,8)^3 - (0,5)^3\right] = \frac{4}{3}\pi.5,707.$$

Actuellement, les poids P, P′ du platine et du cuivre seront, en kilogrammes :

$$P = \frac{1}{3}\pi.0,5.21,53, \qquad P' = \frac{4}{3}\pi.5,707.8,85;$$

ou

$$P = \frac{1}{3}\pi.10,765, \qquad P' = \pi.5,707.11,8.$$

Effectuant par logarithmes, on trouve

$$\begin{array}{r} P = 11,273 \\ P' = 211,563 \\ \hline \end{array}$$

Le poids total est donc $222^{\text{kilog.}},836$.

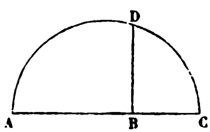
L.

(Mardi, 20 décembre.)

1° Trouver les formules qui donnent le sinus et le cosinus de la somme de deux arcs, connaissant le sinus et le cosinus de chaque arc.

2° Construire géométriquement un carré équivalent à un triangle donné; calculer le côté du carré, en supposant que la base ait 48 mètres et la hauteur 54.

Soit x le côté du carré équivalent au triangle donné; la surface de ce carré sera x^2. Celle du triangle aura pour expression le produit de sa base 48, par la moitié de sa hauteur 54.



Ainsi,

$$x^2 = 48 \,.\, 27;$$

d'où

$$x = 36.$$

Pour construire géométriquement le carré, il suffit de remarquer que son côté est moyen proportionnel entre la base et la moitié de la hauteur données. Par conséquent, après avoir pris, sur une même droite, AB égale à la base du triangle, BC égale à la moitié de sa hauteur, on décrit sur AC, comme diamètre, une demi-circonférence, et on mène BD perpendiculaire à AC : BD est le côté demandé.

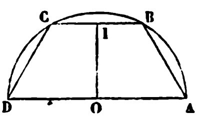
LI.

(Mercredi, 21 décembre.)

1° **Théorie et construction des thermomètres.— Des diverses échelles. — Leur rapport.**

2° **Trouver le volume engendré par un demi-hexagone régulier de 4 mètres de côté, tournant autour du diamètre du cercle circonscrit.**

Ce volume a pour mesure la surface engendrée par le contour polygonal ABCD, multipliée par le tiers de l'apothème.



La surface a pour mesure la circonférence inscrite, multipliée par la projection AD de ABCD.

Conséquemment, R étant le rayon du cercle circonscrit, ou le côté de l'hexagone,

$$V = 2\pi OI \,.\, 2R \,.\, \frac{1}{3} OI$$

$$= \frac{4}{3}\pi R \,.\, \overline{OI}^2.$$

Mais

$$\overline{OI}^2 = \frac{3}{4} R^2 ;$$

donc

$$V = \pi R^3.$$

Dans l'exemple proposé, $R^3 = 64$; donc

$$V = 201^{\text{m c}}061\,930.$$

LII.

(Jeudi, 22 décembre.)

1° Indiquer comment on met les problèmes en équation. — Comment résout-on une équation à plusieurs inconnues?

2° Le côté d'un cône est donné ainsi que la base; déterminer la surface de la section faite parallèlement à la base.

Cette section est à la base, comme le carré du côté du cône, est au carré du segment de ce côté, compris entre le plan sécant et le sommet du cône.

LIII.

Vendredi, 23 décembre.)

1° De l'hygromètre à cheveu; comparer cet instrument avec le thermomètre.

2° On a la base et la hauteur d'un cylindre; mesurer le poids de l'alcool contenu dans ce cylindre, la densité étant connue.

Ce poids résulte immédiatement de la formule

$$P = \pi R^2 H d.$$

LIV.

(Samedi, 24 décembre.)

1° Déterminer la surface d'un triangle en fonction de ses trois côtés.

2° On donne un triangle équilatéral dont la surface est 1024 mètres carrés; on demande son côté.

La formule qui donne l'aire d'un triangle en fonction des trois côtés est

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Dans le cas du triangle équilatéral,

$$b = c = a,\ p = \frac{3}{2}a;$$

donc

$$T = \sqrt{\frac{3}{2}a\left(\frac{a}{2}\right)^3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

Cette dernière valeur devant être égale à 1024, on a

$$a^2 = \frac{4096}{\sqrt{3}} = \frac{64^2}{\sqrt{3}},$$

$$a = \frac{64}{\sqrt[4]{3}}.$$

$$\begin{aligned} \log 64 &= 1,8061800 \\ -\frac{1}{4}\log 3 &= -0,1192803 \\ \hline \log a &= 1,6868997; \end{aligned}$$

$$a = 48^{m},6295.$$

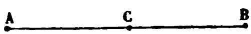
LV.

(Lundi, 26 décembre.)

1° Formule qui donne la surface de l'hexagone dont le côté est représenté par a.

2° On a deux points A et B distants de 225 kilomètres. Les 100 kilogrammes de charbon coûtent : en A $3^{f},75$, en B $4^{f},25$. On demande quel est le point de la ligne AB où le charbon coûte le même prix qu'il vienne de A ou qu'il vienne de B (les 100 kilogrammes coûtent 0,08 centimes par kilomètre).

Soit C le point satisfaisant à la question ; appelons x la distance AC ; alors $CB = 225 - x$. D'après l'énoncé, on a immédiatement



$$3,75 + 0,08x = 4,25 + 0,08(225 - x) ;$$

d'où

$$16x = 425 + 1800 - 375 = 1850 ;$$

$$x = 115^{f},625.$$

Ainsi

$$AC = 115^{k.m},625,$$

$$BC = 109 \quad ,375.$$

LVI.

(Mardi, 27 décembre.)

1° Des thermomètres. — Construction. — Usages. — Expliquer comment certaines observations thermométriques peuvent être employées pour la détermination de la latitude du lieu où elles sont faites.

2° Deux vases de forme conique et de même poids ont intérieurement $0^m,25$ de hauteur et $0^m,12$ de diamètre à leurs bords supérieurs. L'un est rempli d'acide sulfurique dont la densité est 1,84; l'autre est rempli d'éther dont la densité est 0,71. On demande la différence entre les poids des deux vases ainsi remplis.

Le volume d'un cône est représenté par $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Le volume commun des deux liquides sera donc, en prenant le décimètre pour unité, $\frac{1}{3}\pi \,.\, (0,6)^2 \,.\, 2,5$. Les poids, exprimés en kilogrammes, seront :

pour l'acide sulfurique, $\frac{1}{3}\pi \,.\, (0,6)^2 \,.\, 2,5 \,.\, 1,84$;

pour l'alcool, $\frac{1}{3}\pi \,.\, (0,6)^2 \,.\, 2,5 \,.\, 0,71$.

La différence demandée est donc

$$\frac{1}{3}\pi \,.\, (0,6)^2 .\, 2,5 \,.\, 1,13 = \pi \,.\, 0,12 \,.\, 2,5 \,.\, 1,13 = \pi \,.\, 0,339,$$

$$1^{\text{kilog.}},065.$$

LVII.

(Mercredi, 28 décembre.)

1° Principales expériences de Galvani et de Volta; disposition de la pile voltaïque et de la pile de Bunsen.

2° Un tube reposant sur une cuve à mercure contient une colonne d'air de $1^m,85$, à la pression de $0^m,75$. On demande la pression qu'il faudra exercer sur le mercure pour que la colonne se réduise à $0^m,35$.

D'après la loi de Mariotte, les volumes des gaz sont inversement proportionnels aux pressions qu'ils supportent. En appelant x la pression qu'il faudra exercer sur le mercure, on aura donc

$$\frac{1,85}{0,35}=\frac{x}{0,75},$$

d'où

$$x=\frac{1,85\ .\ 0,75}{0,35}=0,75\ .\ \frac{37}{7},$$

$$x=3^m,964.$$

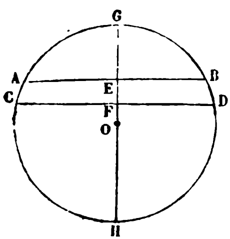
SESSION D'AVRIL 1854.

LVIII.

(Samedi, 1er avril 1854.)

1° Exposer la théorie de la mesure des angles.

2° On donne une sphère dont le rayon est 13 mètres, sur laquelle on considère une zone à deux bases, dont l'une est à une distance du centre de la sphère égale à 1 mètre; la surface de cette zone est 100 mètres carrés. On demande la surface du cercle qui forme la seconde base de la zone.



En appelant h la hauteur inconnue de la zone ABCD, on a

$$2\pi R h = 100,$$

et comme $R = 13$,

$$h = \frac{50}{13\pi}.$$

$$\begin{aligned} \log 50 &= 1,6989700 \\ -\log 13 &= -1,1139433 \\ -\log \pi &= -0,4971509 \\ \hline \log h &= 0,0878758; \end{aligned}$$

$$h = 1,22427.$$

Par suite, à cause de $OF = 1$, $OE = 2^{m},22427$.

La perpendiculaire AE est moyenne proportionnelle entre les deux segments EG, EH du diamètre ; donc

$$\overline{AE}^2=(13-2,22427)(13+2,22427)=10,77573.15,22427.$$

L'aire A du cercle AB sera ensuite déterminée par la formule

$$A = \pi \cdot 10,77573 \cdot 15,22427.$$

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0,4971509 \\ \log 10,77573 &= 1,0324294 \\ \log 15,22427 &= 1,1825365 \\ \hline & \quad 2,7121168 ; \end{aligned}$$

$$A = 515^{m.q},3670.$$

LIX.

(Lundi, 3 avril.)

1° Faire connaitre les procédés à l'aide desquels on détermine la densité des corps solides, liquides ou gazeux.

2° Calculer la puissance calorifique d'un stère de bois qui pèse 400 kilogrammes, et qui se compose d'un mélange de chêne et de sapin ; on sait que le chêne pèse 450 kilogrammes le mètre cube, et le sapin 325 kilogrammes.— On sait aussi que la quantité d'eau dont la température s'est élevée de 0° à 100° par la combustion de 1 mètre cube de bois, est 12150 kilogrammes pour le chêne, et 8775 pour le sapin.

Désignons par x et y les volumes de chêne et de sapin qui entrent dans le mélange donné ; nous aurons

$$x+y=1,$$
$$450x+325y=400 ;$$

ou, en simplifiant,

$$x + y = 1,$$
$$18x + 13y = 16.$$

Ces deux équations donnent $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{2}{5}$. Les quantités de chêne et de sapin sont donc, en poids, $450 \,.\, \frac{3}{5} = 270$ kilogrammes, et $325 \,.\, \frac{2}{5} = 130$ kilogrammes.

D'un autre côté, la combustion de 1 mètre cube de chêne pouvant réduire en vapeur 12 150 kilogrammes d'eau, le chêne contenu dans le mélange sera capable de réduire en vapeur une quantité d'eau égale à

$$\left(12150 \,.\, \frac{3}{5}\right) \text{ kilogrammes} = 7290 \text{ kilogrammes}.$$

De même, la combustion du sapin entrant dans le mélange pourra réduire en vapeur $8775 \,.\, \frac{2}{5}$ ou 3510 kilogrammes d'eau.

D'après cela, 1 kilogramme du mélange pourra, par sa combustion, élever de 1° la température d'une quantité d'eau égale à $\frac{7290 + 3510}{400 \,.\, 100} = 0^{\text{kilog.}},27.$

LX.

(Mardi, 4 avril.)

1° Des électro-aimants. — Leurs propriétés. — Procédés d'aimantation.

2° Un ballon vide pèse 152gr.,5; plein d'air il pèse 162gr.,10; plein d'un autre gaz, il pèse 168 grammes.— On demande la densité du deuxième gaz, la pression restant invariable. Examiner quelle correction il aurait fallu faire si la pression avait été de 0m,75 pendant la pesée de l'air, et de 0m,77 pendant la pesée du gaz.

Le poids du gaz contenu dans le ballon est

$$168^{gr.} - 152^{gr.},5 = 15^{gr.},5.$$

Le poids de l'air contenu dans le même ballon est

$$162^{gr.},10 - 152^{gr.},5 = 9^{gr.},6.$$

Le poids spécifique du gaz est donc

$$\frac{15,5}{9,6} = 1,6146.$$

Si la pression eût été de 0m,77 pendant la pesée du gaz, on aurait dû, dans les calculs précédents, remplacer le poids observé 15gr.,5 par $15,5 \cdot \frac{75}{77}$, attendu que les poids d'un même volume de gaz sont proportionnels aux pressions. On obtient ainsi, pour le poids spécifique corrigé,

$$\frac{15,5 \cdot \frac{75}{77}}{9,6} = \frac{15,09}{9,6} = 1,572.$$

LXI.

(Mercredi, 5 avril.)

1° Démontrer les propriétés fondamentales des logarithmes.

2° La hauteur d'un trapèze est de 10 mètres; la surface de ce trapèze est égale à celle du rectangle qui serait construit sur ses deux bases parallèles; de plus, le double de la plus petite base, ajouté au triple de la plus grande, est égal à quatre fois la hauteur du trapèze. On demande les valeurs des deux bases.

Soient x, y les deux bases, x étant la plus petite; les équations du problème sont, évidemment,

$$5(x+y)=xy, \tag{1}$$

$$2x+3y=40. \tag{2}$$

L'élimination de x donne

$$5y=(y-5)\,\frac{40-3y}{2},$$

ou, en simplifiant,

$$3y^2-45y+200=0. \tag{3}$$

Cette équation a ses racines imaginaires; par conséquent, le problème est impossible.

LXII.

(Jeudi, 6 avril.)

1° Comment trouve-t-on l'inclinaison et la déclinaison dans un lieu donné?

2° Trouver la force ascensionnelle d'un ballon sphérique.

Poids total du taffetas.	63kilog.,62,
Poids du mètre cube d'air.	1,300,
Poids du mètre cube d'hydrogène. . . .	0,100,
Poids du mètre carré de taffetas. . . .	0,250.

Puisque le mètre carré de taffetas pèse 250 grammes, et que le poids total du taffetas est de 63 kilog., 62, nous connaîtrons le nombre de mètres carrés de taffetas en divisant 63,62 par 250; ce qui nous donne, en appelant R le rayon du ballon,

$$4\pi R^2 = \frac{63,62}{250} = 254,48,$$

$$R^2 = \frac{63,62}{\pi}.$$

$$R = \sqrt{\frac{63,62}{\pi}}.$$

$$\log R = 0,6532214;$$

$$R = 4 \text{ mètres}, 5.$$

Le volume du ballon s'obtiendra en multipliant la surface 254,48 par le tiers du rayon; donc

$$V = \frac{254,48}{3}\sqrt{\frac{63,22}{\pi}}.$$

Chaque mètre cube d'hydrogène pesant 100 grammes, le poids de l'hydrogène du ballon sera

$$38^{\text{kilog.}},172.$$

En y ajoutant celui du taffetas, nous avons, pour le poids du ballon plein,

$$101^{\text{kilog.}},792.$$

Le volume de l'air déplacé est $381^{\text{m.c.}},720$, et puisque 1 mètre cube d'air pèse $1^{\text{kilog.}},300$, le poids total de l'air déplacé sera

$$1^{\text{kilog.}},3 \,.\, 381,720 = 496^{\text{kilog.}},236.$$

La force ascensionnelle du ballon est égale à la différence entre le poids du ballon plein et le poids de l'air déplacée, c'est-à-dire égale à $394^{\text{kilog.}},444$.

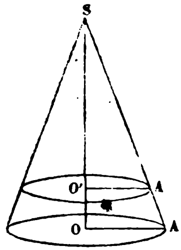
LXIII.

(Vendredi, 7 avril.)

1° Des fractions périodiques simples et mixtes.— Étant donnée une fraction périodique, revenir à la fraction génératrice.

2° On donne un tronc de cône dont la hauteur est 2 mètres; le rayon de la base supérieure est $7^m,50$; le rayon de la base inférieure est $8^m,25$. Trouver la surface et la s[illegible] de ce tronc de cône et celles du cône total.

Pour simplifier les calculs, commençons par chercher la hauteur H du cône total. Les sections méridiennes SOA, SO'A' donnent, à cet effet,



$$\frac{SO}{SO'} = \frac{OA}{O'A'};$$

ou

$$\frac{H}{H-2} = \frac{8,25}{7,50};$$

d'où

$$H = 8,25 \cdot \frac{2}{8,25-7,50} = \frac{16,5}{0,75} = 22.$$

Les volumes des deux cônes auront pour expressions :

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot (8,25)^2 \cdot 22, \quad V' = \frac{1}{3}\pi(7,5)^2 \cdot 20.$$

$\log\pi =$	0,4971509	$\log\pi =$	0,4971509
$2\log 8,25 =$	1,8329079	$2\log 7,5 =$	1,7501225
$\log 22 =$	1,3424227	$\log 20 =$	1,3010300
$-\log 3 =$	$-$ 0,4771212	$-\log 3 =$	$-$ 0,4771212
$\log V =$	3,1953603;	$\log V' =$	3,0711822;
$V =$	$1568^{m.c},051$.	$V' =$	$1178^{m.c},100$.

La différence entre ces deux valeurs donne, pour le volume du tronc,

$$V'' = 389^{m.c},951.$$

Le triangle rectangle SOA donne

$$SA = \sqrt{22^2 + (8,25)^2} = \sqrt{552,0625}.$$

Par suite, l'aire du cône total sera

$$A = \pi \,.\, 8,25\sqrt{552,0625}.$$

$$\log.\, 552,0625 = 2,7419883$$

$$\frac{1}{2} = 1,3709941$$

$$\log 8,25 = 0,9164540$$

$$\log \pi = 0,4971509$$

$$\log A = 2,7845990\,;$$

$$A = 608^{m.q},976.$$

L'aire A' du petit cône sera donnée par la proportion

$$\frac{A'}{A} = \frac{20^2}{22^2};$$

d'où

$$A' = A \,.\, \frac{100}{121} = 503^{m.q},286.$$

La surface du tronc a donc pour expression :

$$A'' A - A' = 105^{m.q},690.$$

LXIV.

Samedi, 8 avril.)

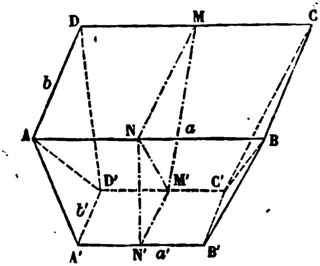
1° Théorie du baromètre.

2° On demande le poids d'un tombereau de terre dont les dimensions sont les suivantes :

Profondeur.	0^m,75,
Largeur du fond.	0 ,52,
Largeur du bord supérieur.	0 ,82,
Longueur du fond.	0 ,86,
Longueur du bord supérieur.	0 ,88.

Il est rempli *à ras du bord;* il est à fond plat; la densité de la terre est 2,68.

On peut supposer que la forme du tombereau est celle d'un polyèdre ayant pour faces deux rectangles ABCD, A'B'C'D' et quatre trapèzes ABA'B', BCB'C', CDC'D', DAD'A'. Ceci exige que les deux rectangles aient leurs plans parallèles entre eux, et que les côtés du premier soient parallèles à ceux du second.



Le plan ABC'D', mené par les arêtes opposées AB, C'D', décompose le polyèdre en deux prismes triangulaires tronqués, AA'D'BC'B', ADD'BCC'. Pour mesurer chacun d'eux, menons un plan MNM'N' perpendiculaire à AB; son intersection NM' avec AB'CD' déterminera les *sections droites* NMN', MNM' de nos deux troncs de prismes.

Cela posé, le théorème sur la mesure du prisme triangulaire tronqué * donne :

$$\text{vol. AA'D'BC'B'} = \text{NM'N'} \cdot \frac{1}{3}(\text{AB} + \text{A'B'} + \text{C'D'}),$$

$$\text{vol. ADD'BCC'} = \text{MNM'} \cdot \frac{1}{3}(\text{AB} + \text{CD} + \text{C'D'}).$$

Mais, h étant la *hauteur* du polyèdre donné, on a évidemment

$$\text{NM'N'} = \frac{1}{2} b'h, \quad \text{MNM'} = \frac{1}{2} bh;$$

donc, en mettant pour AB, A'B', ... les lettres qui les représentent :

$$\text{vol. AA'D'BC'B'} = \frac{1}{6} b'h\,(2a' + a),$$

$$\text{vol. ADD'BCC'} = \frac{1}{6} bh\,(2a + a').$$

Ajoutant ces deux expressions, nous aurons, pour le volume cherché,

$$V = \frac{1}{6} h \left[(2a + a')\, b + (2a' + a)\, a' \right] ^{**}. \quad (4)$$

* *Éléments de géométrie*, livre VII.

** Le second membre peut être écrit ainsi

$$\frac{1}{2} ab \cdot \frac{h}{3} + \frac{1}{2} a'b' \cdot \frac{h}{3} + 2\,\frac{a + a'}{2} \cdot \frac{b + b'}{2} \cdot \frac{h}{3}.$$

Par conséquent :

Le polyèdre ABCDA'B'C'D' *est équivalent à la somme de trois pyramides ayant même hauteur que le polyèdre et ayant pour bases, respectivement, la moitié de la base supérieure du polyèdre, la moitié de sa base inférieure, et le double de la section faite à égale distance des deux bases de ce polyèdre.*

Dans l'exemple proposé, on a, en prenant le centimètre pour unité,

$$a = 88,\ b = 82,\ a' = 86,\ b' = 52,\ h = 75;$$

par conséquent,

$$V = \frac{75}{6}\left[262 . 82 + 260 . 52\right]$$

$$= 50\,(131 . 41 + 130 . 26) = 437550.$$

Le poids demandé, exprimé en grammes, sera donc

$$P = 437550 \times 2{,}68 = 1172634\,,$$

ou

$$P = 1172^{\text{kilog.}},634\ ^{*}.$$

* Dans la composition, la plupart des candidats avaient supposé que le polyèdre était un tronc de pyramide. Cette hypothèse était inadmissible, attendu que les rectangles ABCD, A'B'C'D' ne sont pas semblables.

LXV.

(Lundi, 10 avril.)

1° Mesure des angles. — Construire, sur une droite donnée, un segment de cercle capable d'un angle donné.

2° Une personne verse annuellement, à la caisse d'un banquier, une somme v pendant n années. — De son côté, le banquier s'engage à payer une annuité de a francs pendant les $2n$ années qui suivent les $2n$ premières. On demande quelle doit être cette annuité a, par rapport au versement v, pour que le marché soit équitable ; on tiendra compte des intérêts composés. Le taux est de 5 pour 100. On demande aussi quel doit être le nombre donné n pour que l'annuité a soit au moins égale au versement v.

En supposant que les versements aient été faits au commencement de la première, de la deuxième..., de la n^e année, ils vaudront, au commencement de la $(4n)^e$ année,

$$v(1+r)^{4n-1},\quad v(1+r)^{4n-2}\ldots\quad v(1+r)^{3n},$$

r étant l'intérêt de 1 fr.

De même, en supposant que les annuités aient été payées à partir du commencement de la $(2n+1)^e$ année, elles vaudront, à la fin de la $(4n)^e$ année :

$$a(1+r)^{2n-1},\ a(1+r)^{2n-2},\ldots\ a.$$

Pour que le marché soit équitable, il faut que la somme des premières valeurs soit égale à la somme des dernières; donc

$$v(1+r)^{3n}\left[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\ldots+(1+r)+1\right]$$
$$=a\left[(1+r)^{2n-1}+(1+r)^{2n-2}+\ldots+(1+r)+1\right],$$

ou, par la formule des progressions,

$$v(1+r)^{3n}\frac{(1+r)^n-1}{r}=a\,\frac{(1+r)^{2n}-1}{r}.$$

Cette équation donne

$$\frac{a}{v}=(1+r)^{3n}\frac{(1+r)^n-1}{(1+r)^{2n}-1};$$

ou, en supprimant le facteur $(1+r)^n-1$, commun aux deux termes de la fraction,

$$\frac{a}{v}=\frac{(1+r)^{3n}}{(1+r)^n+1}.$$

Si l'on fait $r=0{,}05$, et si l'on suppose successivement $n=1, 2, 3, \ldots$ on trouve, en opérant par logarithmes,

$$\frac{a}{v}=\frac{1{,}1576}{2{,}05},\ \frac{a}{v}=\frac{1{,}3401}{2{,}1025},\ \frac{d}{v}=\frac{1{,}5513}{2{,}1576},\ \frac{a}{v}=\frac{1{,}7959}{2{,}2155}$$

$$\frac{a}{v}=\frac{2{,}0789}{2{,}2763},\ \frac{a}{v}=\frac{2{,}4078}{2{,}3401}.$$

Cette dernière fraction, qui correspond à $n=6$, est un peu supérieure à l'unité. Par conséquent, à partir de $n=6$, l'annuité a sera plus grande que le versement v.

LXVI.

(Mard, 11 avril.)

1° Théorie des équations du deuxième degré. — Leur application aux questions de *maxima* et de *minima*.

2° Un bassin a pour fond horizontal un hexagone régulier, dont le côté est 10 mètres.— La hauteur de l'eau que contient ce bassin est $1^m,20$. On demande le volume en mètres cubes, à une unité près.

L'apothème de l'hexagone régulier donné a pour valeur $\frac{10}{2}\sqrt{3}=5\sqrt{3}$. Par conséquent, l'aire de l'hexagone sera $6.10.\frac{5}{2}\sqrt{3}=150\sqrt{3}$. En multipliant ce nombre par 1,2, on aura le volume cherché.

$$V=150\sqrt{3}\ .\ 1,2=180\sqrt{3}=\sqrt{180^2.3}=\sqrt{97200}.$$

Le résultat est donc, à moins d'une unité,

$$V=312^m.$$

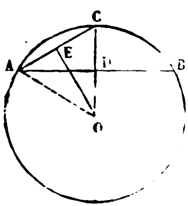
LXVII.

Mercredi, 12 avril.

1° Exposer succinctement la théorie des fractions ordinaires et des nombres décimaux. — Diverses opérations.

2° Un bassin a son fond horizontal. — C'est un prisme dont la base est un octogone régulier ayant pour côté 10 mètres. — La paroi latérale est verticale. — On y met de l'eau jusqu'à une hauteur de $0^m,75$. On demande, à moins de 1 mètre près, le volume de l'eau.

Soient AC le côté de l'octogone, R le rayon du cercle circonscrit, AB le côté du carré inscrit.



$$AB = R\sqrt{2}. \quad AD = OD = \frac{1}{2} R\sqrt{2}.$$

$$\overline{AC}^2 = 2R^2 - 2R \cdot OD = R^2(2 - \sqrt{2}).$$

Désignons par c, pour un instant, le côté de l'octogone; nous aurons

$$R^2 = \frac{c^2}{2 - \sqrt{2}} = \frac{1}{2} c^2 (2 + \sqrt{2}).$$

L'apothème $OE = a$ aura pour valeur

$$a = \sqrt{R^2 - \frac{1}{2} c^2} = \frac{1}{2} c \sqrt{3 + 2\sqrt{2}};$$

ou, en observant que

$$3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2:$$

$$a = c\,\frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

L'aire de l'octogone sera donc

$$A = 8c \, . \, \frac{1}{2} a = 2c^2 \, (1 + \sqrt{2}).$$

En multipliant ce résultat par la hauteur donnée h, on aura le volume de l'eau. Dans l'exemple proposé,

$$c = 10, \; h = 0{,}75;$$

donc

$$\begin{aligned} V &= 200(1 + \sqrt{2}) \, . \, 0{,}75 \\ &= 150(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

$\sqrt{2} = 1{,}414$; donc, à moins d'une unité,

$$V = 362.$$

LXVIII.

(Mardi, 18 avril.)

1° Théorie de la machine électrique.

2° On a une sphère de platine qui pèse dans l'air 84 grammes. On la plonge dans un bain de mercure où elle ne pèse plus que 29gr.,6 On demande le poids spécifique du platine, sachant que le poids spécifique du mercure est 13,6.

En vertu du principe d'Archimède, le poids du mercure déplacé par la sphère de platine est

$$84 - 29{,}6 = 54{,}4.$$

Le rapport des poids spécifiques du platine et du mercure est donc $\frac{84}{54{,}4}$. Et comme ce dernier poids spécifique est 13,6, le poids spécifique du platine aura pour valeur $13{,}6 \cdot \frac{84}{54{,}4} = 21$.

LXIX.

Mercredi, 19 avril.)

1° Du changement d'état des corps.

2° On fabrique avec de l'or, dont la densité est 19,362, des feuilles d'or qui ont 0,0001 de millimètre d'épaisseur. Quelle surface peut-on recouvrir avec un gramme de ces feuilles?

Soit x la surface cherchée, évaluée en centimètres carrés; si nous multiplions x par $\frac{1}{10 \, . \, 10000}$ et par 19,362, nous aurons le poids des feuilles, exprimé en grammes; par conséquent,

$$x \, . \, \frac{1}{100\,000} \, . \, 19{,}362 = 1\,;$$

d'où

$$x = \frac{10\,000\,000}{19362}.$$

$$\begin{aligned} \log 10\,000\,0000 &= 8 \\ -\log 19362 &= -4{,}2869502 \\ \hline \log x &= 3{,}7130498\,; \end{aligned}$$

$$x = 5164{,}7.$$

La surface est donc de 5164,7 centimètres carrés

LXX.

(Jeudi, 20 avril.)

1° Théorie de la machine pneumatique.

2° Calculer le poids de la pyramide d'Égypte, connaissant le côté de la base 53 mètres et la hauteur 136 mètres ; la densité de la pierre est 2.

La base est un carré ayant 53 mètres de côté ; sa surface est représentée par 53^2; nous multiplierons ce nombre par le tiers de la hauteur 136 pour avoir le volume, et par la densité 2 de la pierre, pour avoir le poids P, évalué en milliers de kilogrammes.

$$P = \frac{53^2 \cdot 136 \cdot 2}{3}.$$

$$\begin{aligned}
2 \log 53 &= 3{,}4485516 \\
\log 136 &= 2{,}1335389 \\
\log 2 &= 0{,}3010300 \\
-\log 3 &= -0{,}4771212 \\
\hline
\log P &= 5{,}4359993\,;
\end{aligned}$$

P = 254682 milliers de kilogrammes.

LXXI.

(Vendredi, 21 avril.)

1° Démontrer les principales propriétés des progressions arithmétiques et géométriques, et faire voir les différences entre ces deux progressions. En déduire la théorie des logarithmes.

2° Carreler une salle à manger, de 8 mètres de longueur sur 6 mètres de largeur, avec des hexagones réguliers de 1 décimètre de côté. — Combien faut-il de carreaux?

La surface de la salle à manger est 8 . 6 ou 48 mètres carrés.

La surface de l'hexagone est, par la formule connue,

$$\frac{6 \,.\, 0{,}1 \,.\, 0{,}1 . \sqrt{3}}{4}$$

ou

$$\frac{3\sqrt{3}}{200} \text{ mètres carrés.}$$

Le rapport de ces deux surfaces sera le nombre cherché N, pourvu que l'on fasse abstraction des *demi-carreaux* entrant le long des côtés de la salle *.

$$N = \frac{3200}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned} \log 3200 &= \quad 3{,}5051500 \\ -\frac{1}{2}\log 3 &= -0{,}2385606 \\ \hline \log N &= \quad 3{,}2665894 \\ N &= 1847{,}5 \end{aligned}$$

Il faudra donc environ 1847 carreaux.

---

* Si l'on voulait trouver le nombre des hexagones *entiers* contenus dans un rectangle donné, le problème serait beaucoup plus difficile.

LXXII.

(Samedi, 22 avril.)

1° Établir les formules générales pour la résolution d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues, et discuter complétement ces formules.

2° Le vide intérieur d'un vase conique tronqué a $0^m,6$ de hauteur; l'ouverture $0^m,4$ de diamètre, le fond $0^m,3$. Ce vase contient, jusqu'au bord, de la poudre destinée à remplir des obus dont le diamètre intérieur est $0^m,1$. On demande combien d'obus pourront être remplis.

Le volume du tronc de cône est

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr);\quad R = 0,2,\quad r = 0,15,\quad H = 0,6.$$

En appelant D le diamètre d'un obus, nous aurons, pour le volume de chaque obus,

$$V' = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

Divisant ces deux volumes l'un par l'autre, nous aurons le nombre cherché N.

$$N = \frac{\pi \frac{H}{3}(R^2 + r^2 + Rr)}{\pi \frac{D^3}{6}} = 2\,\frac{H(R^2 + r^2 + Rr)}{D^3}$$

$$= \frac{2\ .\ 06\,(0,04 + 0,0225 + 0,03)}{0,001} = \frac{12\ .\ 925}{100}.$$

$$N = 111.$$

LXXIII.

(Lundi, 24 avril.)

1° Description du graphomètre.

2° On a un tronc de pyramide quadrangulaire *. On donne le côté de chaque base et la hauteur. Ce tronc est en granit dont la densité est connue. On demande le poids.

Soient A le côté de la grande base,
a le côté de la petite base;

les aires des bases sont A^2 et a^2; et si H est la hauteur du tronc de pyramide, le volume sera

$$V = \frac{H}{3}(A^2 + a^2 + Aa).$$

D étant la densité du granit, le poids sera donné par la formule

$$P = \frac{H}{3}(A^2 + a^2 + Aa)\,D.$$

* Sous-entendu, *régulière*.

LXXIV.

(Mardi, 25 avril.)

1° **Résolution générale des équations du premier degré à deux inconnues. — Discussion complète des formules.**

2° **Calculer les angles d'un triangle dont les côtés sont 33^m,45, 42^m,89 et 49^m,17.**

Les formules qui permettent de calculer les angles sont

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(-c)}{p(p-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

$$a=33{,}45,$$
$$b=42{,}89,$$
$$c=49{,}17,$$
$$2p=125{,}51.$$
$$p=62{,}755,$$
$$p-a=29{,}305,$$
$$p-b=19{,}865,$$
$$p-c=13{,}585.$$

$$\log p = 1{,}7976483\,,$$
$$\log(p-a) = 1{,}4669417\,,$$
$$\log(p-b) = 1{,}2980886\,,$$
$$\log(p-c) = 1{,}1330596.$$

$$2\log \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \bar{1}{,}1665582$$
$$2\log \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \bar{1}{,}5042644$$
$$2\log \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \bar{1}{,}8343224$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \bar{1}{,}5832791$$
$$\log \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \bar{1}{,}7521322$$
$$\log \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \bar{1}{,}9171612$$

$$\frac{A}{2} = 20^\circ\,57'\,37'',36\,,$$
$$\frac{B}{2} = 29^\circ\,28'\,16'',25\,,$$
$$\frac{C}{2} = 39^\circ\,34'\,\ 6'',39.$$

$$A = 41^\circ\,55'\,14'',7,$$
$$B = 58^\circ\,56'\,32'',5,$$
$$C = 79^\circ\,\ 8'\,12'',8$$

$$180^\circ\ \ 0'\ \ 0'$$

LXXV.

(Mercredi, 26 avril.)

1° Exposer les principes de la transmission des pressions.

2° On donne un ballon dont le rayon est 1 mètre. Ce ballon est rempli, aux trois quarts, de gaz hydrogène dont la pression est 0,76, et la température 0°. On demande le poids que pourra enlever ce ballon, sachant que l'hydrogène a pour densité 0,069, et qu'un litre d'air pèse $1^{\text{gr.}},3$.

Le volume du ballon, s'il était plein, serait $\frac{4}{3}\pi R^3$, R étant le rayon ; comme il n'est plein qu'aux $\frac{3}{4}$, son volume sera πR^3, ainsi que celui de l'air déplacé.

Le poids d'un mètre cube d'air est 1300 grammes ;
celui d'un mètre cube d'hydrogène est $1300 \,.\, 0{,}069$;
donc le poids de l'hydrogène est $\pi R^3 \,.\, 1300 \,.\, 0{,}069$,
et celui de l'air déplacé, $\pi R^3 \,.\, 1300$.

La force ascensionnelle F du ballon sera la différence entre ces deux poids :

$$F = \pi R^3 \,.\, 1300\,(1 - 0{,}069)\,;$$

et comme

$$R = 1\,,$$

$$F = \pi R \,.\, 1300 \,.\, 0{,}931.$$

$$\log \pi = 0{,}4971509$$
$$\log 1300 = 3{,}1139434$$
$$\log 0{,}931 = \bar{1}{,}9689496$$

$$\log F = 3{,}5800437\,;$$

$$F = 3802^{\text{g}},28,$$

ou $3^{\text{kilog.}},80228.$

LXXVI.

(Jeudi, 27 avril.)

1° De l'assimilation de l'aimant à un solénoïde.

2° On demande le prix d'un tuyau de conduite en fonte, dont le diamètre intérieur est $0^m,245$, l'épaisseur moyenne $0^m,014$, la longueur 2134 mètres. On prendra pour densité 7,207, et pour valeur de la fonte $0^f,20$ le kilogramme.

Ce tuyau de conduite est un cylindre. En appelant R son rayon extérieur, r son rayon intérieur, et H sa longueur, son volume V sera la différence entre $\pi R^2 H$ et $\pi r^2 H$;

$$V = \pi(R^2 - r^2)H.$$

Le poids P du tuyau sera

$$P = \pi(R^2 - r^2)\,HD,$$

D étant la densité du métal

$$P = \pi(R + r)(R - r)\,H.D.$$

$$r = 0{,}1225\,;\; R = 1225 + 0{,}014 = 0{,}1365\,;$$

$$R + r = 0{,}259\,;\; R - r = 0{,}014\,;\; H = 2134\,;\; D = 7207\,;$$

donc

$$P = \pi\,.\,0{,}259\,.\,0{,}014\,.\,2134\,.\,7{,}207.$$

$$\log \pi = 0,4971509$$

$$\log 0,259 = \bar{1},4132998$$

$$\log 0,014 = \bar{2},1461280$$

$$\log\ 2134 = 3,3291944$$

$$\log\ 7207 = 3,8577545$$

$$\log P = 5,2435276\,;$$

$$P = 175197^{\text{kilog.}}.$$

Puisque chaque kilogramme coûte $0^f,20$, le prix du tuyau sera

$$175197^f \,.\, 0,20,$$

ou

$$35039^f,40$$

LXXVII.

(Vendredi, 28 avril.)

1° Établir les règles à suivre : 1° pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres; 2° pour décomposer un nombre en ses facteurs premiers; 3° pour trouver le plus petit nombre divisible par plusieurs nombres donnés.

2° Une sphère, un cylindre et un cône droit ayant été façonnés avec des masses égales d'une terre glaise bien homogène, on admet que ces trois corps ont des volumes équivalents. De plus, la sphère, la base du cylindre et celle du cône ont des diamètres égaux entre eux et à 3 décimètres. On demande les hauteurs du cylindre et du cône.

En appelant R le rayon de la sphère, de la base du cylindre, et de la base du cône, on a

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi R^2 H';$$

H et H′ étant les hauteurs inconnues. On conclut, de ces deux équations distinctes,

$$H = \frac{4}{3}R; \quad H' = 4R.$$

Dans l'exemple proposé,

$$R = 0^m,15;$$

donc

$$H = 0^m,2;$$

$$H' = 0^m,6.$$

LXXVIII.

(Samedi, 29 avril.)

1° Trouver la surface du triangle équilatéral, en fonction de ses côtés.

2° On donne deux cercles concentriques. On demande de calculer la longueur d'une corde du grand cercle tangente au petit cercle. Les rayons des deux cercles sont $R = 36$, $r = 29$.

I. c étant le côté d'un triangle équilatéral, la hauteur

$$h = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{1}{2} c\sqrt{3};$$

donc l'aire du triangle est

$$A = \frac{1}{4} c^2 \sqrt{3}.$$

II. La corde cherchée c, les rayons menés à ses deux extrémités, et le rayon mené au point de contact sont les trois côtés et la hauteur d'un triangle isocèle. Par conséquent,

$$c = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2\sqrt{(R + r)(R - r)}.$$

En remplaçant R et r par leurs valeurs numériques, on trouve

$$c = 2\sqrt{65.7} = \sqrt{1820},$$

ou

$$c = 42,66...$$

LXXIX.

(Lundi 1er mai.)

1° Presse hydraulique.

2° Une machine à vapeur dépense 1545 kilogrammes de charbon pendant 70 jours; un procédé quelconque permet de ne lui en faire dépenser que 554 en 37 jours; on demande l'économie annuelle que donne ce procédé, en supposant que la machine fonctionne pendant 330 jours de l'année, et que 100 kilogrammes de charbon coûtent 3,75.

Dans le premier cas, la machine dépense $\dfrac{1545^{\text{kilog.}}}{70}$ par jour; dans le second, elle dépense seulement $\dfrac{554^{\text{kilog.}}}{37}$; l'économie en 330 jours est donc, en kilogrammes,

$$\left(\frac{1545}{70}-\frac{554}{37}\right).330;$$

et, en francs,

$$x=\left(\frac{1545}{70}-\frac{554}{37}\right).330\ .\ \frac{3,75}{100};$$

$$x=\frac{(309.37-14.554).33.0,375}{14.37}=\frac{3677.33.0,375}{14.37}$$

$$\begin{aligned}
\log 3677 &= 3,5654936\\
\log 33 &= 1,5185139\\
\log 0,375 &= \bar{1},5740313\\
-\log 14 &= -1,1461280\\
-\log 37 &= -1,5682017\\
\hline
\log x &= 1,9437091;
\end{aligned}$$

$$x=87^{\text{f}},84.$$

LXXX.

(Mardi, 2 mai.)

1° Résolution et discussion de l'équation $x^2+px+q=0$, quand on donne toutes les valeurs imaginables à p et q.

2° On a un fil d'argent de $0^m,0015$ de diamètre; on couvre ce fil d'une couche d'or de $0^m,0002$ d'épaisseur; le poids du fil d'argent est $3^{gr},2875$. On donne la densité de l'argent 10,47, et la densité de l'or 19,26. On demande le poids de la couche d'or.

Soient r le rayon du fil d'argent, x sa longueur, d sa densité; son poids sera

$$p = \pi r^2 xd.$$

Donc

$$x = \frac{p}{\pi r^2 d}.$$

Soit R le rayon du fil d'argent recouvert d'or; le volume de l'or sera

$$\pi(R^2 - r^2)x,$$

ou

$$(R^2 - r^2)\frac{p}{r^2 d}.$$

d' étant la densité de l'or, le poids demandé sera

$$P = \frac{(R^2 - r^2)\,p\,.\,d'}{r^2 d} = \frac{(R+r)\,(R-r)pd'}{r^2 d}.$$

Dans l'exemple proposé, si nous prenons le centimètre pour unité, nous aurons

$r = 0,075$, $R = 0,095$, $R + r = 0,17$, $R - r = 0,02$, $p = 3,2875$, $d' = 19,26$, $d = 10,47$;

donc

$$P = \frac{0,17 \cdot 0,02 \cdot 3,2875 \cdot 19,26}{(0,075)^2 \cdot 10,47}.$$

$$\begin{aligned}
\log 0,17 &= \bar{1},2304489 \\
\log 0,02 &= \bar{2},3010300 \\
\log 3,2875 &= 0,5168658 \\
\log 19,26 &= 1,2846563 \\
-2 \log 0,075 &= -\bar{3},7501224 \\
-\log 10,47 &= -1,0199467 \\
\hline
\log P &= 0,5629317; \\
P &= 3^{\text{gr.}},6554.
\end{aligned}$$

LXXXI.

(Mercredi, 3 mai.)

1° Exposer la théorie des lois du rayonnement, et en particulier celle du refroidissement.

2° Un prisme oblique de basalte a une base hexagonale, dont le côté est de $0^m,63$. Sa hauteur est $2^m,85$. On demande le poids de ce prisme, sachant que la densité du basalte est 3,45.

L'apothème de la base égale

$$\frac{0.63}{2}\sqrt{3};$$

donc l'aire de cette base est

$$A=\frac{3}{2}(0,63)^2\sqrt{3}.$$

Le volume du prisme sera

$$V=\frac{3}{2}(0,63)^2\sqrt{3}\,.\,2,85;$$

et son poids, évalué en milliers de kilogrammes,

$$P=\frac{3}{2}(0,63)^2\sqrt{3}\,.\,2,85\,.\,3,45.$$

$$\begin{array}{rr}
\log 3 = & 0,4771212 \\
2\log 0,63 = & \bar{1},5986810 \\
\log 2,85 = & 0,4548448 \\
\log 3,45 = & 0,5378191 \\
\frac{1}{2}\log 3 = & 0,2385606 \\
-\log 2 = & \underline{-0,3010300} \\
\log P = & 1,0059967;
\end{array}$$

$$P=10,139.$$

Le prisme pèse donc 10139 kilogrammes

LXXXII.

(Jeudi, 4 mai.)

1° Électromètre condensateur.

2° On fait jouer une machine pneumatique, jusqu'à ce que la pression, qui était $0^m,76$, soit réduite à $0^m,20$. La température est 0° pendant tout le temps de l'expérience. La capacité de la cloche est de $7^l,55$. On demande le poids de l'air retiré de la machine, et le poids de l'air resté sous la machine. On sait que le poids d'un litre d'air est de $1^{gr},3$ à 0° et à $0^m,76$. On demande aussi quel serait le poids à 15°, sachant que le coefficient de dilatation de l'air est de 0,00366.

Puisque 1 litre d'air pèse $1^g,3$, le poids de l'air sous la cloche, avant le jeu de la machine, est $1^g,3 \,.\, 7,55$,

ou $$9^g,815.$$

Les poids des gaz sont proportionnels aux pressions qu'ils supportent; si donc nous désignons par x le poids de l'air restant dans la cloche quand la pression sera devenue $0^m,20$ au lieu de $0^m,76$, nous aurons

$$x = 9^g,815 \,.\, \frac{20}{76} = 2^g,583.$$

Le poids de l'air retiré sera $9^g,815 - 2^g,583$,

ou $$7^g,232.$$

Pour avoir le poids de l'air restant dans la cloche à la température du 15°, il faut employer la formule

$$P' = P\,\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'};$$

elle donne

$$P' = 2,583\,\frac{1+0,00366\,.\,0}{1+0,00366\,.\,15} = \frac{2,583}{1,0549};$$
$$P' = 2^g,448$$

LXXXIII.

(Vendredi, 5 mai.)

1° Théorie des piles.

2° On donne un ballon qui pèse, vide, 150gr.,235; plein d'air, 761gr.,128; plein d'un certain gaz, 765gr.,537. Les expériences ont été faites à la température de 15° et à la pression de 0m,74. On demande la correction à faire à la densité du gaz.

Le poids du gaz seul est

$$765^{g},537 - 150^{g},235 = 615^{g},302\,;$$

le poids de l'air seul est

$$761^{g},128 - 150^{g},235 = 610^{g},893\,;$$

le poids spécifique du gaz, à $0^{m},74$ et à 15°, est donc

$$\frac{615,302}{610,893} = 1,0072.$$

Pour ramener cette densité à ce qu'elle serait à 0° et à $0^{m},76$, on emploie la formule

$$\frac{D}{D'} = \frac{H}{H'} \cdot \frac{1 + \alpha T'}{1 + \alpha T}.$$

D' est la densité connue, $H' = 0,74$, $T' = 15°$, $H = 0,76$, $T = 0°$:

$$D = \frac{615,302}{610,893} \cdot \frac{0,76}{0,74} \cdot (1 + 0,00366 \,.\, 15).$$

Effectuant par logarithmes, on trouve

$$D = 1,0912.$$

LXXXIV.

(Samedi, 6 mai.)

1° Exposer la théorie des règles de trois simples directes et inverses.

2° Le grand axe de l'orbite d'une planète est égal, en prenant pour unité celui de l'orbite terrestre, à 1,52369. Trouver en jours la durée de la révolution sidérale. On devra énoncer la loi de Képler qui permet de considérer la question précédente comme une règle de trois.

Cette loi de Képler est la suivante :

Les carrés des temps des révolutions de deux planètes sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.

La terre effectuant sa révolution sidérale en 365,256 jours moyens, on aura

$$\frac{(365,256)^2}{x^2} = \frac{1}{(1,52369)^3};$$

$$x^2 = (365,256)^2\,(1,52369)^3.$$

$$\log x = \log 365,256 + \frac{3}{2} \log 1,52369.$$

$$\begin{aligned}
\log 365,256 &= 2,5625973 \\
\log 1,52369 &= 0,1828967 \\
\frac{1}{2} \quad &= 0,0914483 \\
\hline
\log x &= 2,8369423; \\
x &= 686^{j},97.
\end{aligned}$$

Cette planète est Mars.

LXXXV.

(Lundi, 8 mai.)

1° Expliquer l'addition, la soustraction, la multiplication et la division des fractions ordinaires.

2° Un triangle équilatéral, de $9^m,75$ de côté, tourne autour d'une parallèle à sa base menée par sommet. Calculer le volume du solide engendré par ce triangle.

Le corps engendré par le triangle aura pour volume la surface que décrit le côté parallèle à l'axe, multipliée par le tiers de la hauteur h du triangle.

Donc

$$V = 2\pi h \,.\, c \,.\, \frac{1}{3} h = \frac{2}{3} \pi h^2 c.$$

Mais

$$h^2 = \frac{3}{4} c^2;$$

donc

$$V = \frac{1}{2} \pi \,.\, c^3 = \frac{1}{2} \pi \,(9,75)^3.$$

$$\begin{array}{rr}
\log \pi = & 0,4971509 \\
3 \log 9,75 = & 2,9670138 \\
-\log 2 = & -0,3010300 \\
\hline
\log V = & 3,1631347; \\
V = & 1455^{m.c.},910.
\end{array}$$

LXXXVI.

(Mardi, 9 mai.)

1° De l'hygromètre.

2° Un gramme de mercure occupe dans un tube capillaire, à la température de 0°, une longueur de $0^m,137$. Quel est le diamètre intérieur de ce tube? On sait que la densité du mercure est 13,598.

Le poids p d'un tube cylindrique, de diamètre x, de hauteur h et de densité d, est donné par la formule

$$p = \frac{1}{4}\pi x^2 dh;$$

d'où

$$x^2 = \frac{4p}{\pi dh}.$$

$$x^2 = \frac{4 \,.\, 0{,}000\,001}{\pi \,.\, 0{,}137 \,.\, 13{,}598} = \frac{4}{\pi \,.\, 137 \,.\, 13598}.$$

$$\begin{aligned} \log 4 &= 0{,}6020599 \\ -\log \pi &= -0{,}4971509 \\ -\log 137 &= -2{,}1367205 \\ -\log 13598 &= -4{,}1334750 \\ \hline 2\log x &= \bar{7}{,}8347135 \\ \log x &= \bar{4}{,}9173567; \end{aligned}$$

$$x = 0^m{,}00082.$$

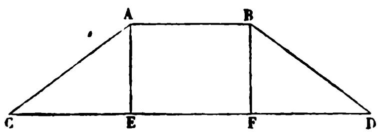
LXXXVII.

(Mercredi, 10 mai.)

1° **Établir les règles à suivre pour obtenir rapidement les restes de la division d'un nombre entier par 2,3,5,9 et autres diviseurs. Donner les caractères de divisibilité par chacun de ces nombres. Indiquer les applications de ces règles et de ces caractères.**

2° **Un chemin de fer traverse une terre horizontale sur un remblai ayant 6 mètres de hauteur, 8 mètres de largeur au sommet, et des talus gazonnés, dont la pente descend de 3 sur 4, c'est-à-dire dont l'angle à l'horizon a pour tangente trigonométrique la fraction $\frac{3}{4}$. — On demande combien ce remblai, sur chaque kilomètre de longueur, a exigé de mètres cubes à porter, et combien de mètres carrés de gazon.**

Le profil du remblai est un trapèze ABCD dans lequel $AB = 8^m$, $AE = 6^m$, $\operatorname{tg} ACE = \operatorname{tg} BDF = \frac{3}{4}$. Or $\operatorname{tg} ACE = \frac{AE}{CE}$; donc $CE = DF = 6^m . \frac{4}{3} = 8^m$. Par suite, $AC = BD = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10^m$, et $CD = 24$.



Le remblai forme un prisme dont la base est le trapèze ABCD; donc le volume demandé sera

$$V = \frac{8 + 24}{2} . 6 . 1000 = 96\,000 \text{ mètres cubes.}$$

Chaque talus gazonné est un rectangle dont les deux côtés sont 10^m et 1000 mètres; il a donc fallu, par kilomètre, $20000^{mq.}$ de gazon, c'est-à-dire 2 hectares.

LXXXVIII.

Jeudi, 11 mai.)

1° **Construction et usage du multiplicateur.**

2° **Deux vases communiquants renferment deux liquides, d'abord de l'eau qui s'élève dans une branche à la hauteur de $1^m,55$; dans l'autre branche se trouve un liquide dont la hauteur est $3^m,17$; ces deux colonnes liquides se font équilibre et sont à la température de 10°. — On demande la densité du deuxième liquide, et en outre à quelle hauteur s'élèverait ce liquide, si on élevait sa température à 25°, en laissant celle de l'eau à 10°. On sait qu'il a pour coefficient de dilatation $\frac{1}{6000}$.**

Les hauteurs des liquides, dans les vases communiquants, sont inversement proportionnelles aux densités de ces liquides. La densité de l'eau étant 1, et x représentant celle du second liquide, nous aurons donc

$$\frac{1.55}{3,17} = \frac{x}{1};$$

d'où

$$x = 0,488.$$

Si le liquide passait de la température 10° à la température 25°, sa hauteur, pour cette variation de 10°, deviendrait

$$3,17\left(1 + \frac{15}{6000}\right) = 3,17 \times \frac{3,17}{400},$$

ou

$$3^m,178.$$

LXXXIX.

(Vendredi, 12 mai.)

1° Démontrer les divers théorèmes de géométrie plane qui établissent qu'une certaine ligne est moyenne proportionnelle entre deux autres. —Appliquer ces théorèmes à la solution du problème graphique, qui consiste à trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données.

2° Avant de partir pour un voyage de circumnavigation, un officier de marine avait placé à la Banque, à intérêts composés, une somme de 6000 francs. Son voyage a duré 4 ans. On demande ce que la Banque lui doit à l'époque de son retour. Le taux de l'intérêt est 5 pour 100.

La formule à appliquer est

$$S = a(1+r)^n.$$

$$a = 6000,\ r = 0,05,\ n = 4.$$

$$S = 6000 \,.\, 1,05^4.$$

$$\log 6000 = 3,7781513$$
$$4 \log 1,05 = 0,0847572$$

$$\log S = 3,8629085;$$

$$S = 7293^{f}04.$$

XC.

(Samedi, 13 mai.)

1° Comment constate-t-on l'attraction ou la répulsion des courants électriques? Énoncer les résultats généraux sur cette matière.

2° Un corps perd dans l'air une partie de son poids égale à $5^{gr},237$; la température est 0°, la pression est $0^m,76$. On admet que la densité de l'air à 0° et à $0^m,76$ est environ $\frac{1}{770}$ de la densité de l'eau. On sait que le coefficient de dilatation de l'air est 0,00366. On néglige dans cette opération l'influence du corps dont on a déterminé le poids; et on demande : 1° le volume de ce corps; 2° quelle serait la perte de poids, si l'expérience était faite à la température de 15° centigrades et à la pression de $1^m,25$.

1° La perte de poids du corps est le poids du volume d'air déplacé.

Or $\quad 1000^g$ est le poids de 1 litre d'eau,

$\frac{1000^g}{770}$ est le poids de 1 litre d'air,

$5^g,237$ est le poids de $\frac{770 \cdot 5,237}{1000}$ litres d'air,

ou de

$$4^l,032.$$

2° Si l'expérience était faite à la température de 15° et à la pression de $1^m,25$, l'air occuperait un volume donné par la formule

$$\frac{V'}{V} = \frac{H}{H'} \frac{1+\alpha T'}{1+\alpha T}.$$

$$V' = \frac{5,237 \cdot 770}{1000} \cdot \frac{0,76 \cdot (1 + 0,00366 \cdot 15)}{1,25}$$

$$= 2^{l},586\,352.$$

Le volume d'air déplacé sera aussi $2^{l},586\,352$;

et puisque 1 litre d'air pèse $\frac{1000^{g}}{770}$, le poids de l'air déplacé, ou la perte de poids éprouvée par le corps sera

$$2^{g},586\,352 \cdot \frac{1000}{770} = 3^{g},359.$$

XCI.

(Lundi, 15 mai.)

1° Énoncer la série des propositions qui conduisent à la connaissance du volume de la sphère, en commençant par celles qui donnent la mesure du parallélipipède.

2° Un boulet de fonte pèse 12 kilogrammes; la densité de la fonte est 7,35. — Trouver son rayon, et le poids de l'or nécessaire pour former autour de ce boulet une couche d'or de $0^m,0006$ d'épaisseur, la densité de l'or étant 19,26.

1° x étant le rayon du boulet, exprimé en décimètres, son volume sera $\frac{4}{3}\pi x^3$;

et son poids, en kilogrammes, $\frac{4}{3}\pi x^3 . 7,35$.

Donc

$$\frac{4}{3}\pi x^3 . 7,35 = 12;$$

d'où

$$x^3 = \frac{12 . 3}{4 . \pi . 7,35} = \frac{3}{\pi . 2,45}.$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{3}{2,45 . \pi}}.$$

$$\begin{aligned} \log 3 &= 0,4771212 \\ -\log \pi &= -0,4971509 \\ -\log 2,45 &= -0,3891660 \\ \hline 3 \log x &= \bar{1},5908043 \\ \log x &= \bar{1},8636014; \end{aligned}$$

$$x = 0,7305 = 0^m,07305.$$

2° Pour avoir le poids de la couche d'or dont l'épaisseur est $0^m,0006$, appelons R le rayon du boulet augmenté de $0^m,0006$, et r le rayon du boulet; les volumes des deux sphères seront

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,\ v = \frac{4}{3}\pi r^3;$$

et le volume de la couche d'or sera

$$V - v = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3).$$

Le poids cherché sera donc

$$P = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)19,26.$$

$r = 0,7305$; $R = 0,7365$; $r^3 = 0,389817$; $R^3 = 0,399501$;

$$P = \frac{4}{3}\pi \,.\, 0,009684 \,.\, 19,26 = \pi \,.\, 0,038736 \,.\, 6,42.$$

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0,4971509 \\ \log 0,038736 &= \bar{2},5881148 \\ \log 6,42 &= 0,8075350 \\ \hline \log P &= \bar{1},8928007 \\ P &= 0,78127; \\ &= 781^g,27. \end{aligned}$$

XCII.

(Mardi, 16 mai.)

1° De la chaleur rayonnante et de la rosée.

2° Un morceau de cuivre, de forme cubique et du poids de $1^{\text{kilog.}},75$, est placé sur un tour, et réduit à une sphère dont le diamètre est 0,75 de la longueur du côté du cube primitif; la densité du cuivre est 8,85. Calculer le poids de la tournure de cuivre qu'on a obtenue.

En appelant c le côté du cube, et en prenant pour unités le décimètre et le kilogramme, on a

$$c^3 \,.\, 8{,}85 = 1{,}75\,;$$

ou

$$c^3 = \frac{1{,}75}{8{,}85} = \frac{35}{177}.$$

Le volume V d'une sphère de diamètre D a pour expression

$$V = \frac{1}{6}\pi D^3\,;$$

et comme

$$D = \frac{3}{4}c,$$

$$V = \frac{1}{6}\pi\left(\frac{3}{4}c\right)^3 = \frac{9}{128}\pi \,.\, \frac{35}{177} = \frac{105}{128.59}\pi.$$

Le poids de la sphère est donc

$$P = \frac{105}{128.59}\pi \,.\, 8{,}85 = \frac{105\,.\,15}{128}\pi \,.\, 0{,}01 = \frac{1575}{12800}\pi.$$

$$
\begin{aligned}
\log 1575 &= 3{,}1972806 \\
\log \pi &= 0{,}4971509 \\
-\log 12800 &= -4{,}1072100 \\
\hline
\log P &= \bar{1}{,}5872215\,; \\
P &= 0{,}38657 \\
&= 386^{g}{,}57.
\end{aligned}
$$

Le poids de la sphère étant de $386^{g}{,}57$, celui de la tournure de cuivre sera

$$1750 - 386{,}57,$$

ou $$1363^{g}{,}43.$$

XCIII.

(Mercredi, 17 mai.)

1° Donner les principes sur lesquels est fondée la construction du télégraphe électrique.

2° On a pesé, à la même température, un fragment de métal successivement dans l'air, dans l'eau et dans un liquide A. On a trouvé 5gr.,219, 4gr.,132 et 5gr.,009. On demande la densité du métal, et celle du liquide A par rapport à l'eau.

Le poids spécifique du métal est le quotient de son poids dans l'air, 5g,219, par la perte de poids qu'il subit dans l'eau, c'est-à-dire

$$\frac{5,219}{5,219-4,132}=4,801.$$

La perte de poids du corps dans le liquide A, ou le poids du volume de liquide déplacé, est

$$5,219-5,009=0,210.$$

La perte de poids dans l'eau, ou le poids du volume d'eau déplacée, est

$$5,219-4,132=1,087.$$

Le poids spécifique du liquide A sera donc le quotient de ces deux poids d'un même volume de liquide et d'eau, c'est-à-dire

$$\frac{0,210}{1,087}=0,193.$$

XCIV.

(Jeudi, 18 mai.)

1° Comment peut-on trouver la surface et le volume d'une sphère quand on connaît son rayon ? Application à une sphère d'un rayon de 1 décimètre.

2° Déterminer deux nombres, sachant que leur somme est 19 et leur produit 84.

Les deux nombres cherchés seront les racines de l'équation

$$z^2 - 19z + 84 = 0.$$

x et y étant ces deux racines, on a

$$x = \frac{19 + 5}{2} = 12,$$

$$y = \frac{19 - 5}{2} = 7.$$

Les deux nombres sont donc 12 et 7.

XCV.

(Vendredi, 19 mai.

1° **De l'action des courants sur les aimants, et de l'action des courants sur les courants.**

2° **Une barre, formée d'un métal dont le coefficient de dilatation est $\frac{1}{754}$, a 2 mètres de longueur; on demande quelle longueur on devrait donner à une barre d'un autre métal pour que la dilatation totale de celle-ci fût égale à la dilatation totale de la première. On sait que le deuxième métal a un coefficient de dilatation de $\frac{1}{1150}$.**

La dilatation de la première barre, pour une élévation de température égale à 1°, est $\frac{2^{m}}{754}$. Si donc x représente la longueur de la seconde barre, dont le coefficient de dilatation est $\frac{1}{1150}$, on aura

$$\frac{2}{754} = \frac{x}{1150},$$

d'où

$$x = 3^{m},05.$$

XCVI.

(Samedi, 20 mai.)

1° Exposer la théorie de la mesure des polyèdres.

2° On a un cône dont la hauteur est égale à 10 mètres; le rayon de la base égale 5 mètres. On demande à quelle distance de la base il faudrait mener un plan parallèle à cette base pour que le volume du tronc fût égal à 20 mètres cubes.

Le volume du cône donné égale $\frac{1}{3}\pi \,.\, 5^2 \,.\, 10 \,.= \frac{250}{3}\pi$. Le volume du petit cône résultant de la section sera donc $\frac{250}{3}\pi - 20$. Ces deux volumes sont entre eux comme les cubes des hauteurs des deux cônes; donc, x étant la hauteur cherchée,

$$\frac{x^3}{10^3} = \frac{\frac{250}{3}\pi - 20}{\frac{250}{3}\pi};$$

d'où

$$x = 10\sqrt[3]{1 - \frac{6}{25\pi}}.$$

$$\begin{array}{rl}
\log 6 = & 0,7781512 \\
-\log 25 = & -1,3979400 \\
-\log \pi = & -0,4971509 \\
\hline
\log \frac{6}{25\pi} = & \bar{2},8830603\,;
\end{array}$$

$$\frac{6}{25\pi} = \quad 0,0763941.$$

$$1 - \frac{6}{25\pi} = \quad 0,9236059$$

$$\log = \quad \bar{1},9654867$$

$$\frac{1}{3} = \log x = \quad \bar{1},9884956\,;$$

$$x = \quad 9^{m},73858.$$

XCVII.

(Lundi, 22 mai.)

1° De l'électricité atmosphérique et des paratonnerres.

2° Le litre employé pour les liquides est un vase cylindrique dont la hauteur égale deux fois le diamètre de la base; le vase est en zinc, dont la densité est 7,19, et ses parois ont $0^{m},005$ d'épaisseur. On demande le poids de ce vase.

En prenant pour unité le décimètre, le diamètre intérieur d sera déterminé par l'équation

$$\frac{1}{2}\pi d^3 = 1;$$

d'où

$$d = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}.$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0,3010300 \\ -\log \pi &= -0,4971509 \\ \hline & \bar{1},8038791 \\ \log d &= \bar{1},9346263; \\ d &= 0,86025. \end{aligned}$$

La hauteur est

$$1,7205.$$

Le rayon du cylindre extérieur est

$$0,43013 + 0,05 = 0,48013;$$

donc le volume extérieur est

$$\pi(0,48013)^2 . 1,7705.$$

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0,4971509 \\ 2 \log 0,48013 &= \bar{1},3627176 \\ \log 1,7705 &= 0,2480959 \\ \hline \log V &= 0,1079644\,; \\ V &= 1,28222. \end{aligned}$$

Le volume du cylindre intérieur est 1 décimètre cube ; le volume du zinc est, par conséquent,

$$V = 0,28222.$$

Le poids d'un décimètre cube de zinc égale $7^{\text{kilog.}},19$; donc le poids demandé est

$$P = 7,19 \,.\, 0,28222 = 2029^{g},2.$$

XCVIII.

(Mardi, 23 mai.)

1° De la formation des vapeurs et de la mesure de leur force élastique.

2° Un vase sphérique, de $0^m,25$ de diamètre, est rempli de gaz hydrogène à 35° et à la pression de $0^m,78$. On demande quel sera le poids de ce gaz; quel en serait le volume si la température tombait à 5° au-dessous de 0° et la pression atmosphérique à $0^m,74$. On prendra pour densité de l'hydrogène 0,069, et pour coefficient de dilatation de ce gaz 0,00366.

1° Le volume de l'hydrogène est

$$V = \frac{1}{6}\pi . (0,25)^3.$$

Pour avoir son poids P, nous chercherons d'abord le poids d'un mètre cube d'hydrogène à 35° et sous la pression de $0^m,78$. Or, à 0° et à $0^m,76$, le mètre cube d'hydrogène pèse $1^{\text{kilog.}},3$* . 0,069; donc, en vertu de la formule

$$d' = d\,\frac{h'}{h}\,\frac{1}{1+\alpha t},$$

le poids cherché sera, en kilogrammes,

$$1,3 \,.\, 0,069 \,.\, \frac{0,78}{0,76}\,\frac{1}{1+0,00366 \,.\, 35}$$

$$= 1,3 \,.\, 0,069 \,.\, \frac{39}{38}\,\frac{1}{1,1281}.$$

---

* $1^{\text{kilog.}},3$ est le poids d'un mètre cube d'air. On voit qu'il est essentiel de ne pas confondre la *densité* avec le *poids spécifique*.

Par suite,

$$P = \frac{1}{6}\pi \, . \, (0{,}25)^3 \, . \, 1{,}3 \, . \, 0{,}069 \, . \, \frac{39}{38} \, \frac{1}{1{,}1281},$$

$$P = \frac{\pi \, . \, 13^2 \, . \, 0{,}0069}{128 \, . \, 38 \, . \, 1{,}1281}.$$

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0{,}4971509 \\ 2 \log 13 &= 2{,}2278867 \\ \log 0{,}0069 &= \bar{3}{,}8388491 \\ -\log 128 &= -2{,}1072100 \\ -\log 38 &= -1{,}5797836 \\ -\log 1{,}1281 &= -0{,}0523471 \\ \hline \log P &= \bar{4}{,}8245460; \end{aligned}$$

$$P = 0^{\text{kilog.}}{,}00066765 = 0^{\text{g}}{,}66765.$$

2° Pour avoir le volume de cet hydrogène à la pression $0^{\text{m}}{,}74$ et à la température $(-5)^{\circ}$, nous emploierons la formule

$$\frac{V'}{V} = \frac{H}{H'} \, . \, \frac{1 + \alpha t'}{1 + \alpha t};$$

elle donne

$$V' = \frac{1}{6} \pi \, . \, (0{,}25)^3 \, . \, \frac{0{,}78}{0{,}74} \, \frac{1 - 0{,}00366 \, . \, 5}{1 + 0{,}00366 \, . \, 35}$$

$$= \frac{\pi \, . \, 13 \, . \, 9817}{128 \, . \, 37 \, . \, 11281}.$$

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0{,}4971509 \\ \log 13 &= 1{,}1139433 \\ \log 9817 &= 3{,}9919788 \\ -\log 128 &= -2{,}1072100 \\ -\log 37 &= -1{,}5682017 \\ -\log 11281 &= -4{,}0523471 \\ \hline \log V' &= \bar{3}{,}8753142; \end{aligned}$$

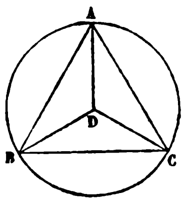
$$V' = 0^{\text{m.c}}{,}00750437 = 7^{\text{l}}{,}50437.$$

XCIX.

(Mercredi, 24 mai.)

1° On a marqué, sur un plan topographique, trois points A,B,C. Déterminer la position d'un quatrième point D situé dans le plan des trois premiers, et tel que de ce point les distances AB et BC aient été aperçues sous des angles donnés.

2° On supposera que les trois points ABC forment un triangle équilatéral dont le côté est 500 mètres, et que les deux côtés AB et AC ont été aperçus du point donné sous un angle de 120°. Calculer la distance AD.



Le point D, d'où les côtés AB, AC sont vus sous des angles de 120°, est le centre de la circonférence circonscrite au triangle ABC. AD est le rayon, que nous calculerons par la formule

$$AD = R = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{500}{\sqrt{3}}.$$

$$\log 500 = \quad 2{,}6989700$$

$$-\frac{1}{2}\log 3 = -0{,}2385606$$

$$\log AD = \quad 2{,}4604094;$$

$$AD = 288^{m},675.$$

C.

(Vendredi, 26 mai.)

1° De la loi de Mariotte, et des manomètres dont l'emploi repose sur cette loi.

2° Une cuve cylindrique, à fond plat et horizontal, a $1^m,30$ de diamètre et $0^m,75$ de hauteur, mesurée à l'intérieur. Elle est à moitié pleine d'eau, à la température de 4°. On chauffe ce liquide en y faisant arriver de la vapeur à 100° fournie par $5^{kilog.},025$ d'eau. On demande quelle sera la température du bain ainsi chauffé et quel en sera le volume? On négligera la température du vase, et on prendra, pour coefficient de dilatation de l'eau, $\frac{1}{2200}$.

Le poids de l'eau contenue dans le cylindre est, en kilogrammes,

$$P = \frac{1}{2}\frac{\pi \,.\, 13^2 \,.\, 7,5}{4} = \frac{169 \,.\, 7,5}{8}\pi.$$

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0,4971509 \\ \log 169 &= 2,2278866 \\ \log 7,5 &= 0,8750612 \\ -\log 8 &= -0,9030899 \\ \hline \log P &= 2,6970088; \end{aligned}$$

$$P = 497,747.$$

Le poids de l'eau est donc de $497^{kilog.},747$.

La quantité de chaleur que gagne cette eau, en passant de 4° à $x°$, sera égale à celle que perdront les $5^{kilog.},025$ de vapeur.

La température du bain sera donc déterminée par l'équation

$$497,747\,(x-4) = 5,025\,(640-x)\,;$$

d'où

$$x = \frac{5,025 \,.\, 640 + 497,747 \,.\, 4}{5,025 + 497,747} = 10^\circ,35.$$

Actuellement, déterminons le volume de l'eau, dont la température s'est élevée de 4° à 10°,35, ou a varié de 6°,35.

D'après la formule,

$$V' = V\,(1 + KT),$$

nous aurons

$$V' = 497,747\left(1 + \frac{6,35}{2200}\right)$$
$$= 499^{l},184.$$

A ce volume, il faut ajouter celui des $5^{\text{kilog.}},025$ de vapeur d'eau. Ce volume, à 4°, serait $5^{l},025$; à 10°,35, il sera

$$5,025\left(1 + \frac{6,35}{2200}\right) = 5^{l},039.$$

Le volume total sera donc

$$499^{l},184 + 5^{l},039 = 504^{l},223.$$

SESSION DE JUILLET-AOUT 1854.

CI.

(Lundi, 10 juillet 1854.)

1° Quels sont les divers cas de similitude de deux triangles?

2° Démontrer l'expression de l'aire d'un triangle en fonction des trois côtés; appliquer la formule au triangle dont les côtés sont $0^m,13$; $0^m,14$; $0^m,15$.

La démonstration se trouve dans tous les traités de géométrie ou de trigonométrie; nous nous bornerons donc à donner l'application numérique de la formule

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$\begin{aligned} a &= 0{,}13 \\ b &= 0{,}14 \\ c &= 0{,}15 \\ \hline 2p &= 0{,}42, \\ p &= 0{,}21, \\ p-a &= 0{,}08, \\ p-b &= 0{,}07, \\ p-c &= 0{,}06. \end{aligned}$$

$$\log 0{,}21 = \bar{1}{,}3222192$$
$$\log 0{,}08 = \bar{2}{,}9030899$$
$$\log 0{,}07 = \bar{2}{,}8450980$$
$$\log 0{,}06 = \bar{2}{,}7781512$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$\bar{5}{,}8485583$$
$$\log A = \bar{3}{,}9242791\,;$$

$A = 0{,}0084000 = 84$ centimètres carrés.

CII.

(Mardi, 11 juillet.)

1° Réfraction de la lumière. — Explication des principaux effets produits par la réfraction.

2° On donne un cylindre en fonte, dont le diamètre de la base est égal à $0^m,568$, et la hauteur égale à $2^m,739$. On demande de calculer le volume et le poids, sachant que la densité de la fonte est 7,207.

Le volume du cylindre a pour expression

$$V = \frac{\pi \cdot (0,568)^2 \cdot 2,739}{4}$$

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0,4971509 \\ 2 \log 0,568 &= \bar{1},5086966 \\ \log 2,739 &= 0,4375920 \\ -\log 4 &= -0,6020599 \\ \hline \log V &= \bar{1},8413796 \end{aligned}$$

$V = 0,694032$ mètres cubes $= 694,032$ décimètres cubes.

Pour avoir le poids P, on multiplie ce dernier nombre par 7,207, ce qui donne

$$P = 5001^{\text{kilog.}},889.$$

CIII.

(Mercredi, 12 juillet.)

1° Partager une droite donnée en trois parties proportionnelles aux nombres 2, $\frac{3}{7}$ et $\frac{4}{5}$.

2° Étant donnée une droite AB et un point C pris sur cette droite, mener un cercle tangent au point C à la droite, et passant par un autre point D extérieur à cette droite.

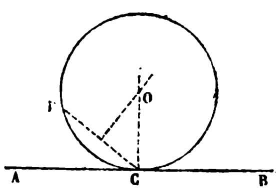
I. Les rapports des segments cherchés ne changent pas si l'on remplace les nombres

$$2,\qquad \frac{3}{7},\qquad \frac{4}{5},$$

par $2 \cdot 7 \cdot 5,\quad 3 \cdot 5,\quad 4 \cdot 7,$

ou par $70,\quad 15,\quad 28.$

D'après cela, le problème se réduit à partager la droite en $70 + 15 + 28 = 118$ parties égales; le premier segment contiendra 70 divisions, le deuxième 15, et le troisième 28.



II. Le centre du cercle est l'intersection de la perpendiculaire élevée au milieu de CD et de la perpendiculaire à AB menée par le point C.

CIV.

(Jeudi, 13 juillet.)

1° Établir les règles à suivre pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres. — Comment reconnaît-on que deux nombres sont premiers entre eux?

2° Un terrain est limité par un polygone dont le périmètre est 432 mètres; ce polygone est irrégulier, mais tous ses côtés sont tangents à un même cercle, dont le rayon est 54 mètres. Calculer le côté du carré équivalent.

Si l'on joint le centre du cercle à tous les sommets du polygone, on décompose cette figure en triangles ayant pour bases les côtés du polygone, et pour hauteur commune, le rayon du cercle. Si donc on appelle x le côté du carré équivalent au polygone, on aura

$$x^2 = 432 \cdot \frac{54}{2} = 11664;$$

$$x = 108 \text{ mètres.}$$

CV.

(Vendredi, 14 juillet.)

1° **Donner l'expression du volume engendré par un triangle tournant autour d'une droite fixe située dans son plan.**

2° **On demande quel rayon on doit donner à la base d'un cône, sachant que la hauteur est égale à 3 mètres, et que ce solide doit avoir un stère en volume.**

Si l'on appelle r le rayon inconnu, le volume du cône sera

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 3 = \pi r^2;$$

donc

$$\pi r^2 = 1,$$

$$r^2 = \frac{1}{\pi}.$$

$$\begin{aligned} \log 1 &= \quad 0 \\ -\log \pi &= -0{,}4971509 \\ \hline 2\log r &= \bar{1}{,}5028491 \\ \log r &= \bar{1}{,}7514245; \\ r &= 0^{m}{,}56419. \end{aligned}$$

CVI.

(Samedi, 18 juillet.)

1° Démontrer que les segments de deux cordes qui se coupent dans le cercle sont inversement proportionnels.

2° Le rayon de la base d'une cône est 4 mètres, la hauteur 6 mètres; on fait, à une distance de 2 mètres du sommet, une section parallèle à la base. Trouver la surface latérale du tronc de cône ainsi obtenu.

La surface du cône donné a pour mesure

$$A = \pi.4\sqrt{4^2+6^2} = 8\pi\sqrt{13}.$$

Le cône déterminé par le plan sécant est semblable au premier; donc, en désignant par A' l'aire de ce nouveau cône,

$$\frac{A'}{A} = \frac{2^2}{6^2}, \quad A' = \frac{1}{9}A.$$

La surface latérale du tronc est la différence entre les surfaces des deux cônes; donc cette surface a pour mesure

$$a = \frac{8}{9}A = \frac{64}{9}\pi\sqrt{13}.$$

$$\begin{aligned}
\log\pi &= 0,4971509\\
\log 64 &= 1,8061799\\
\frac{1}{2}\log 13 &= 0,5569716\\
-\log 9 &= -0,9542425\\
\hline
\log a &= 1,9060599;\\
a &= 80^{mq},5489.
\end{aligned}$$

CVII.

(Lundi, 17 juillet.)

1° De l'électricité dissimulée, et de la bouteille de Leyde.

2° Une lame triangulaire de cuivre, de $0^m,005$ d'épaisseur et de $1^m,25$ de côté, a été recouverte d'une couche d'argent de $0^m,00015$ d'épaisseur; la densité du cuivre est 8,95, celle de l'argent est 10,47. On demande le poids de la lame ainsi argentée.

Cette lame est un prisme ayant pour base un triangle équilatéral de $1^m,25$ de côté; la surface de ce triangle a pour mesure, en décimètres carrés, $\frac{(12,5)^2}{4}\sqrt{3}$.

Le poids du cuivre s'obtiendra en multipliant cette surface par l'épaisseur 0,05 et par la densité 8,95 :

$$P=\frac{(12,5)^2 \cdot 0,05 \cdot 8,95 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Si la lame de cuivre a été argentée sur ses deux faces, le poids de l'argent sera

$$P'=\frac{(12,5)^2 \cdot 0,003 \cdot 10,47\sqrt{3}}{4}.$$

Le poids total sera donc

$$P''=P+P'=\frac{(12,5)^2}{4} \cdot \sqrt{3}(0,05 \cdot 8,95+0,003 \cdot 10,47),$$

ou

$$P''=\frac{1}{4}(12,5)^2\sqrt{3} \cdot 0,47891.$$

$$\begin{aligned}
2\log 12,5 &= 2,1938200\\
\frac{1}{2}\log 3 &= 0,2385606\\
\log 0,47891 &= \bar{1},6802539\\
-\log 4 &= -0,6020599\\
\hline
\log P'' &= 1,5105746;\\
P'' &= 32^{\text{kilog.}},402.
\end{aligned}$$

CVIII.

(Mardi, 18 juillet.)

1° Résolution des équations du premier degré à une inconnue.

2° Les frais nécessaires pour extraire le cuivre d'un quintal (100 kilogrammes) de minerai s'élèvent à $5^f,75$; on a acheté une certaine quantité de minerai, dont la *teneur* en cuivre est 12 pour 100, au prix de 18 fr. le quintal. Le cuivre perdu dans l'opération s'élevant aux $\frac{2}{100}$ de celui que le minerai contient, à quel prix reviendra le quintal de cuivre?

Sur 100 kilogrammes de minerai, il y a 12 kilogrammes de cuivre, desquels il faut déduire $\frac{2}{100}$ de ces mêmes 12 kilogrammes qui sont perdus dans l'opération. Reste donc $11^{\text{kilog.}},76$ de cuivre par quintal. Cette quantité de cuivre coûte 18 fr. d'achat, plus $5^f,75$ d'extraction, en tout $23^f,75$.

Le prix du kilogramme est donc $\frac{23,75}{11,76}$,

et le prix du quintal $$\frac{23,75 . 100}{11,76} = 201^f,95.$$

CIX.

(Mercredi, 19 juillet.

1° **Équilibre des liquides; transmission des pressions; presse hydraulique.**

2° **Quel est le diamètre d'un fil de platine qui pèse 28 grammes par mètre de longueur? On sait que la densité du platine est 22,06.**

Ce fil est un cylindre; en appelant d le diamètre de sa base, exprimé en centimètres, son poids par mètre de longueur sera $\frac{1}{4}\pi d^2 . 100 . 22{,}06$;

donc

$$\frac{1}{4}\pi d^2 . 2206 = 28,$$

$$d^2 = \frac{28 . 4}{\pi . 2206} = \frac{56}{1103\pi}.$$

$$\begin{aligned}
\log 56 &= \quad 1{,}7481880 \\
-\log 1103 &= -3{,}0425755 \\
-\log \pi &= -0{,}4971509 \\
\hline
2 \log d &= \quad \bar{2}{,}2084616 \\
\log d &= \quad \bar{1}{,}1042308 \\
d &= \quad 0{,}12713; \\
d &= \quad 1^{mm}{,}2713.
\end{aligned}$$

CX.

(Jeudi, 20 juillet.)

1° Résoudre les problèmes suivants :

1° D'un point donné hors d'un cercle, mener une tangente à ce cercle;

2° Mener une tangente commune à deux cercles;

3° Décrire sur une ligne donnée un segment capable d'un angle donné.

2° Les bénéfices de l'exploitation d'une mine de houille se partagent également tous les ans entre 20 actions de deux frères, à qui cette mine appartient. L'aîné avait 11 actions, le cadet les 9 autres. Le premier a laissé 16 enfants, le deuxième en a laissé 13. Deux parts d'héritage sont en vente, une dans chaque succession; elles sont offertes au même prix. On demande quelle est celle des deux parts dont l'acquisition serait la plus avantageuse.

L'aîné ayant 11 actions et 16 enfants, chacun des 16 enfants a pour sa part $\frac{11}{16}$ d'action.

Le cadet ayant 9 actions et 13 enfants, chacun des 13 enfants a pour sa part $\frac{9}{13}$ d'action.

La question est donc de savoir laquelle est la plus grande des deux fractions $\frac{11}{16}$ et $\frac{9}{13}$.

Réduites au même dénominateur, elles se transforment en $\frac{143}{208}$ et $\frac{144}{208}$.

La plus avantageuse des deux parts sera donc la seconde, qui surpasse la première de $\frac{1}{208}$.

CXI.

(Vendredi, 21 juillet.)

1° Deux pyramides triangulaires qui ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables et semblablement placées sont égales.

2° Déterminer les volumes de deux liquides dont la densité est pour l'un 1,3, pour l'autre 0,7, sachant que si on les mélange, le volume total est 3 litres et la densité 0,9.

x et y représentant ces deux volumes,
le poids du premier liquide sera $1,3 . x$
le poids du second liquide sera $0,7 . y$.

Le poids du mélange étant $(x+y).0,9$, on aura l'équation :

$$1,3 . x + 0,7 . y = (x + y) . 0,9$$

ou

$$y = 2x.$$

En combinant cette équation avec

$$x + y = 3,$$

on trouve

$$x = 1,$$
$$y = 2.$$

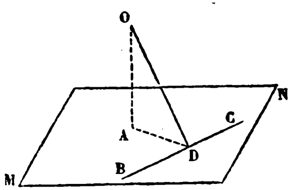
CXII.

(Samedi, 22 juillet.)

1° Inscrire un triangle équilatéral dans un cercle. — Démontrer la construction.

2° Mener par un point O situé dans l'espace, à 1 mètre au-dessus d'un plan horizontal, des plans faisant tous, avec ce plan horizontal, des angles de 45°. Démontrer que les traces de ces plans sur le plan horizontal sont toutes tangentes à une même circonférence de cercle. Quel est le rayon de cette circonférence?

Soit OA la perpendiculaire abaissée, sur le plan horizontal MN, par le point donné O. Soit BC la *trace horizontale* d'un quelconque des plans demandés. Abaissons AD perpendiculaire sur cette droite, et menons OD : d'après un théorème connu, cette droite OD sera perpendiculaire à BC. Par suite, ADO sera l'angle plan correspondant à l'angle dièdre formé par le plan horizontal MN et par le plan BCO. D'après l'énoncé, ADO=45°; donc AOD=45°; et AD = AO = 1^m. Le lieu géométrique du point D est donc une circonférence décrite du point A comme centre, avec un rayon égal à 1^m. De plus, la trace horizontale BC, perpendiculaire à l'extrémité du rayon AD, est tangente à cette circonférence. C'est ce qu'il fallait démontrer.

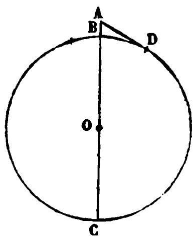


CXIII.

(Lundi, 24 juillet.)

1° De la résolution des triangles.

2° Le rayon de la surface des mers, supposée sphérique, est 6 366 198 mètres. On demande à quelle distance peut s'étendre en pleine mer la vue de l'observateur élevé de 50 mètres au-dessus du niveau de l'eau.



Soit BDC le grand cercle vertical terrestre passant par le lieu A de l'observateur. Menons la tangente AD. Cette droite est moyenne proportionnelle entre la sécante AC et la partie extérieure AB.

Ainsi, $\overline{AD}^2 = (2 \,.\, 6\,366\,198 + 50) \,.\, 50,$

$$AD = \sqrt{12\,732\,446 \times 50} = \sqrt{636\,622\,300}.$$

$$\log 636622300 = 8{,}8038817$$

$$\frac{1}{2} = \log AD = 4{,}4019408;$$

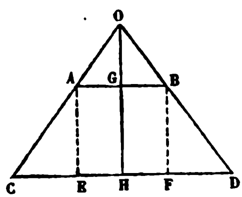
$$AD = 25231 \text{ mètres}.$$

CXIV.

(Mardi, 25 juillet.)

1° Expliquer l'extraction de la racine carrée d'un nombre à moins de $\frac{1}{100}$ près.

2° Un terrain a la forme d'un trapèze isocèle ; les bases sont 100 mètres et 40 mètres ; les deux autres côtés sont égaux à 50 mètres. On demande : 1° la surface de ce terrain en ares ; 2° la surface du terrain triangulaire qu'on obtiendrait en ajoutant au trapèze le triangle partiel formé par les prolongements des côtés non parallèles.



Le trapèze étant isocèle, $CE = DF$. Or, $CE + DF = CD - AB = 60^m$; donc

$$CE = 30^m.$$

Par suite,

$$AE = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CE}^2} = 40^m.$$

Le trapèze ayant pour hauteur 40^m, sa surface sera

$$\frac{100 + 40}{2} . 40 = 2800^{m.q} = 28 \text{ ares}.$$

Pour avoir la mesure du triangle AOB, calculons

$$OH = x.$$

La similitude des triangles OCH, ACE donne

$$\frac{x}{40} = \frac{50}{30}, \quad x = \frac{200}{3}.$$

La surface du grand triangle sera donc

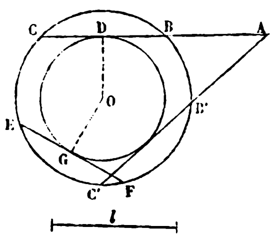
$$\frac{1}{2} . 100 . \frac{200}{3} = \frac{10000^{m.q}}{3} = 33 \text{ ares } \frac{1}{3}.$$

CXV.

(Mercredi, 26 juillet.)

1° **Établir les formules générales pour la résolution d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues, et discuter complétement ces formules.**

2° **Par un point A, donné sur le plan d'un cercle O, mener une sécante à ce cercle, telle que la corde interceptée BC soit égale à une ligne donnée *l*.**



Du centre O, menons OD perpendiculaire à BC, et décrivons la circonférence OD; il est clair que toute corde EF de la circonférence donnée, tangente à la circonférence OD, sera égale à BC, et par suite égale à l. Il faut donc, pour résoudre le problème, inscrire dans la circonférence donnée une corde EF égale à l, abaisser sur EF la perpendiculaire OG; décrire la circonférence OG; et, du point A, mener à la circonférence OG les deux tangentes ABC, A'B'C'.

CXVI.

(Jeudi, 27 juillet.)

1° Exposer les faits qui concernent le mélange des vapeurs et des gaz.

2° Dans un vase vide, d'une capacité de 2020 litres, on a introduit d'abord un litre d'air sous la pression $0^m,76$; puis de l'eau en quantité telle qu'il en reste définitivement 0,20 mètres cubes à l'état liquide. On demande la pression intérieure, en supposant que la température soit de 30° au moment de l'expérience. On sait qu'à cette température, la tension maximum de la vapeur d'eau est de $0^m,031$.

La pression du mélange sera la somme des pressions de l'air et de la vapeur. Nous connaissons déjà cette dernière pression; il nous suffit donc de calculer ce qu'est devenue la force élastique de l'air quand son volume, qui était de 1 litre, a été porté à $2020^l - 200^l = 1820^l$. Or, la température étant constante, les pressions sont inversement proportionnelles aux volumes occupés par le gaz; si donc nous représentons par x la pression de l'air, nous aurons

$$\frac{x}{0,76} = \frac{1}{1820},$$

$$x = 0^m,000417.$$

A cette pression de l'air, ajoutons la tension de la vapeur à 30°, nous aurons, pour pression finale,

$$0^m,000417 + 0^m,031,$$

ou

$$0^m,031417.$$

CXVII.

(Vendredi, 28 juillet.)

1° Démontrer que le volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe, situé dans son plan et mené par l'un de ses sommets, a pour mesure la surface décrite par le côté opposé à l'axe, multipliée par le tiers de la hauteur correspondante.

2° Borda a trouvé que la longueur du pendule simple qui bat la seconde à Paris est de $440^{\text{lignes}},5593$. Réduire cette longueur en millimètres.

D'après la définition du mètre,

$$10\,000\,000 \text{ mètres} = 5\,130\,740 \text{ toises}$$
$$= 5130740 . 6 . 12 . 12 \text{ lignes};$$

donc

$$1 \text{ ligne} = \frac{10\,000\,000}{5130740 . 6 . 12 . 12} \text{ mètres};$$

et la longueur x du pendule

$$= \frac{10\,000\,000 . 440,5593}{5130740 . 6 . 12 . 12} \text{ mètre}$$
$$= \frac{10\,000\,000\,000 . 440,5593}{5130740 . 6 . 12 . 12} \text{ millimètres}.$$

$$\begin{aligned} \log 10\,000\,000\,000 &= 10 \\ \log 440,5593 &= 2,6440044 \\ -\log 5\,130740 &= -6,7101800 \\ -\log 864 &= -2,9365137 \\ \hline \log x &= 2,9973107; \end{aligned}$$

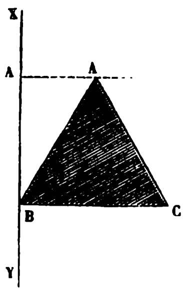
$$x = 993^{\text{mm}},82.$$

CXVIII.

(Samedi, 29 juillet.)

1° Expliquer l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier en prenant pour exemple le nombre 7548.

* 2° Calculer le volume du corps engendré par un triangle équilatéral tournant autour d'une perpendiculaire XY à son côté BC, menée par l'extrémité B de ce côté. On suppose BC = 3m,79.



Le corps engendré par BAC est évidemment la différence entre le tronc de cône engendré par le trapèze BCAA′ et le cône décrit par le triangle rectangle BAA′. Par conséquent, le volume demandé sera

$$V = \frac{1}{3}\pi \,.\, BA' \,.\, \left(\overline{BC}^2 + \overline{AA'}^2 + BC \,.\, AA' - \overline{AA'}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\pi\, BA' \,.\, BC\,(BC + AA');$$

ou, à cause de $AA' = \frac{1}{2}\,BC$,

$$V = \frac{1}{2}\pi\, BA' \,.\, \overline{BC}^2.$$

---

* Le problème proposé aux candidats était ainsi conçu : « Calculer le volume engendré par un parallélogramme équilatéral de 3m,79 de côté, tournant autour d'un axe qui se confond avec sa diagonale. »

Cette question étant indéterminée, nous avons dû la remplacer par une autre.

La distance BA′ est évidemment égale à la hauteur du triangle équilatéral; donc elle a pour expression $\frac{1}{2}$ BC . $\sqrt{3}$. Par suite,

$$V = \frac{1}{4}\pi\,\overline{BC}^3\sqrt{3} = \frac{1}{4}\pi(3,779)^3\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} \log\pi &= 0,4971509 \\ 3\log 3,79 &= 1,7359176 \\ \frac{1}{2}\log 3 &= 0,2385606 \\ -\log 4 &= -0,6020600 \\ \hline \log V &= 1,8695691\,; \end{aligned}$$

$$V = 7^{m.c},40575.$$

CXIX.

(Lundi, 31 juillet.)

1° Des lois de la réflexion, et des effets des miroirs plans et des miroirs sphériques concaves.

2° Une barre de 7 mètres, formée d'un métal dont le coefficient de dilatation est $\frac{1}{735}$, se dilate autant qu'une autre barre de 9 mètres d'un autre métal. On demande le coefficient de dilatation de l'autre métal.

Si l'on appelle x ce coefficient, on aura

$$\frac{7}{735} = 9x;$$

d'où

$$x = \frac{1}{945}.$$

CXX.

(Mardi, 1er août.)

1° Mesure du tronc de cône à bases parallèles.

2° Résoudre les deux équations

$$x+y=\frac{21}{8}, \qquad (1)$$

$$\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{35}{6}. \qquad (2)$$

Posons $\frac{x}{y}=z$; nous aurons, au lieu de la seconde équation,

$$z-\frac{1}{z}=\frac{35}{6},$$

ou

$$6z^2-35z-6=0.$$

Les racines de cette équation sont données par la formule

$$z=\frac{35\pm\sqrt{35^2+4.6.6}}{12}$$

$$=\frac{35\pm\sqrt{1369}}{12}$$

$$=\frac{35\pm 37}{12};$$

savoir :

$$z'=6, \quad z''=-\frac{1}{6}.$$

La première valeur donne $x=6y$; puis, par l'équation (1),

$$y=\frac{3}{8}, \quad x=\frac{9}{4}.$$

La seconde valeur de z donne $y=-6x$; d'où

$$x=-\frac{21}{40}, \quad y=\frac{63}{20}.$$

CXXI.

(Mercredi, 2 août.)

1° Établir les règles à suivre pour extraire la racine carrée : 1° d'un nombre entier; 2° d'une fraction ordinaire; 3° d'un nombre décimal, à une unité près d'un ordre donné, décimal ou fractionnaire.

2° Sur un terrain plat, on veut établir, pour un troupeau de moutons, un parc rectangulaire qui ait 6400 mètres carrés de superficie, et dont le périmètre soit de 400 mètres, longueur totale d'une clôture mobile dont on peut disposer. On demande quelles longueurs doivent avoir les côtés du rectangle.

Soient x, y ces longueurs; on aura

$$x + y = 200,$$
$$xy = 6400.$$

x et y sont donc les racines de l'équation

$$z^2 - 200\,z + 6400 = 0.$$

Elle donne

$$z = 100 \pm \sqrt{10000 - 6400},$$
$$= 100 \pm 60;$$

savoir :

$$x = 160,\ y = 40.$$

CXXII.

(Jeudi, 3 août.)

1° **Expériences fondamentales sur l'induction.**

2° **Un ballon pèse : vide, 145gr.,237 ; plein d'air, 159gr.,225 ; plein d'un gaz, 152gr.,118. On demande la densité du gaz par rapport à l'air ; la température et la pression sont restées invariables. On demande la même densité dans le cas où la pression aurait été de 0m,75 pour la pesée de l'air, et de 0m,77 pour la pesée de l'autre gaz. On demande, enfin, quel genre de correction il aurait fallu faire si la température avait été de 8° pendant la pesée de l'air, et de 11° pendant celle du gaz.**

Le poids du gaz est 152g,118 — 145,237 = 6g,881.

Le poids de l'air est 159 ,225 — 145,237 = 13 ,988.

Le poids spécifique du gaz est donc, dans le premier cas,

$$\pi = \frac{6,881}{13,988} = 0,49192.$$

Pour connaître le poids spécifique dans le cas où la pression aurait été 0m,75 pendant la pesée de l'air, et 0m,77 pendant la pesée du gaz, on se rappellera qu'à volume constant, le poids d'un gaz varie proprotionnellement à la pression; et l'on aura, pour le nouveau poids spécifique,

$$\pi' = \frac{6,881 \cdot \frac{0,75}{0,77}}{13,988} = 0,49192 \cdot \frac{75}{77},$$

ou

$$\pi' = 0,49192 - 0,01278 = 0,47914.$$

Enfin, si l'on veut tenir compte de la variation de température et de la variation de pression, on calculera ce qu'aurait été le poids du gaz, à la température de 8°, par la formule

$$P' = P \cdot \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'}.$$

Elle donne

$$P' = 6,881 \cdot \frac{75}{77} \frac{1+0,00366 \cdot 11}{1+0,00366 \cdot 8}$$

$$= 6,881 \cdot \frac{75}{77} \frac{1,04026}{1,02928}.$$

Par suite, le poids spécifique est

$$\pi'' = 0,47914 \cdot \frac{1,04026}{1,02928} = 0,48437.$$

CXXIII.

(Vendredi, 4 août.)

1° De la lunette de Galilée et des lunettes astronomiques.

2° On mêle 7 kilogrammes de glace à 0° avec 30 kilogrammes d'eau à 47°. Quelle sera la température du mélange?

Les 7 kilogrammes de glace absorberont, pour se fondre, 79.7 unités de chaleur latente. En outre, si x est la température finale, les 7 kilogrammes absorberont $7x$ unités de chaleur sensible.

La température de l'eau s'abaissera de 47° à x; par conséquent, chaque kilogramme perdra $47 - x$ unités de chaleur; et les 30 kilogrammes d'eau perdront $30(47 - x)$ unités de chaleur.

En égalant ces deux quantités de chaleur, on a

$$7 . 79 + 7x = 30(47 - x);$$

d'où

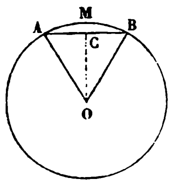
$$37x = 857,$$
$$x = 23°, 16.$$

CXXIV.

(Samedi, 5 août.)

1° Exposer les théorèmes relatifs à la mesure des volumes des polyèdres, en développant ce qui se rapporte au parallélipipède et en se bornant à indiquer ensuite l'ordre et l'enchaînement des propositions.

2° Calculer en hectares la surface du segment compris entre l'arc de 60° et sa corde, dans un cercle dont le rayon est de 876 mètres.



L'arc AMB étant de 60°, la corde AB est égale au rayon.

Le secteur AMBO est le $\frac{1}{6}$ du cercle ; donc il a pour mesure

$$A = \frac{1}{6}\pi R^2.$$

L'apothème OC du triangle équilatéral ABO, égale, d'après une formule connue, $\frac{1}{2}R\sqrt{3}$; l'aire de ce triangle est donc

$$A' = \frac{1}{4}R^2\sqrt{3}.$$

Par suite, le segment AMBC a pour mesure

$$x = A - A' = \left(\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)876^2.$$

$$\frac{1}{2}\log 3 = \quad 0,2385606$$

$$-\log 4 = -0,6020600$$

$$\log\left(\frac{1}{4}\sqrt{3}\right) = \quad \bar{1},6365006$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{3} = \quad 0,433013.$$

$$\pi = 3{,}141593$$

$$\frac{1}{6}\pi = 0{,}523599$$

$$\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3} = 0{,}090586.$$

$$\log\left(\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right) = \bar{2}{,}9570611$$

$$2 \log 876 = 5{,}8850082$$

$$\log x = 4{,}8420693;$$

$$x = 69513{,}5 = 6{,}95135 \text{ hectares.}$$

CXXV.

(Lundi, 7 août.)

1° Exposer la méthode des mélanges pour la détermination des chaleurs spécifiques.

2° Un corps perd de son poids dans l'air 7 grammes. Combien perdrait-il dans l'acide carbonique et dans l'hydrogène, la densité de l'acide carbonique étant 1,524 et celle de l'hydrogène étant 0,069?

Les pertes de poids éprouveés par le corps sont proportionnelles aux densités des gaz dans lesquels on le plonge; ainsi, la perte de poids sera, dans l'acide carbonique,

$$7 \,.\, 1{,}524 \text{ ou } 10^{g}{,}668;$$

et, dans l'hydrogène,

$$7 \,.\, 0{,}069 \text{ ou } 0^{g}{,}483.$$

CXXVI.

(Mardi, 8 août.)

1° Exposer avec détails la réduction de plusieurs fractions au plus petit dénominateur commun.

2° Le rayon intérieur d'une tour ronde est de $1^m,3$. Son épaisseur est $0^m,5$, et le volume de la maçonnerie qui la compose est de $94^m,4677$. On demande quelle est la hauteur de la tour.

Le rayon intérieur de la tour étant de $1^m,3$, et la hauteur étant représentée par x, le volume du cylindre intérieur est

$$\pi\,.\,(1,3)^2\,.\,x.$$

Le rayon extérieur étant $1^m,3+0,5$ ou $1^m,8$, le volume du cylindre extérieur est

$$\pi\,.\,(1,8)^2\,.\,x;$$

le volume de la maçonnerie est donc

$$\pi x\left[(1,8)^2-(1,3)^2\right]=94,4677;$$

d'où

$$x=\frac{94,4677}{\pi\,.\,3,1\,.\,0,5}=\frac{94,4677}{\pi\,.\,1,55}.$$

$$\begin{aligned}
\log 94,4677 &= \quad 1,9752801\\
-\log\pi &= -0,4971509\\
-\log 1,55 &= -0,1903317\\
\hline
\log x &= \quad 1,2877975;\\
x &= 19^m,399.
\end{aligned}$$

CXXVII.

(Mercredi, 9 août.)

1° Décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers. Prouver qu'il n'y a qu'une seule manière d'opérer cette décomposition. — Trouver le plus petit nombre divisible par des nombres donnés.

2° Calculer, à 0,01 près, la hauteur d'un triangle dont la base est 647 mètres, et dont la surface doit être moyenne proportionnelle entre celles de deux rectangles ayant 2 mètres de hauteur, et pour bases l'un $553^{m},45$ et l'autre 4727,5.

Les aires des deux rectangles sont : $2 \,.\, 553,45$ et $2 \,.\, 4727,5$.

Soit x la hauteur du triangle ; sa surface sera représentée par $\frac{1}{2} 647 \,.\, x$. Comme elle doit être moyenne proportionnelle entre les surfaces des deux rectangles, on aura

$$\frac{647}{2} x = 2\sqrt{553,45 \,.\, 4727,5},$$

$$x = \frac{4}{647}\sqrt{553,45 \,.\, 4727,5}.$$

Le facteur $\frac{4}{647}$ est inférieur à $\frac{1}{100}$; par conséquent, pour obtenir x avec l'approximation demandée, il sera plus que suffisant de calculer le radical à une unité près. D'un autre côté, comme la partie entière de la racine aura 4 chiffres, il suffira de calculer $553,45 \,.\, 4727,5$, à moins d'*une dizaine*. Opérant par la multiplication abrégée, on trouve, pour ce produit, le nombre 2616430. Conséquemment,

$$x = \frac{4}{647}\sqrt{2\,616\,430} = \frac{4}{647} \,.\, 1617 = \frac{6468}{647} = 9,99 :$$

ou, plus simplement,

$$x = 10^{m}.$$

CXXVIII.

(Vendredi, 11 août.)

1° De l'électricité dissimulée. — Construction et usage des condensateurs électriques.

2° Combien pèse, à 0° et $0^m,76$ de pression, l'hydrogène contenu dans un ballon sphérique dont la surface a 10 mètres carrés; on sait que la pesanteur spécifique de l'hydrogène rapportée à celle de l'air est de 0,0692, et que celle de l'air lui-même rapportée à celle de l'eau est de $\frac{1}{770}$. Combien pèserait ce volume d'hydrogène, s'il était mesuré à la température de 15° et à la pression de $0^m,77$. On suppose connu le coefficient de dilatation des gaz.

1° Les formules relatives à la surface et au volume de la sphère donnent, en appelant V le volume du ballon,

$$4\pi R^2 = 10,$$
$$V = \frac{4}{3}\pi . R^3;$$

d'où

$$V = \frac{4}{3}\pi . \frac{5}{2\pi}\sqrt{\frac{5}{2\pi}} = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{2\pi}}.$$

$$\begin{aligned} \log 5 &= 0,6989700 \\ -\log 2 &= -0,3010300 \\ -\log \pi &= -0,4971509 \\ \hline & \bar{1},9007891 \\ \frac{1}{2} &= \bar{1},9503945 \\ \log 10 &= 1 \\ -\log 3 &= -0,4771212 \\ \hline \log V &= 0,4732733; \end{aligned}$$

$$V = 2^m,9735 = 2973,5 \text{ litres}.$$

Or, 1 litre d'air pèse $\frac{1}{770}$ de kilogramme.

1 litre d'hydrogène pèse $\frac{1}{770} \cdot 0{,}0692$ de kilogramme;

par conséquent, le poids de l'hydrogène contenu dans le ballon sera

$$P = 2973{,}5 \cdot \frac{0{,}0692}{770}.$$

$$\begin{aligned} \log 2973{,}5 &= 3{,}4732733 \\ \log 0{,}0692 &= \bar{2}{,}8401061 \\ -\log 770 &= -2{,}8864907 \\ \hline \log P &= \bar{1}{,}4268887; \end{aligned}$$

$$P = 0^{\text{kilog.}},26723 = 267^{g},23.$$

2° Pour avoir le poids P′ de cet hydrogène à 15°, et à la pression $0^m,77$, il faut employer la formule :

$$\frac{P}{P'} = \frac{H}{H'} \cdot \frac{1 + \alpha T'}{1 + \alpha T};$$

$$H = 0{,}76;\ T' = 15°;\ T = 0°;\ H' = 0{,}77;\ \alpha = 0{,}00366,$$

$$\frac{P}{P'} = \frac{76}{77}(1 + 0{,}00366 \times 15).$$

$$P' = P. \frac{77 \cdot 1{,}0549}{76}.$$

$$\begin{aligned} \log P &= \bar{1}{,}4268887 \\ \log 1{,}0549 &= 0{,}0232113 \\ \log \frac{77}{76} &= 0{,}0056771 \\ \hline \log P' &= \bar{1}{,}4557771; \end{aligned}$$

$$P' = 285^{g},61.$$

CXXIX.

(Samedi, 12 août.)

1° Donner la décomposition et la recomposition de la lumière par le prisme.

2° La densité de l'air étant 1, celle de l'hydrogène est 0,069 et celle de l'acide carbonique 1,524, à 0° et à la pression $0^m,76$. Un corps plongé dans l'acide carbonique perd $1^{gr.},15$ de son poids; on demande quelle serait sa perte de poids dans l'air et dans l'hydrogène.

On demande encore si le rapport des pertes reste le même : 1° à la température de 200°, la pression ne changeant pas; 2° si ce rapport reste le même à la pression de 30 atmosphères, la température étant 0°.

Les pertes de poids éprouvées par le corps sont proportionnelles aux densités des gaz dans lesquels on le plonge; par conséquent, la perte de poids sera, dans l'air,

$$1^g,15 \, . \, \frac{1}{1,524} = 0^g,754 \, ;$$

et, dans l'hydrogène,

$$1^g,15 \, . \, \frac{0,069}{1,524} = 0^g,052.$$

2° Le rapport des pertes restera le même à 200°, puisqu'il faudrait remplacer les densités à 0° par ces mêmes densités divisées par $1 + 0,00366 \, . \, 200$, d'après la formule

$$d' = \frac{d}{1 + \alpha t}.$$

3° Ce rapport restera encore le même à la pression de 30 atmosphères, puisque les densités sont proportionnelles aux pressions.

CXXX.

(Lundi, 14 août.)

1° Construction et usage du Rhéomètre multiplicateur.

2° Une certaine quantité d'air sec pèse 5gr.,2 à la température de 0° et sous la pression 0m,76. On chauffe cet air à 30° sous la pression de 0m,77 en lui permettant de se saturer de vapeur d'eau, et on demande alors le volume qu'il occupera, la tension maxima de la vapeur étant, à 30°, 0m,0315. On prendra 1gr.,3 pour poids du litre d'air sec à la température de 0° et à la pression de 0m,76.

Puisque 1gr.,3 est le poids d'un litre d'air sec, 5gr.,2 sera le poids de $\frac{5,2}{1,3}$ ou de 4 litres d'air. La tension de cet air saturé de vapeur doit être 0,77. Sa tension à l'état sec sera

$$0^m,77 - 0^m,0315 = 0^m,7385.$$

La question est ainsi ramenée à la suivante :

On a 4 litres d'air à 0° et à 0m,76 ; déterminer le volume de cet air à 30° et à 0m,7385.

On emploiera la formule

$$\frac{V'}{V} = \frac{H}{H'} \cdot \frac{1+\alpha T'}{1+\alpha T}.$$

$$V = 4;\ H = 0,76;\ T = 0°;\ H' = 0,7385;\ T' = 30°.$$

$$V' = \frac{4 \cdot 0,76 \cdot (1 + 0,00366 \cdot 30)}{0,7385};$$

$$V' = 4^l,568.$$

CXXXI.

(Mercredi, 16 août.)

1° Donner la description de l'appareil de Clarke.

2° Le poids de l'atmosphère fait monter le mercure dans le baromètre à 0,76 à la température 0°. On demande : 1° à quelle hauteur s'élèverait le mercure si la température était de 25°, le coefficient de dilatation du mercure étant $\frac{1}{5550}$; 2° à quelle hauteur s'élèverait l'alcool dont la densité est 0,79. On sait que la densité du mercure est 13,6.

1° La hauteur du mercure, à 25°, sera

$$h = 0{,}76\left(1 + 25 \cdot \frac{1}{5550}\right)$$
$$= 0{,}76 \cdot \frac{223}{222}$$
$$= 0^{m}{,}763.$$

2° Pour connaître la hauteur à laquelle s'élèverait l'alcool dans les mêmes conditions, nous exprimerons que les hauteurs sont inversement proportionnelles aux densités des liquides :

$$\frac{x}{0{,}763} = \frac{13{,}6}{0{,}79},$$

$$x = \frac{13{,}6 \cdot 0{,}763}{0{,}79} = 13^{m}{,}135.$$

CXXXII.

(Jeudi, 17 août.)

1° On mène dans un triangle, du point A au milieu de la base BC, la ligne AD. Prouver que l'on aura $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{BD}^2$.

Conclure de là que dans tout parallélogramme la somme des carrés des quatre côtés égale la somme des carrés des deux diagonales.

2° Diviser une droite qui a 18 mètres, en trois parties proportionnelles aux nombres 2, 7, 9.

Les solutions de ces deux questions se trouvent dans tous les traités de géométrie.

CXXXIII.

(Vendredi, 18 août.)

1° Qu'est-ce que le poids spécifique d'un corps? Par quels procédés peut-on le déterminer?

2° Le poids spécifique du mercure est 13,59 à 0°. On demande quel est, à 100°, le volume de 40 kilogrammes de ce corps, le coefficient de dilatation cubique du mercure étant $\frac{1}{5550}$.

Le poids spécifique du mercure, à 100°, est donné par la formule $\pi' = \frac{\pi}{1+kt}$.

$$\pi' = \frac{13,59}{1+\frac{100}{5550}}$$

$$= \frac{13,59 \cdot 111}{113}.$$

Le poids d'un décimètre cube d'eau étant 1 kilogramme, le volume cherché V satisfera à l'équation

$$V \cdot \frac{13,59 \cdot 111}{113} = 40;$$

d'où

$$V = \frac{40 \cdot 113}{13,59 \cdot 111} = 2,999 \text{ décimètres cubes.}$$

CXXXIV.

(Samedi, 19 août.

1° Expliquer l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier, en prenant pour exemple le nombre 7548.

2° On a un vase cylindrique dont le diamètre intérieur est de $0^m,175$. Ce vase étant posé sur un plan horizontal par son fond circulaire, on y verse 21 kilogrammes de mercure dont la densité est 13,6. On demande à quelle hauteur le liquide s'élèvera.

Le volume du liquide est, en prenant le décimètre pour unité, et en représentant par h la hauteur inconnue,

$$\frac{1}{4}\pi(1,75)^2 \,.\, h;$$

son poids est

$$\frac{1}{4}\pi(1,75)^2 h \,.\, 13,6 = 21;$$

donc

$$h = \frac{21}{\pi \,.\, (1,75)^2 \,.\, 3,4}.$$

$$\begin{array}{rl}
\log 21 = & 1,3222192 \\
-\log\pi = & -\,0,4971509 \\
-2\log 1,75 = & -\,0,4860760 \\
-\log 3,4 = & -\,0,5314789 \\
\hline
& \bar{1},8075134;
\end{array}$$

$$h = 0,64197 = 0^m,064197.$$

CXXXV.

(Lundi, 21 août.)

1° Effet des lentilles concaves et convexes. — Description du microscope composé.

2° La chaleur latente de la vapeur d'eau étant supposée égale à 536°, on demande à quelle température on élèvera 20 litres d'eau à 4°, en y conduisant 1 kilogramme de vapeur à 100° sous la pression $0^m,76$.

Le kilogramme de vapeur d'eau contient 536 unités de chaleur latente et 100 unités de chaleur sensible; en tout, 636 unités de chaleur.

En désignant par x la température finale, ce kilogramme perdra $636 - x$ unités de chaleur.

Les 20 litres d'eau gagneront

$$20(x - 4) \text{ unités de chaleur};$$

donc

$$636 - x = 20(x - 4);$$

$$x = 31^g,23.$$

CXXXVI.

(Mardi, 22 août.)

1° Expériences fondamentales de l'induction.

2° Le volume d'air d'une éprouvette d'une machine à compression est de 137 parties; par le jeu de la machine, ce volume s'est réduit à 25 parties, et le mercure s'est élevé dans l'éprouvette à $0^m,45$. On demande le rapport entre la quantité primitive d'air du récipient, et la quantité qui s'y trouve après l'expérience.

x étant la tension de l'air sous l'éprouvette, après le jeu de la machine, on a, par la loi de Mariotte,

$$\frac{137}{25}=\frac{x}{0,76};$$

d'où

$$x=4^m,1648.$$

La pression de l'air, sous le récipient, sera

$$y=4,1648+0,45=4^m,6148.$$

En appelant a et b les quantités d'air sous le récipient avant et après l'expérience, le rapport de ces quantités d'air sera le même que celui des pressions 0,76 et 4,6148 ; ainsi

$$\frac{a}{b}=\frac{0,76}{4,6148},$$

$$b=a\,.\,6,07;$$

c'est-à-dire que la quantité d'air qui se trouve sous le récipient après l'expérience est égale à celle qui s'y trouvait d'abord, multipliée par 6,07.

CXXXVII.

(Mercredi, 23 août.)

1° Inscrire dans un cercle un hexagone régulier.

2° Une pyramide triangulaire dont la base a ses trois côtés de 13 mètres, 14 mètres et 15 mètres, et dont la hauteur est de 16 mètres, est coupée par un plan parallèle à la base et distant du sommet de 2 mètres; on demande le volume du tronc de pyramide.

Le volume V de la pyramide totale a pour expression l'aire A de la base, multipliée par le tiers de la hauteur.

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$A = \sqrt{21 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6} = \sqrt{7056} = 84.$$

$$V = \frac{84 \,.\, 16}{3} = 28.16 = 448.$$

La pyramide déterminée par le plan sécant est semblable à la pyramide proposée; leurs volumes sont donc entre eux comme les cubes des hauteurs; donc, en appelant v le volume de la petite pyramide :

$$v = 448. \left(\frac{2}{16}\right)^3 = 0,875.$$

La différence entre V et v donne, pour le volume du tronc,

$$447^{\text{m.c.}},125.$$

CXXXVIII.

(Jeudi, 24 août.)

1° Démontrer que si une droite, située en dehors d'un plan, est perpendiculaire à deux droites passant par son pied dans le plan, elle sera perpendiculaire à toute autre droite menée par son pied dans le même plan.

2° On demande de construire, sur une base AB de 21 mètres, un triangle CAB rectangle en A, tel que l'hypoténuse CB et le côté CA fassent ensemble une somme double du côté AB.

Soient x l'hypoténuse, y le côté CA; on a :

$$x + y = 42.$$

Le théorème de Pythagore donne :

$$x^2 - \quad = 21^2,$$

ou

$$(x + y)(x - y) = 21^2;$$

puis

$$x - y = \frac{441}{42} = 10,5$$

Nous avons donc

$$x + y = 42,$$
$$x - y = 10,5;$$

par conséquent,

$$x = \frac{42 + 10,5}{2} = 26^{m},25,$$

$$y = \frac{42 - 10,5}{2} = 15^{m},75.$$

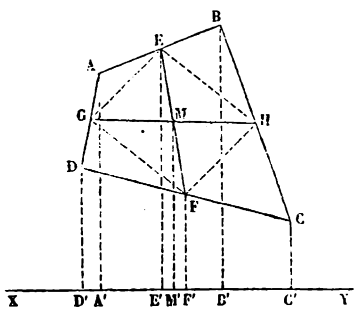
CXXXIX.

(Vendredi, 25 août.)

1° On a tracé la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés d'un quadrilatère donné, et l'on a mesuré la distance du milieu de cette médiane à un axe situé dans ce plan. On propose de démontrer que cette distance est la moyenne arithmétique entre les distances des quatre sommets du quadrilatère au même axe, et que le point de rencontre des deux médianes du quadrilatère est le milieu de chacune d'elles.

2° On suppose qu'un plan donné renferme, avec une circonférence de cercle, deux pentagones réguliers, l'un inscrit, l'autre circonscrit. On demande le rayon du cercle : 1° dans le cas où la différence entre les périmètres des deux pentagones est de 1 décimètre ; 2° dans le cas où l'aire comprise entre ces deux périmètres est de 1 décimètre carré.

PREMIER PROBLÈME.



1° Les trapèzes $ABA'B'$, $CDC'D'$, $EFE'F'$ donnent

$$EE' = \frac{AA' + BB'}{2},$$

$$FF' = \frac{CD + C'D'}{2},$$

$$2MM' = EE' + FF';$$

donc

$$MM' = \frac{AA' + BB' + CC' + DD'}{4}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

2° GH étant la seconde médiane, menons GE, EH, HF, FG. Il est facile de voir que GEHF est un parallélogramme; donc les droites EF, GH, diagonales de ce parallélogramme, se coupent en leur milieu commun.

SECOND PROBLÈME.

1° Le côté du pentagone régulier inscrit est

$$c = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

L'apothème de ce pentagone sera

$$a = \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} = R\sqrt{1 - \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \frac{R}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \frac{R}{4}(1 + \sqrt{5}).$$

Soient P, P′ les périmètres des pentagones inscrit et circonscrit; on aura

$$\frac{P}{P'} = \frac{a}{R};$$

d'où

$$\frac{P' - P}{P} = \frac{R - a}{a}.$$

Mais, en prenant le décimètre pour unité, $P' - P = 1$; donc, à cause de

$$P = 5c = \frac{5}{2}R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}:$$

$$\frac{1}{\frac{5}{2}R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} = \frac{R - \frac{R}{4}(1 + \sqrt{5})}{\frac{R}{4}(1 + \sqrt{5})}.$$

Cette proportion donne

$$\frac{5}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{(1+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{4}$$
$$=2+\sqrt{5};$$

puis

$$R=\frac{2}{5}\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}=\frac{2}{5}\frac{(2+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{80}}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{50}\sqrt{(10+2\sqrt{5})(2+\sqrt{5})^2}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{50}\sqrt{130+58\sqrt{5}}=\frac{1}{50}\sqrt{650+290\sqrt{5}};$$

ou enfin, $R=\frac{1}{50}\sqrt{650+\sqrt{420\,500}}.$

$$\begin{array}{rl}
\log 420500 = & 5{,}6237660 \\
\frac{1}{2} = & 2{,}8118820 \\
\text{Nomb. corresp.} = & 648{,}458 \\
\log 1298{,}458 = & 3{,}1134280 \\
\frac{1}{2} = & 1{,}5567140 \\
-\log 50 = & -1{,}6989700 \\
\hline
\log R = & \bar{1}{,}8577440; \\
R = & 0{,}720\,682.
\end{array}$$

Ainsi, le rayon du cercle circonscrit serait $0^m{,}0720\,682$.

On peut vérifier ce résultat au moyen d'une autre méthode. Il est facile de voir, en effet, que les côtés des deux pentagones ont pour expressions

$$2R \sin 36^\circ \quad \text{et} \quad 2R \operatorname{tg} 36^\circ.$$

Par conséquent, la différence des deux périmètres sera

$$10R (\operatorname{tg} 36^\circ - \sin 36^\circ).$$

Donc, d'après l'énoncé,

$$10R (\operatorname{tg} 36^\circ - \sin 36^\circ) = 1.$$

La quantité entre parenthèses égale

$$\frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} - \sin 36^\circ = \frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ}(1 - \cos 36^\circ) = 2 \operatorname{tg} 36^\circ . \sin^2 18^\circ.$$

Par suite,

$$R = \frac{1}{20 \operatorname{tg} 36^\circ . \sin^2 18^\circ}.$$

$$\begin{aligned}
\log 1 &= \quad 0. \\
-\log 20 &= -1{,}3010300 \\
-\log 36^\circ &= -\bar{1}{,}8612610 \\
-2 \log \sin 18^\circ &= -\bar{2}{,}9799648 \\
\hline
\log R &= \quad \bar{1}{,}8577442; \\
R &= \quad 0{,}720682,
\end{aligned}$$

comme ci-dessus.

2° Appelons A, A′ les aires des deux pentagones; nous aurons

$$\frac{A}{A'} = \frac{a^2}{R^2},$$

d'où

$$\frac{A' - A}{A} = \frac{R^2 - a^2}{a^2}.$$

Mais,

$$A' - A = 1,$$

$$A = P \cdot \frac{1}{2} a = 5c \cdot \frac{1}{2} a,$$

et

$$R^2 - a^2 = \frac{1}{4} c^2;$$

donc, en supprimant le facteur commun a et remplaçant a et c par leurs valeurs

$$\frac{1}{\frac{5}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} = \frac{\frac{1}{16}(10 - 2\sqrt{5})}{\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})} R^2.$$

Cette équation donne

$$R^2 = \frac{16}{5} \frac{1 + \sqrt{5}}{(10 - 2\sqrt{5})\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{16}{5} \frac{(1 + \sqrt{5})(10 + 2\sqrt{5})\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{80\sqrt{80}}$$

$$= \frac{2}{25} \frac{(1 + \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{80}}$$

$$= \frac{1}{50}(1 + \sqrt{5})^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{25}(3 + \sqrt{5})\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2}{25}\sqrt{(5 + \sqrt{5})(7 + 3\sqrt{5})} = \frac{2}{25}\sqrt{50 + 22\sqrt{5}};$$

puis

$$R = \frac{1}{5}\sqrt[4]{200 + 88\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt[4]{200 + \sqrt{38720}}.$$

$$\begin{aligned}
\log 38720 &= 4,5879353\\
\frac{1}{2} &= 2,2939677\\
\text{Nomb. corresp.} &= 196,774\\
\log 396,774 &= 2,5985432\\
\frac{1}{4} &= 0,6496358\\
-\log 5 &= -0,6989700\\
\hline
\log R &= \bar{1},9506658\,;\\
R &= 0,892619.
\end{aligned}$$

Le rayon du second cercle est donc

$$0^m,0892619.$$

On peut également vérifier cette nouvelle valeur. En effet,

$$A = 5R^2 \sin 36° \cos 36°,\ A' = 5R^2 \operatorname{tg} 36°\,;$$

donc

$$5R^2 (\operatorname{tg} 36° - \sin 36° \cos 36°) = 1.$$

La quantité entre parenthèses égale tg 36° . sin² 36° ; donc

$$R^2 = \frac{1}{5 \operatorname{tg} 36°.\sin^2 36°}.$$

$$\log 1 = 0$$

$$-\frac{1}{2}\log 5 = -0,3494850$$

$$-\frac{1}{2}\log \operatorname{tg} 36^\circ = -\bar{1},9306305$$

$$-\log \sin 36^\circ = -\bar{1},7692187$$

$$\log R = \bar{1},9506658\,;$$

comme ci-dessus.

CXL.

(Samedi, 26 août.)

1° Déterminer le volume du tronc de cône.

2° Le minerai d'une usine de plomb contient 23 pour 100 de ce métal; le plomb que l'on en retire contient lui-même 0,003 d'argent. Ces produits divers forment une valeur annuelle de 1 795 000 fr. Chercher combien il y a d'argent produit et combien de plomb. Chercher aussi quelle a été la quantité de minerai traité dans l'usine; on supposera que la perte en plomb produite par les diverses opérations soit de 10 pour 100, la perte en argent étant regardée comme nulle. Le prix du plomb est de 55 centimes les 100 kilogrammes, celui de l'argent pur est de 222f,22 le kilogramme.

D'après l'énoncé, 100 kilogrammes de minerai contiennent 23 kilogrammes de cuivre brut, desquels il faut soustraire 10 kilogrammes perdus dans les diverses opérations, et 0kilog.,003 d'argent; c'est-à-dire que les

100 kilogrammes de minerai contiennent $12^{\text{kilog.}},997$ de plomb et $0^{\text{kilog.}},003$ d'argent.

Représentons par x le poids total cherché : x kilogrammes de minerai contiennent $\frac{12,997\,x}{100}$ de plomb, à $0^{\text{f}},0055$ le kilogramme, et $\frac{0,003\,x}{100}$ d'argent à $222^{\text{f}},22$ le kilogramme; d'où

$$x\left\{\frac{12,997}{100}\,.\,0,0055+\frac{0,003}{100}\,.\,222,22\right\}=1795000 \text{ fr.};$$

$$x=\frac{1795000}{0,007381435}=243177648 \text{ kilogrammes.}$$

Sur ce poids de minerai traité, il y a :

$$\text{en plomb, } \frac{12,997\,.\,243177648}{100}=31605798^{\text{kilog.}},910;$$

$$\text{en argent, } \frac{0,003\,.\,243177648}{100}=7295^{\text{kilog.}},319.$$

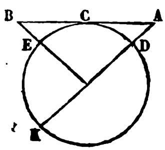
SESSION DE DÉCEMBRE 1854.

CXLI.

(Vendredi, 1er décembre 1854.)

1° Trouver la surface engendrée par la révolution d'une ligne brisée régulière, tournant autour d'un axe mené dans son plan et par son centre.

2° Deux observateurs, chacun à bord d'un navire, à 3 mètres au-dessus de l'eau, cessent de s'apercevoir à une distance de 12 600 mètres; conclure de cette observation une valeur approchée du rayon de la terre.



Les deux observateurs sont placés sur une tangente AB à la surface de la terre; la longueur de cette tangente est de 12 600 mètres; et chacune des longueurs AD, BE égale 3 mètres.

La tangente AC étant moyenne proportionnelle entre AK et AD, on a, en désignant par R le rayon de la terre, évalué en mètres :

$$(2R+3)\,3=(6\,300)^2;$$

d'où :

$$R=6\,615\,000^{m}, \qquad \text{environ.}$$

CXLII.

(Samedi, 2 décembre.)

1° **Des manomètres.**

2° **Un ballon peut renfermer 8,548 grammes d'air; on le remplit de protoxyde d'azote dont la densité est 1,52, celle de l'air étant prise pour unité. On demande quel sera le poids de ce gaz : 1° si la pression est la même dans les deux cas; 2° si la pression de l'air est 0,76 et celle du protoxyde d'azote 0,78. On suppose que la température ne varie pas.**

1° Sous le même volume et à la même pression, les poids de deux gaz sont proportionnels à leurs densités. On a donc, x étant le poids du protoxyde d'azote :

$$\frac{x}{8,548}=\frac{1,52}{1};$$

d'où

$$x = 8,548 \,.\, 1,52$$

$$= 12^{g},993.$$

2° A la même température, le poids d'une même masse de gaz varie proportionnellement à la pression. Par conséquent, le poids du protoxyde d'azote à la pression de $0^{m},78$, sera donné par la proportion :

$$\frac{y}{12,993}=\frac{0,78}{0,76}.$$

Donc

$$y=\frac{12,993 \times 39}{38}$$

$$= 13^{gr.},335.$$

CXLIII.

(Lundi, 4 décembre.)

1° Démontrer les propriétés fondamentales des logarithmes.

2° On donne une sphère dont le rayon est 13 mètres, sur laquelle on considère une zone à deux bases, dont l'une est à une distance du centre de la sphère égale à 1 mètre; la surface de cette zone est 100 mètres carrés. On demande la surface du cercle qui forme la seconde base de la zone.

(Problème donné le 1er avril 1854.)

CXLIV.

(Mardi, 5 décembre.)

1° Démontrer que deux cordes également éloignées du centre sont égales. Démontrer aussi que sur une même sphère, deux cercles dont les plans sont à égale distance du centre de la sphère sont égaux.

2° Une pyramide, dont la hauteur est $30^{m},45$, a pour base un carré de 5 mètres de côté. Calculer le volume.

La base de cette pyramide a 25 mètres carrés. Le volume est donc :

$$\frac{1}{3}25 \,.\, 30,45,$$

ou

$$253^{m.c},750.$$

CXLV.

(Mercredi, 6 décembre.)

1° De l'action des aimants sur les courants, et de l'action des courants sur les aimants.

2° Un vase métallique, du poids de 40 kilogrammes, renferme 32^{kg},50 d'eau à 11°,5; la chaleur spécifique du métal est 0,12, celle de l'eau étant l'unité. On met dans l'eau de ce vase 8^{kg},25 d'un autre métal à 60°,5; la température finale est 14°,6. On demande la chaleur spécifique du second métal.

En désignant par x la chaleur spécifique cherchée, c'est-à-dire la quantité de chaleur nécessaire pour faire varier de 1° la température d'un kilogramme du second métal, la chaleur perdue par les 8^{kg},25, passant de 60°,5 à 14°,6, sera :

$$8{,}25.x(60{,}5-14{,}6).$$

Cette quantité de chaleur est égale à la somme des quantités de chaleur gagnées par l'eau et par le vase métallique; c'est-à-dire égale à :

$$32{,}5.(14{,}6-11{,}5)+40.0{,}12.(14{,}6-11{,}5).$$

On a donc :

$$8{,}25.x.(60{,}5-14{,}6)=32{,}5.(14{,}6-11{,}5)+ 40.0{,}12.(14{,}6-11{,}5),$$

ou

$$8{,}25.x.45{,}9=37{,}3.3{,}1;$$

puis :

$$x=\frac{37{,}3.3{,}1}{8{,}25.45{,}9}$$
$$=0{,}305.$$

CXLVI.

(Jeudi, 7 décembre.)

1° Démontrer que les droites menées du sommet d'un triangle aux milieux des côtés opposés se coupent en un même point.

2° On donne la surface totale d'un prisme droit hexagonal régulier : la surface des deux bases, augmentée des surfaces latérales, est égale à 12 décimètres carrés ; la hauteur est de 1 décimètre. Le prisme est en aluminium dont la densité est 2,5. On demande de calculer le volume et le poids du prisme.

Désignons par x le côté de l'hexagone de base évalué en décimètres ; la surface de cette base sera représentée par :

$$6x.\frac{x}{4}\sqrt{3}.=\frac{3}{2}x^2\sqrt{3}.$$

Chacune des faces est un rectangle ayant pour dimensions x et 1, la surface totale du prisme sera donc représentée par :

$$3x^2\sqrt{3}+6x\,;$$

en sorte que nous aurons :

$$3x^2\sqrt{3}+6x=12, \tag{1}$$

ou $$x^2\sqrt{3}+2x-4=0,$$

ou encore $$3x^2+2\sqrt{3}.x-4\sqrt{3}=0. \tag{2}$$

La racine positive de cette équation a pour valeur :

$$x=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3+12\sqrt{3}}}{3}.$$

Le volume du prisme, égal à l'aire de la base, multipliée par la hauteur, aura pour expression :

$$V=\frac{3}{2}x^2\sqrt{3}.$$

D'après l'équation (1), cette valeur est la même chose que :

$$\begin{aligned}V&=6-3x\\&=6+\sqrt{3}-\sqrt{3+12\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Le calcul logarithmique donne ensuite :

$$\begin{aligned}\log 3&=0{,}4771212,\\ \frac{1}{2}&=0{,}2385606=\log 1{,}7321,\\ \log 12&=\underline{1{,}0791813,}\\ &1{,}3177419,\end{aligned}$$

Nomb. correspond. $=20{,}7846$.

$$\begin{aligned}\log 23{,}7846&=1{,}3762959,\\ \frac{1}{2}&=0{,}6881480=\log 4{,}8769,\\ V&=6+1{,}7321-4{,}8769=2{,}8552.\end{aligned}$$

Ainsi, le volume du prisme équivaut à 2,8552 décimètres cubes.

Le poids spécifique de l'aluminium étant supposé égal à 2,5; le poids du prisme sera :

$$P=2{,}8552\times 2{,}5=7{,}138 \text{ kilogrammes},$$

ou $$P=7138 \text{ grammes}.$$

CXLVII.

(Vendredi, 8 décembre.)

1° Décrire la machine pneumatique et indiquer la loi du décroissement de la pression intérieure, en supposant le récipient égal en capacité à chacun des corps de pompe.

2° La chaleur latente de la vapeur d'eau étant supposée égale à 536°, on demande à quelle température on élèvera 20 litres d'eau à 4°, en y conduisant 1 kilogramme de vapeur à 100° sous la pression $0^m,76$.

(Problème donné le 21 août 1854.)

CXLVIII.

(Samedi, 9 décembre.)

1° Décrire les électroscopes ordinaires. Indiquer la manière dont on les emploie.

2° A quelle température un litre d'air sec pèse-t-il 1 gramme sous la pression $0^m,77$, le coefficient de dilatation du gaz étant, 0,00366, et le poids d'un litre d'air sec, à la pression de 0,76, étant de $1^g,293$?

La relation entre les poids des gaz, leurs tensions et leurs températures, est :

$$\frac{P'}{P} = \frac{H'}{H} \cdot \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'}.$$

Dans cette formule, P représente le poids d'un gaz à la pression H et à la température $t°$, P' représente le poids de ce même gaz à la pression H′ et à la température t'°.

Dans l'exemple donné,

$$P = 1,293,\ H = 0,76,\ t = 0,$$
$$P' = 1 \quad ,\ H' = 0,78;$$

donc
$$\frac{1}{1,293} = \frac{0,77}{0,76} \cdot \frac{1}{1+0,00366t'};$$

ou
$$t' = \frac{\frac{77}{76} \cdot 1,293 - 1}{0,00366}.$$

$$\log \frac{77}{76} = 0,0056771$$
$$\log 1,293 = 0,1116986$$
$$\overline{\ 0,1172756}$$
$$\text{Nomb. corresp.} = 1,31001$$
$$\log 0,31001 = \bar{1},4913757$$
$$\log 0,00366 = \bar{3},5634811.$$
$$\overline{\log t' = 1,9278946.}$$
$$t' = 84^{\circ},7.$$

CXLIX.

(Lundi, 11 décembre.)

1° Décomposer le trinôme x^2-px+q en deux facteurs du premier degré. Relations entre les coefficients et les racines de

$$x^2-px+q=0.$$

2° Partager une somme $2a$ en deux parties dont le produit soit un maximum.

3° Sur une sphère de $1^m,8$ de rayon, on donne une zone ayant $0^m,20$ de hauteur. Trouver le rayon d'un cercle équivalent à la surface de cette zone.

La surface de la zone a pour expression $2\pi RH$, R étant le rayon de la sphère et H la hauteur de la zone.

Puisque cette surface doit être équivalente à celle d'un cerçle de rayon x, on aura

$$\pi x^2 = 2\pi RH = 2\pi \,.\, 1,8 \,.\, 0,20,$$

ou

$$x^2 = 0,72.$$

Extrayant la racine, on trouve

$$x = 0,8485.$$

CL.

(Mardi, 12 décembre.)

1° De l'assimilation d'un aimant à un solénoïde.

2° Les décimes que l'on fabrique actuellement pèsent 10 grammes, et sont composés d'un alliage de 0,95 de cuivre, 0,04 d'étain et 0,01 de zinc. La densité du cuivre est 8,85 ; celle du zinc 7,19 ; celle de l'étain 7,29. Combien faudrait-il de ces pièces pour fournir le métal nécessaire à la fabrication d'un boulet sphérique de 0,25 de diamètre à la température de 0°.

D'après l'énoncé, chaque décime renferme $9^g,5$ de cuivre, $0^g,4$ d'étain et $0^g,1$ de zinc. Les *volumes* de ces diverses parties sont, en centimètres cubes,

$$\frac{9{,}5}{8{,}85}, \quad \frac{0{,}4}{7{,}19}, \quad \frac{0{,}1}{7{,}29},$$

ou $\quad 1{,}07344, \quad 0{,}05563, \quad 0{,}01372.$

La somme de ces nombres donne, pour le volume de la pièce de dix centimes, $1^{c.c.},14279$.

Actuellement, le volume de la sphère donnée a pour expression $\frac{1}{6}\pi(25)^3$. Donc, n étant le nombre cherché :

$$n = \frac{\pi \,.\, (25)^3}{6 \,.\, 1{,}14279} = \frac{\pi \,.\, (25)^3}{6{,}85674}.$$

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0{,}4971499 + \\ 3 \log 15 &= 4{,}1938200 + \\ \log 6{,}85674 &= 0{,}8361177 - \\ \hline \log n &= 3{,}8548522 \\ n &= 7159. \end{aligned}$$

CLI.

(Mercredi, 13 décembre.)

1° Établir 1° les principales propriétés des progressions arithmétiques, et des progressions géométriques; 2° les formules qui donnent la somme de leurs termes; 3° la limite de cette somme, quand il s'agit d'une progression géométrique décroissante.

2° Un vase a sa paroi intérieure totalement composée de faces planes; ces faces sont disposées de telle sorte qu'une boule sphérique, ayant 0,3 de diamètre, pourrait les toucher toutes à la fois, tandis que le couvercle ou le plan horizontal du bord supérieur, serait tangent aussi à la même sphère; les aires de toutes les faces, y compris celle du couvercle, forment une surface totale de 42 décimètres carrés. On demande combien ce vase, rempli jusqu'au bord, contiendrait de litres d'eau.

En joignant chacun des sommets du polyèdre qui forme le vase, au centre de la sphère inscrite, on décompose ce polyèdre en pyramides; chacune de ces pyramides a pour volume la surface qui lui sert de base, multipliée par le tiers de sa hauteur, qui n'est autre que le rayon de la sphère.

Le volume total aura donc pour expression

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} 0{,}42 \,.\, 0{,}3 \\ &= 0{,}021. \end{aligned}$$

Le vase contiendrait donc 21 litres d'eau.

CLII.

(Jeudi, 14 décembre.)

1° Rappeler la série de théorèmes qui conduisent à la mesure du volume, 1° d'un prisme; 2° d'une pyramide; 3° d'un polyèdre convexe. Considérer le cas où l'on aurait un polyèdre dont les faces planes seraient tangentes à une même sphère. Donner l'expression la plus simple de son volume, et en déduire le volume de la sphère.

2° Une personne place dans une maison de banque 160 000 fr.; le taux de l'intérêt est 5 %. Au bout de 4 ans, elle vient demander le capital et les intérêts. Quelle somme doit-elle recevoir?

La formule à employer est

$$A = a(1 + r)^t,$$

ou

$$A = 160\,000\,(1{,}05)^4.$$

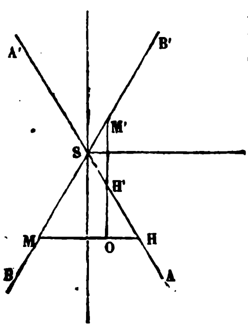
$$\begin{aligned} \log 160\,000 &= 5{,}2041199 \\ 4 \log 1{,}05 &= 0{,}0847572 \\ \hline &\ 5{,}2888771 \\ A &= 194\,481 \text{ francs.} \end{aligned}$$

CLIII.

(Vendredi, 15 décembre.)

1° Étant données deux droites indéfinies AA′, BB′ qui se coupent en un point S, on demande de mener par un point O une sécante qui retranche dans les deux droites, à partir du point S, deux segments égaux. Examiner dans quel cas on peut mener par le point O plus d'une droite satisfaisant à la question, et dans quel cas on n'en peut mener qu'une.

2° Quel est le diamètre d'un cylindre dont le volume est de 400 hectolitres et la hauteur de $0^m,8$?



Première question. On mènera la bissectrice de l'angle BSA, et du point O on abaissera, sur cette bissectrice, une perpendiculaire qui déterminera le triangle isocèle MSH, répondant à la question.

On peut de même mener la bissectrice de l'angle ASB′, et lui abaisser une perpendiculaire qui déterminera le triangle M′SH′, répondant également à la question.

Si le point O était situé sur l'une des deux bissectrices, le problème n'aurait qu'une seule solution.

Deuxième question. En appelant d le diamètre cherché, exprimé en mètres,

$$\frac{\pi d^2 \,.\, 0,8}{4} = 40. \quad (400 \text{ hectol.} = 40 \text{ mètres cubes}).$$

Donc $$d^2 = \frac{200}{\pi}.$$

$$\begin{aligned} \log 200 &= 2{,}3010300 \\ -\log \pi &= -0{,}4971499 \\ \hline \log d^2 &= 1{,}8038801 \\ \frac{1}{2} = \log d &= 0{,}9019400; \\ d &= 7^{m}{,}979. \end{aligned}$$

CLIV.

(Samedi, 16 décembre.)

1° Qu'est-ce que la déclinaison magnétique, et l'inclinaison? Qu'est-ce qu'un aimant naturel; qu'est-ce qu'un aimant artificiel?

2° 11 kilogrammes de glace ont été mêlés avec une certaine quantité d'eau à 45°. Le mélange a pris la température 12°. On demande cette quantité d'eau.

Les 11 kilogrammes de glace absorbent, pour se fondre, 11 . 79 unités de chaleur latente; ils absorbent de plus 11 . 12 unités de chaleur sensible. La quantité de chaleur gagnée par la glace est donc 11 (79 + 12).

Cette quantité de chaleur est égale à la quantité de chaleur perdue par l'eau, c'est-à-dire égale à x (45 — 12). On a donc

$$x(45-12) = 11(79+12);$$

d'où

$$x = \frac{11 \times 91}{33} = \frac{91}{3},$$

$$x = 30^{kg},333.$$

CLV.

(Lundi, 18 décembre.)

1° **Quelle est la marche de la lumière dans une lunette astronomique?**

2° **Un ballon vide pèse 152^{gr},475; plein d'air, il pèse 168^{gr},386, et plein d'un autre gaz, il pèse 157^{gr},235. On demande la densité de ce gaz rapportée à celle de l'eau prise pour unité, dans le cas où la pression reste invariable.**

On demande aussi quel genre de correction il faudrait faire si la pression avait été de 0^{m},77 pendant la pesée de l'air, et si elle tombait à 0^{m},74 pendant la pesée du gaz.

Le poids du gaz seul est :

$$157^{gr},235 - 152^{gr},475 = 4^{gr},760.$$

Le poids de l'air seul est :

$$168^{gr},386 - 152^{gr},475 = 15^{gr},911.$$

La densité du gaz, prise par rapport à l'air, serait

$$\frac{4,760}{15,911},$$

si les expériences avaient été faites à la pression 0^{m},76 et à la température 0°.

L'air pesant 770 fois moins que l'eau, la densité du gaz, rapportée à celle de l'eau prise pour unité, serait

$$D = \frac{4,760}{15,911 \cdot 770} = 0,000388.$$

Si la pression avait été de 0,77 pendant la pesée de l'air, et qu'elle fût tombée à 0,74 pendant la pesée du gaz, il faudrait ramener le poids d'un des corps à ce qu'il eût été à la pression 0,77.

Pour cela, on emploie la formule $\frac{P'}{P}=\frac{H'}{H}$, qui donne

$$P'=\frac{4,760\ .\ 0,77}{0,74}.$$

La densité est dans ce cas :

$$D'=\frac{\frac{4,760\ .\ 0,77}{0,74}}{15,911}, \text{ par rapport à l'air ;}$$

et

$$D''=\frac{\frac{4,760.0,77}{0,74}}{15,911.770}, \text{ par rapport à l'eau.}$$

$$D''=\frac{4,760.0,77}{15,911.770.0,74},$$

en sorte qu'il suffisait de multiplier la première densité D par le rapport $\frac{77}{74}$. On trouve

$$D''=0,000\,404.$$

CLVI.

(Mardi, 19 décembre.)

1° Démontrer que le volume d'une sphère est égal à la surface de cette sphère, multipliée par le tiers du rayon. Quelle est la formule qui exprime le volume, quand on représente le diamètre par D?

2° On propose de réduire en une seule fraction, l'expression suivante :

$$x=\frac{15+\sqrt{10}}{15-\sqrt{10}}+\frac{30-\sqrt{10}}{15+\sqrt{10}}$$

et de calculer ensuite x à un centième près.

En multipliant les deux termes de la première fraction par $15+\sqrt{10}$, et les deux termes de la seconde par $15-\sqrt{10}$, on obtient :

$$x=\frac{(15+\sqrt{10})^2+(30-\sqrt{10})(15-\sqrt{10})}{15^2-10}$$

$$=\frac{225+10+30\sqrt{10}+450+10-45\sqrt{10}}{215};$$

$$x=\frac{139-3\sqrt{10}}{43}.$$

Pour avoir, à moins de 0,01, la valeur de cette expression, il est plus que suffisant d'évaluer

$$3\sqrt{10}=\sqrt{90}, \text{ à moins de } 0{,}1.$$

On trouve ainsi $\sqrt{90}=9,5,$

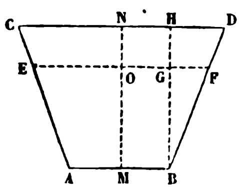
$$x=3{,}01.$$

CLVII.

(Mercredi, 20 décembre.)

1° De la presse hydraulique.

2° Un creuset ayant la forme d'un tronc de cône dont le fond a 0m,04 de diamètre, le bord supérieur 0m,07 de diamètre et la hauteur 0m,10, contient un métal en fusion, dont la surface supérieure a 0m,06 de diamètre. On veut couler ce métal dans un moule sphérique. Quel devrait être le rayon du moule, pour que le métal le remplit exactement?



Soient ABCD, ABEF les sections méridiennes du creuset et de la masse métallique. Menons BH perpendiculaire à CD. Nous aurons à cause de la similitude des triangles BGF, BHD

$$\frac{BG}{BH}=\frac{GF}{HD};$$

d'où, en prenant le centimètre pour unité,

$$BG=10\,\frac{1}{1,5}=\frac{20}{3}.$$

Le volume du métal est donc, par la formule connue,

$$V=\frac{1}{3}\pi.\frac{20}{3}.\left(3^2+2^2+3.2\right),$$

$$=\frac{1}{3}\pi.\frac{20}{3}.\,19.$$

Désignons par x le rayon du moule sphérique qui serait exactement rempli par le métal; nous aurons :

$$\frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{1}{3}\pi . \frac{20}{3} . 19 ;$$

d'où :

$$x^3 = \frac{95}{3}.$$

$$\begin{array}{rl} \log 95 = & 1,9777236 \\ -\log 3 \ = & -0,4771212 \\ \hline \log x^3 = & 1,5006024 \\ \frac{1}{3} = \log x = & 0,5002008 \\ x = & 3,1638. \end{array}$$

CLVIII.

(Jeudi, 21 décembre.)

1° Réduire une fraction ordinaire en fraction décimale. Considérer les divers cas qui peuvent se présenter. Donner les règles à suivre pour revenir d'une fraction décimale périodique à la fraction ordinaire génératrice.

2° Le diamètre d'une sphère est de $0^m,6$. On demande quel diamètre il faudrait donner à la base d'un cône dont la hauteur est de $0^m,3$ pour que le volume de ce cône fût équivalent à celui de la sphère.

Le décimètre étant pris pour unité, le volume de la sphère sera :

$$\frac{\pi.6^3}{6}, \text{ ou } 36\pi.$$

Le volume du cône est :

$$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2.3 \text{ ou } \frac{1}{4}\pi x^2,$$

x étant le diamètre de la base.

Par conséquent :

$$\frac{1}{4}\pi x^2 = 36\pi,$$
$$x^2 = 144,$$
$$x = 12 \text{ décimètres.}$$

CLIX.

(Vendredi, 22 décembre.)

1° En quoi consiste la galvanoplastie réduite aux faits les plus simples ?

2° Combien faut-il de kilogrammes de glace à 0° pour liquéfier et ramener, à 0°, 25 kilogrammes de vapeur à 100°, la pression étant de $0^m,76$?

Les 25 kilogrammes de vapeur d'eau contiennent chacun 540 unités de chaleur latente, et 100 unités de chaleur sensible; comme ils doivent être liquéfiés et ramenés à 0°, la chaleur qu'ils vont perdre sera :

$$25 \cdot 640.$$

Chaque kilogramme de glace absorbant, pour se fondre, 79,25 unités de chaleur, x kilogrammes de glace absorberont :

$$x \cdot 79{,}25.$$

Donc :

$$x \cdot 79{,}25 = 25 \cdot 640,$$
$$x = \frac{25 \cdot 640}{79{,}25},$$
$$x = 201^{k.g},892.$$

CLX.

(Samedi, 23 décembre.)

1° Quelle est la construction et l'action des paratonnerres? Y a-t-il plusieurs sortes de paratonnerres? Peut-on être foudroyé, quoique placé à une grande distance du lieu où tombe la foudre?

2° L'une des branches d'un siphon est remplie de mercure jusqu'à une hauteur de $0^m,175$; l'autre est remplie d'un liquide jusqu'à $1^m,42$. Ces deux colonnes se font équilibre. On demande la densité du liquide, par rapport au mercure et à l'eau.

1° Les hauteurs des deux colonnes liquides sont inversement proportionnelles aux densités. Par conséquent, le poids spécifique du liquide, par rapport au mercure, sera :

$$x=\frac{0,175}{1,42}=0,123.$$

2° La densité x' de ce liquide par rapport à l'eau s'obtiendra en multipliant la densité 0,123 par 13,6, poids spécifique du mercure :

$$x'=0,123 \;.\; 13,6$$
$$=1,673.$$

CLXI.

(Mardi, 26 décembre.)

1° Démontrer la marche de la lumière dans la chambre noire.

2° Un ballon pèse vide $263^{gr},528$; plein d'eau à la température de 4° et à la pression de $0^m,76$, il pèse $375^{gr},826$. Quelle est la capacité du vase? Ce même ballon plein de gaz à 4° pèse $293^{gr},687$, la pression étant $0^m,81$. Quel est le poids d'un litre de ce gaz?

1° Le poids de l'air contenu dans le ballon est

$$375^{gr},826 - 263^{gr},528 = 112^{gr},298.$$

Le quotient de ce nombre par le poids d'un litre d'air à 4° indiquera la capacité du ballon.

Or, 1 litre d'air, à 0° et sous la pression de $0^m,76$, pesant $1^{gr},3$, son poids à 4° sera donné par la formule :

$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{1+\alpha t};$$

$$P' = \frac{1,3}{1+0,00366 \,.\, 4} = \frac{1,3}{1,01464}.$$

La capacité du ballon sera donc

$$\frac{112,298 \,.\, 1,01464}{1,3} = 87^l,640.$$

2° Pour répondre à la seconde partie du problème, ramenons le poids du gaz, $293^{gr},687 - 263^{gr},528$ ou $30^{gr},159$, pris à la pression $0^m,81$, à ce qu'il serait à $0^m,76$.

Les poids des gaz sont proportionnels aux pressions qu'ils supportent. Donc

$$\frac{x}{30,159}=\frac{0,76}{0,81}$$

$$x=\frac{30,159\ .\ 76}{81}=28^{gr},297.$$

Puisque $87^{l},640$ de ce gaz pèsent $28^{gr},297$, 1 litre pèse

$$\frac{28,297}{87,640}=0^{gr},323.$$

CLXII.

(Mercredi, 27 décembre.)

1° Exposer dans son ensemble la théorie de la mesure des polyèdres.

2° Le côté d'un cône est de $28^m,5$; la surface de sa base est de 6 mètres carrés ; on demande de calculer la surface du cercle dont le plan est distant de $2^m,75$ du plan de la base.

Soient généralement B la base du cône, H sa hauteur, C son côté ; soit b l'aire de la section menée à la distance d de la base ; nous aurons

$$\frac{b}{B}=\frac{(H-d)^2}{H^2},$$

ou

$$b=B\frac{(H-d)^2}{H^2}. \qquad (1)$$

Pour déterminer la hauteur H, remarquons que cette droite est le second côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est C, et dont le premier côté est le rayon R de la base B. Par conséquent,

$$H=\sqrt{C^2-R^2}, \quad \text{ou} \quad H=\sqrt{C^2-\frac{B}{\pi}}. \qquad (2)$$

Dans l'exemple proposé, $C=28,5$, $B=6$, $d=2,75$. Donc, en appliquant les logarithmes, on aura, successivement,

$$\begin{aligned} \log B &= 0,7781512 \\ \log \pi &= \underline{0,4971499} \; - \\ \log\frac{B}{\pi} = \log R^2 &= 0,2810013 \\ \frac{B}{\pi} &= 1,90986. \end{aligned}$$

$$C^2 - \frac{B}{\pi} = 812,25 - 1,90986 = 810,34014 = H^2.$$

$$\log H^2 = 2,9086674.$$

$$\frac{1}{2} = \log H = 1,4543337.$$

$$H = 28,4665,$$
$$H - d = 25,7165.$$

$$\begin{aligned} \log 6 &= 0,7781512 + \\ \log (H - d)^2 &= 2,8204136 + \\ \log H^2 &= 2\ 9086674 - \\ \hline \log b &= 0,6898974 \\ b &= 4^{\text{m c.}},8966. \end{aligned}$$

CLXIII.

(Jeudi, 28 décembre.)

1° Donner et expliquer la construction et les usages du multiplicateur.

2° Un manomètre est divisé en 110 parties d'égale capacité. Quand la pression extérieure est $0^m,76$, le mercure, dans l'intérieur de l'éprouvette et dans le bain, se tient au zéro de l'échelle. On porte le manomètre dans une machine où l'on comprime l'air, et on voit le mercure s'élever jusqu'à la 80^{me} division; puis on mesure la hauteur du mercure dans le tube, et on la trouve de $0^m,45$. On demande la pression dans la machine.

Soit x la tension de l'air dans le manomètre lorsqu'il est porté sous la machine; la pression de cet air sera donnée, d'après la loi de Mariotte, par la proportion

$$\frac{x}{0,76} = \frac{110}{80}.$$

Donc $$x = 1^m,045.$$

Il faut ajouter à cette tension la hauteur du mercure $0^m,45$, et l'on a, pour tension finale,

$$\begin{aligned} y &= 1^m,045 + 0^m,45 \\ &= 1^m,495. \end{aligned}$$

CLXIV.

(Vendredi, 29 décembre.)

1° Théorie des vases communiquants.

2° La dilatation du fer, par chaque degré d'augmentation de température, est de 0,000 012 2 de la longueur mesurée à 0°. Quelle sera, à la température de 60°, la surface d'un disque circulaire de tôle, qui, à la température de 0°, avait $2^m,75$ de diamètre?

Le diamètre du cercle aura, à 60°, une longueur déterminée par la formule $l' = l\,(1 + kt)$; donc

$$l' = 2{,}75\,(1 + 0{,}000\,012\,2\ .\ 60) = 2{,}75\ .\ 1{,}000\,732.$$

La surface du disque sera

$$x = \frac{1}{4}\pi l'^2.$$

$$\begin{aligned}
\log 2{,}75 &= 0{,}4393327 \\
\log 1{,}000732 &= 0{,}0003178 \\
\hline
\log l' &= 0{,}4396505 \\
\log l'^2 = 2 \log l' &= 0{,}8793010 + \\
\log \pi &= 0{,}4971499 + \\
\log 4 &= 0{,}6020600 - \\
\hline
\log x &= 0{,}7743909 \\
x &= 5^{mc},9483.
\end{aligned}$$

CLXV.

(Mercredi, 3 janvier 1855.)

1° Démontrer que la surface convexe d'un cône tronqué est égale à la demi-somme des circonférences des bases, multipliée par le côté.

2° On propose de résoudre l'équation suivante :

$$\frac{x-a}{b}-1=\frac{b+x}{x}$$

3° Un cylindre en fer a $2^m,55$ de long, et pèse 41 kilogrammes. Quel est le diamètre de la section perpendiculaire à l'axe du cylindre? On supposera la densité du fer égale à 7,788.

Soit d le diamètre du cylindre; son volume, exprimé en décimètres cubes, sera :

$$\frac{1}{4}\pi d^2 \,.\, 25,5;$$

et son poids, en kilogrammes,

$$\frac{1}{4}\pi \,.\, d^2 \,.\, 25,5 \,.\, 7,788.$$

On a donc

$$\frac{1}{4}\pi d^2 \,.\, 25,5 \,.\, 7,788 = 41;$$

d'où

$$d^2 = \frac{41}{\pi \,.\, 25,5 \,.\, 1,947}$$

$$\begin{aligned}
\log 41 &= 1,6127838\\
-\log \pi &= -0,4971499\\
-\log 25,5 &= -1,4065401\\
-\log 1,947 &= -0,2893660\\
\hline
2\log d &= \bar{1},4197278\\
\log d &= \bar{1},7098639\\
d &= 0,5127 \text{ décimètres}\\
&= 51^{mm},27.
\end{aligned}$$

CLXVI.

(Jeudi, 4 janvier.)

1° Conductibilité des corps solides, liquides et gazeux pour la chaleur.

2° Convertir en degrés du thermomètre centigrade 87° du thermomètre de Farenheit.

3° Un vase cylindrique à fond plat contient 1 décalitre; le diamètre de sa base est égal au tiers de la hauteur. Quelle est cette hauteur ?

Si nous prenons pour unité le décimètre, et si nous désignons par d le diamètre du vase, nous aurons, pour expression de son volume,

$$\frac{\pi d^2 . 3d}{4} = 10.$$

$$d^3 = \frac{40}{3\pi}.$$

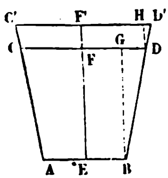
$$\begin{aligned}
\log 40 &= 1,6020599 \\
-\log 3 &= -0,4771212 \\
-\log \pi &= -0,4971499 \\
\hline
3 \log d &= 0,6277888 \\
\log d &= 0,2092629 \\
d &= 1,619 \\
&= 0^{m},1619.
\end{aligned}$$

CLXVII.

(Vendredi, 5 janvier.)

1° Dilatation des corps par la chaleur.

2° Un réservoir a la forme d'un tronc de cône dont la base inférieure a 1^m de diamètre; la surface supérieure de l'eau contenue dans ce réservoir a $1^m,6$ de diamètre; la hauteur est $1^m,5$. On y laisse tomber un bloc cubique de marbre dont le côté est $0^m,4$. A quelle hauteur le niveau de l'eau s'élèvera-t-il, le bloc étant totalement immergé ?



Pour simplifier le calcul, représentons par a et b les rayons AE, CF des bases du tronc de cône ABCD, par h la hauteur de ce tronc, et par c le côté du cube donné. Quand on laisse tomber le bloc cubique dans le réservoir, le niveau de l'eau, qui était primitivement en CD, vient en C'D'. On a donc, en représentant FF' par x, et C'F' par y :

$$c^3 = \frac{1}{3}\pi x\,(b^2 + y^2 + by),$$

ou

$$c^3 = \frac{1}{3}\pi x\,\frac{y^3 - b^3}{y - b}. \qquad (1)$$

D'ailleurs, les deux triangles rectangles BGD, DHD' donnent

$$\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{BG}} = \frac{\mathrm{HD'}}{\mathrm{GD}},$$

ou

$$\frac{x}{h} = \frac{y - b}{b - a}. \qquad (2)$$

Multipliant membre à membre les équations (1) et (2), on obtient

$$\frac{c^3}{h} = \frac{1}{3}\pi\frac{y^3 - b^3}{b - a};$$

d'où

$$y^3 = b^3 + 3\frac{c^3(b-a)}{\pi h}. \qquad (3)$$

Dans l'exemple proposé,

$$a = 5, \quad b = 8, \quad h = 15, \quad c = 4;$$

donc

$$y^3 = 512 + \frac{3 \cdot 64 \cdot 3}{\pi \cdot 15} = 512 + \frac{38,4}{\pi}.$$

Le calcul logarithmique donne ensuite :

$$\begin{aligned}
\log 38,4 &= 1,5843312 + \\
\log \pi &= 0,4971499 - \\
\hline
\log \frac{38,4}{\pi} &= 1,0871813 \\
\frac{38,4}{\pi} &= 12,2231. \\
y^3 &= 524,2231 \\
\log y^3 &= 2,7195162 \\
\frac{1}{3} = \log y &= 0,9065054. \\
y &= 8,0632.
\end{aligned}$$

Enfin, on déduit de l'équation (1) :

$$x = \frac{15 \cdot 0,0632}{3} = 0,316 = 31,6 \text{ millimètres.}$$

CLXVIII.

(Samedi, 6 janvier.)

1° De la transmission des pressions des liquides. Presse hydraulique.

2° Combien faut-il de vapeur d'eau, à 100°, pour porter, de 8° à 25° la température de l'eau contenue dans une cuve cylindrique à fond plat, de $1^m,25$ de rayon, et formant une couche de $0^m,75$ d'épaisseur.

Le volume de l'eau contenue dans la cuve est, en prenant le décimètre pour unité,

$$\pi\,(12,5)^2.\ 7,5.$$

Ce volume, porté de 8° à 25°, gagnera une quantité de chaleur représentée par

$$\pi\,.\,(12,5)^2.\ 7,5\,(25-8).$$

Soit x le nombre de kilogrammes de vapeur d'eau nécessaire pour élever la température de l'eau, de 8° à 25°; ces x kilogrammes perdent chacun 540 unités de chaleur latente et 75 unités de chaleur sensible, puisqu'ils descendent de 100° à 25°.

En égalant les quantités de chaleur perdues et gagnées, on a

$$x\,(540+75)=\pi\,.\,(12,5)^2.\ 7,5\,(25-8),$$

ou $$x=\frac{\pi\,.\,(12,5)^2.\ 7,5\ .\ 17}{615}.$$

$$
\begin{aligned}
\log \pi &= 0,4971499 \\
2 \log 12,5 &= 2,1939200 \\
\log 7,5 &= 0,8750612 \\
\log 17 &= 1,2304489 \\
-\log 615 &= -2,7888751 \\
\hline
\log x &= 2,0076949
\end{aligned}
$$

$$x = 101^{\text{kilog.}},79.$$

CLXIX.

(Lundi, 8 janvier.)

1° Des courants d'induction.

2° Un verre à pied, de forme conique, contient un litre. Il a $0^m,25$ de diamètre à son bord supérieur, et il est rempli par de l'eau et du mercure. Les poids de ces deux liquides sont égaux, et la densité du mercure est 13,598. On demande quelle est l'épaisseur de la couche formée par l'eau.

Le volume du verre est, en prenant le décimètre pour unité,

$$\frac{1}{12} \pi \,.\, (2,5)^2 \, H = 1 ;$$

d'où

$$H = \frac{12}{\pi \,.\, (2,5)^2} = \frac{1,92}{\pi}.$$

Soient x le volume du mercure, y celui de l'eau ; on a :

$$x + y = 1,$$
$$x \,.\, 13,598 = y ;$$

d'où

$$x=\frac{1}{14{,}598}.$$

Les volumes de deux cônes semblables sont entre eux comme les cubes des hauteurs. Si donc nous désignons par h la hauteur du mercure, nous aurons :

$$\frac{h^3}{H^3}=\frac{\frac{1}{14{,}598}}{1};$$

$$h=\frac{H}{\sqrt[3]{14{,}598}}.$$

$$\begin{aligned}
\log 1{,}92 &= 0{,}2833012\\
\log \pi &= 0{,}4971499\\
\hline
\log H &= \bar{1}{,}7861513 +\\
H &= 0{,}61116.\\
\log 14{,}598 &= 1{,}1642934\\
\frac{1}{3} &= 0{,}3880978 -\\
\hline
\log h &= \bar{1}{,}3980535\\
h &= 0{,}25006.
\end{aligned}$$

La hauteur de la couche formée par l'eau est donc

$$0{,}61116-0{,}25006,$$

ou

$$0{,}3611 \text{ décimètres.}$$

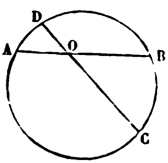
SESSION D'AVRIL 1855.

CLXX.

(Lundi, 2 avril 1855.)

1° Réduction d'une fraction ordinaire en fraction décimale.

2° Deux cordes d'un cercle, AB et CD, se coupent en un point O; les deux parties OA, OB de la première corde sont égales, respectivement, à $1^m,2$ et $2^m,1$. La différence entre les parties OC, OD de la seconde corde est $1^m,84$. On demande quelle est la longueur de cette corde.



Soient $OC = x$, $OD = y$. On aura

$$x - y = 1,84. \qquad (1)$$

De plus,

$$xy = OA \,.\, OB = 1,2 \,.\, 2,1;$$

ou

$$xy = 2,52. \qquad (2)$$

Tirant de l'équation (1) la valeur de x,

$$x = 1,84 + y,$$

et la substituant dans l'équation (2), on obtient

$$y^2 + 1,84y - 2,52 = 0;$$

d'où

$$y = -0,92 \pm \sqrt{(0,92)^2 + 2,52},$$
$$y = -0,92 \pm 1,834.$$

La valeur négative étant inadmissible,

$$y = 0^m,914, \quad \text{et} \quad x = 2^m,754.$$

CLXXI.

(Mardi, 3 avril.)

1° **Exposer les différentes méthodes usitées pour déterminer la densité des liquides.**

2° **On demande combien il faudrait de kilogrammes d'eau à 45° pour fondre, sans changement de température, 8 kilogrammes de glace à 0°.**

Soit x le nombre de kilogrammes d'eau nécessaire; la quantité de chaleur qu'ils contiennent est représentée par $45x$. Cette chaleur doit être employée à faire fondre les 8 kilogrammes de glace. Or, un kilogramme de glace absorbe, pour se fondre, 79 unités de chaleur. Donc les 8 kilogrammes absorberont 79.8 unités de chaleur.

On a donc

$$45x = 79 \;.\; 8\,;$$

Donc $$x = \frac{632}{45} = 14^{kg},044.$$

CLXXII.

(Lundi, 9 avril.)

1° Démontrer que par un point pris dans un plan on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire à ce plan.

2° On propose de calculer, au moyen des logarithmes, l'inconnue x donnée par la formule suivante :

$$x = \frac{31,071 \;.\; 21,372 \;.\; 7,259}{0,515 \;.\; 0,319 \;.\; 0,021}.$$

3° Un cône droit, dont la hauteur est de 20 mètres, a pour volume 387 mètres cubes. A quelle distance du sommet faut-il mener un plan parallèle à la base pour enlever un cône dont le volume soit de 95 mètres cubes?

Deuxième question.

$$\begin{aligned}
\log 31,071 &= 1,4923552 + \\
\log 21,372 &= 1,3298452 + \\
\log 7,259 &= 0,8608768 + \\
\log 0,515 &= \bar{1},7118072 - \\
\log 0,319 &= \bar{1},5037906 - \\
\log 0,021 &= \bar{2},3222192 - \\
\hline
\log x &= 6,1452602.
\end{aligned}$$

$$x = 1\,397\,205.$$

Troisième question. Les volumes des deux cônes sont comme les cubes des hauteurs. Désignant par x la distance cherchée, on a donc

$$\frac{x^3}{20^3} = \frac{95}{387},$$

$$x = 20\sqrt[3]{\frac{95}{387}}.$$

$$
\begin{array}{rl}
\log\ 95 = & 1{,}9777236 + \\
\log 387 = & \underline{2{,}5877110} - \\
 & \bar{1}{,}3900126 \\
\frac{1}{3} = & \bar{1}{,}7966709 + \\
\log\ 20 = & \underline{1{,}3010300} + \\
\log x = & 1{,}0977009.
\end{array}
$$

$$x = 12^{m}{,}523.$$

CLXXIII.

(Mardi, 10 avril.)

1° Expliquer la différence des effets produits par deux lentilles d'un même rayon, l'un biconvexe, l'autre biconcave.

2° Un fragment de métal pèse dans l'air $7^{gr},234$, dans l'eau $4^{gr},523$; dans un second liquide $5^{gr},417$. On demande 1° la densité du métal; 2° la densité du second liquide par rapport à l'eau.

Le poids du métal dans l'air est 7,234.
La perte de poids dans l'eau est $7,234-4,523=2,711$.
Le poids spécifique du métal est donc :

$$D=\frac{7,234}{2,711}=2,66.$$

Le métal perd dans le second liquide

$$7,234-5,417=1,817.$$

Or, le poids spécifique d'un liquide est le rapport entre les poids de deux volumes égaux de ce liquide et d'eau, c'est-à-dire le rapport entre les pertes de poids éprouvées par un même corps dans les deux cas.

Donc $$D'=\frac{1,817}{2,711}=0,67.$$

CLXXIV.

(Mercredi, 11 avril.)

1° Donner la construction des bouteilles de Leyde et de l'électroscope condensateur. — Manière dont ces instruments se chargent.

2° Sachant : 1° qu'un litre d'air, à 0° et sous la pression $0^m,76$, pèse $1^{gr},293$; 2° que la densité de la vapeur d'eau est de $\frac{5}{8}$; 3° que l'état hygrométrique de l'air est $\frac{3}{4}$; 4° que la tension maximum de la vapeur d'eau à 30° est $0^m,0345$; on demande le poids d'un mètre cube d'air à 30° sous la pression $0^m,77$.

Si l'état hygrométrique de l'air est $\frac{3}{4}$, c'est que la tension de la vapeur contenue dans cet air est les $\frac{3}{4}$ de la tension maximum, c'est-à-dire $0^m,023625$.

Pour avoir le poids du mètre cube d'air humide à 30°, il suffit de chercher le poids du même volume d'air sec à la pression $0^m,77 - 0^m,0236$ *; puis d'y ajouter le poids de ce même volume de vapeur à la pression $0^m,0236$.

Le poids de l'air sec, à 30°, sous la pression

$$0,77 - 0,0236 = 0,7464, \text{ sera}$$

$$P' = \frac{1293 \ . \ 0,7464}{0,76} \ . \ \frac{1}{1 + 0,00366 \ . \ 30},$$

$$= \frac{1293 \ . \ 0,7464}{0,76 \ . \ 1,1098}.$$

* En négligeant les deux dernières décimales.

Le poids du volume de vapeur, à 30° et sous la pression 0,0236, sera :

$$P'' = \frac{5 \;.\; 1293 \;.\; 0{,}0236}{8 \;.\; 0{,}76 \;.\; 1{,}1098}.$$

Donc le poids cherché est

$$P = \frac{1293}{0{,}76 \;.\; 1{,}1098}\left[0{,}7464 + \frac{5}{8} \;.\; 0{,}0236\right]$$
$$= \frac{1293 \;.\; 0{,}7611}{0{,}76 \;.\; 1{,}1098};$$
$$= 1167 \text{ grammes.}$$

CLXXV.

(Vendredi, 13 avril.)

1° Démontrer les formules qui donnent le sinus et le cosinus de la somme et de la différence de deux arcs en fonction des sinus et cosinus de ces arcs.

2° Trouver la hauteur d'une pyramide régulière à base carrée, sachant que la surface de la base est égale à $6^{m},6783$, et que la longueur de chacune des arêtes est de $3^{m},89$.

La hauteur h de la pyramide est un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est l'arête, et dont l'autre côté est la demi-diagonale de la base.

Donc
$$h^2 = (3,89)^2 - \frac{d^2}{4}.$$
$$= (3,89)^2 - \frac{2 \,.\, 6,6783}{4};$$
$$h = \sqrt{(3,89)^2 - 3,33915}$$
$$\log 3,89 = 0,5899496$$
$$2 \log 3,89 = 1,1798992$$
$$\text{Nomb. corresp.} = 15,1321$$
$$15,1321 - 3,33915 = 11,79295$$
$$\log 11,79295 = 1,0716225$$
$$\frac{1}{2} \qquad = 0,5358112.$$
$$h = 3^{m},4341.$$

CLXXVI.

(Samedi, 14 avril.)

1° Retrouver la formule qui permet de calculer par logarithmes la surface d'un triangle dont on connaît les trois côtés.

2° La hauteur d'un tronc de cône est h; les deux bases sont $0^{m.c},22$ et $0^{m.c},4$. On demande quel diamètre il faut donner à un cylindre de même hauteur, pour qu'il soit équivalent à ce tronc de cône.

Le volume du tronc de cône, en prenant pour unité le centimètre, est

$$\frac{1}{3}h\,(40+22+\sqrt{40\;.\;22})=\frac{1}{3}h\,(62+\sqrt{880}).$$

Le volume du cylindre de même hauteur, dont le diamètre serait d, est

$$\frac{1}{4}\pi\,d^2h.$$

On a donc l'équation :

$$\frac{\pi d^2h}{4}=\frac{1}{3}h\,(62+\sqrt{880});$$

d'où

$$d^2=\frac{4\,(62+\sqrt{880})}{3\pi},$$

$$d=2\sqrt{\frac{62+\sqrt{880}}{3\pi}}.$$

$$\log 880=2{,}9444827$$

$$\frac{1}{2}\quad=1{,}4722413$$

$$\text{Nomb. corresp.}=29{,}6649=\sqrt{880}.$$

$$\begin{aligned}
\log 91{,}6649 &= 1{,}9622030 + \\
\log 3 &= 0{,}4771212 - \\
\log \pi &= 0{,}4971499 - \\
\hline
& \ 0{,}9879319 \\
\frac{1}{2} &= 0{,}4939660. \\
\text{Nomb. corresp.} &= 3{,}11865. \\
d &= 6{,}2373 \text{ centimètres.}
\end{aligned}$$

CLXXVII.

(Lundi, 16 avril.)

1° Division des polynomes.

2° La hauteur d'un trapèze est 15 mètres; la surface de ce trapèze est égale à celle du rectangle qui serait construit sur ses deux bases parallèles; de plus le double de la plus petite base ajouté au triple de la plus grande, est égal à quatre fois la hauteur du trapèze. On demande les valeurs des deux bases.

(Problème donné le 5 avril 1854.)

CLXXVIII.

(Mardi, 17 avril.)

1° Des pressions exercées par les liquides sur les parois des vases qui les contiennent.

2° Un ballon vide pèse $247^{gr},862$; plein d'air, il pèse $263^{gr},759$ et plein d'un autre gaz $267^{gr},078$. On demande la densité du gaz rapportée à celle de l'air prise pour unité (on suppose que la pression est restée invariable).

On demande aussi quelle correction il faudrait faire, si la pression avait été de $0^m,76$ pendant la pesée de l'air, et de $0^m,74$ pendant la pesée du gaz.

Le poids du gaz est $267,078 - 247,862 = 19,216$;
le poids de l'air est $263,759 - 247,862 = 15,897$.

La densité du gaz, rapportée à celle de l'air prise pour unité, est donc :

$$D = \frac{19,216}{15,897} = 1,08.$$

Si la pression avait été de $0^m,76$ pendant la pesée de l'air, et de $0^m,74$ pendant la pesée du gaz, il faudrait ramener le poids du gaz à ce qu'il serait à la pression $0^m,76$. Or les poids sont proportionnels aux pressions; donc :

$$\frac{x}{19,216} = \frac{76}{74}$$

$$x = \frac{19,216 \, . \, 76}{74};$$

et la densité nouvelle

$$D' = \frac{19,216}{15,897} \cdot \frac{76}{74} = 1,11.$$

CLXXIX.

(Mercredi, 18 avril.)

1° Décrire l'hygromètre à cheveu ; faire connaître la manière dont on le gradue, et celle dont on l'emploie.

2° Dans un récipient de 3 litres, on fait entrer : 1° 2 litres d'hydrogène soumis primitivement à la pression de 3 atmosphères ; 2° 4 litres d'acide carbonique à la pression de 5 atmosphères ; 3° 3 litres d'azote à la pression d'une demi-atmosphère. — On demande quelle sera la pression finale du mélange, la température restant constante pendant l'expérience.

La tension d'un mélange de gaz est égale à la somme des tensions de ces gaz.

D'un autre côté, d'après la loi de Mariotte, les pressions des trois gaz mélangés seront, respectivement :

$$3 \cdot \frac{2}{3} \text{ atm.}, \quad 5 \cdot \frac{4}{3} \text{ atm.}, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3} \text{ atm.}$$

La pression finale sera donc

$$3 \cdot \frac{2}{3} + 5 \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3} = 2 + 6\frac{2}{3} + \frac{1}{2},$$

ou $$9\frac{1}{6} \text{ atmosphères.}$$

CLXXX.

(Jeudi, 19 avril.)

1° On sait que 11° 27′ 35″ d'un premier cercle valent 32° 21′ 22″ d'un second cercle. On demande combien il faudra de degrés du premier cercle pour faire 1782° du second.

2° On propose d'effectuer la division indiquée par l'expression suivante :

$$x = \frac{a^3b^3 + 6a^2b^4 + 8a^5b - 14a^4b^2 - a^6}{a^3 + 2ab^2 - 3a^2b}.$$

3° On donne un cercle dont le rayon est 10 mètres, et l'on y inscrit un triangle équilatéral. On demande le volume de la pyramide qui aurait ce triangle pour base et une hauteur h égale à 12 mètres.

Nota. — L'approximation doit être faite *sauf erreur* de 1 centimètre cube.

Première question. 32° 21′ 22″ ou 116482″ du petit cercle valant 11° 27′ 35″ ou 40655″ du grand cercle,

1° du petit vaut $\left(\frac{40655}{116482}\right)^\circ$ du grand,

1782° — — valent $\left(\frac{40655 \times 1782}{116482}\right)^\circ$ — —

ou 621° 57′ 47″.

Deuxième question. Nous renvoyons pour cette division à tous les traités d'algèbre.

Troisième question. Le côté du triangle équilatéral inscrit est R $\sqrt{3}$, et son apothème, $\frac{R}{2}$. L'aire de ce triangle est donc $\frac{3}{4} R^2 \sqrt{3} = 75 \sqrt{3}$.

Par suite, la pyramide a pour expression de son volume

$$V = \frac{1}{3} 75 . 12 \sqrt{3} = 300 \sqrt{3} ;$$

ou
$$V = \sqrt{270000} = 519^{m.c}{,}615242.$$

CLXXXI.

(Vendredi, 20 avril.)

1° Des manomètres.

2° On donne un cylindre dont le rayon est $0^m,25$. On y verse 30 kilogrammes de mercure dont la densité est 13,6, et 6 kilogrammes d'alcool dont la densité est 0,79. A quelle hauteur s'élèveront les deux liquides?

3° Un thermomètre Farenheit et un thermomètre centigrade marquent tous les deux 72°. Quelle est la différence des températures?

Deuxième question. 1° Le volume du mercure est, en décimètres cubes $\frac{30}{13,6}$; celui de l'alcool est $\frac{6}{0,79}$; le volume total des deux liquides est d'ailleurs exprimé par celui d'un cylindre de $2^{déc.},5$ de diamètre, et d'une hauteur x. Donc

$$\pi \,.\, (2,5)^2 .\, x = \frac{30}{13,6} + \frac{6}{0,79} = \frac{2,37 + 81,6}{13,6 \,.\, 0,79}; \qquad \text{ou}$$

$$x = \frac{83,97}{\pi \,.\, (2,5)^2 .\, 13,6 \,.\, 0,79}.$$

$$\begin{array}{ll}
\log 83,97 & = 1,9241242 \\
\log \pi & = 0,4971499 - \\
2 \log 2,5 & = 0,7958800 - \\
\log 13,6 & = 1,1335389 - \\
\log 0.79 & = \bar{1},8976271 - \\
\hline
\log x & = \bar{1},5999283
\end{array}$$

$$x = 0^m,039\,804.$$

Troisième question. Pour savoir à combien de degrés centigrades correspondent 72° Farenheit, il faut retrancher 32°, et établir la proportion :

$$\frac{180}{100} = \frac{40}{x};$$

$$x = 22^\circ \frac{2}{9}.$$

La différence des températures est donc $72^\circ - 22 \frac{2}{9}$, ou $49^\circ \frac{7}{9}$.

CLXXXII.

(Samedi, 21 avril.)

1° Mesure de la pyramide triangulaire.

2° Calculer l'aire d'un trapèze sachant que sa hauteur est égale à la demi-somme de ses bases; que la différence entre les deux bases est 1 mètre; et que la plus grande base est égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit seraient la petite base et la hauteur du trapèze.

Soient x la plus grande base, y la plus petite, h la hauteur; on a :

$$\frac{x+y}{2}=h, \qquad (1)$$

$$x-y=1, \qquad (2)$$

$$x^2-y^2=h^2. \qquad (3)$$

L'équation (3) peut s'écrire

$$(x+y)\,(x-y)=h^2;$$

donc, en vertu des deux premières équations :

$$2h=h^2,$$

ou, en négligeant la racine 0 :

$$h=2.$$

Cette valeur de h donne

$$x=\frac{5}{3},\quad y=\frac{3}{2}.$$

CLXXXIII.

(Lundi, 23 avril.)

1° Démontrer les règles de la multiplication des polynomes.

2° Calculer le volume engendré par un triangle équilatéral dont le côté est $2^m,5$, et qui tourne autour d'un de ses côtés.

(Problème donné le 5 août 1853.)

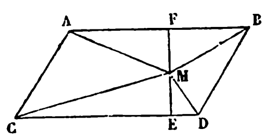
On trouve $V = \frac{1}{4}\pi \cdot (2,5)^3 = 12^{m.c.},2713.$

CLXXXIV.

(Mardi, 24 avril.)

1° Inscrire dans un cercle un octogone régulier. Expression du côté de cet octogone en fonction du rayon.

2° On joint un point quelconque pris dans l'intérieur d'un parallélogramme aux quatre sommets. Démontrer qu'il existe un rapport constant entre la surface du parallélogramme et la somme des surfaces de deux triangles opposés.



La somme des triangles opposés AMB, CMD est équivalente à un parallélogramme qui aurait pour base AB et pour hauteur ME + MF; cette somme est donc équivalente à la moitié du parallélogramme ABCD.

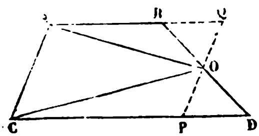
CLXXXV.

(Mercredi, 25 avril.)

1° Quelle est la mesure d'un angle qui a son sommet dans l'intérieur d'une circonférence de cercle (démonstration).

2° Prouver que dans tout trapèze le triangle qui a pour base un des côtés non parallèles, et pour sommet le milieu du côté opposé, a sa surface égale à la moitié de celle du trapèze.

3° On donne une couronne circulaire comprise entre deux circonférences concentriques; la surface de cette couronne est de 4 mètres carrés; son épaisseur, c'est-à-dire la différence des rayons des deux circonférences, est de $3^m,1415$. On demande les longueurs de ces rayons.



Deuxième question. Si, par le point O milieu de BD, on mène PQ parallèle à AC, le parallélogramme ACPQ sera équivalent au trapèze, parce que les deux triangles OPD, OQB sont égaux entre eux.

D'ailleurs, ce parallélogramme est double du triangle AOC, qui a même base et même hauteur que lui. Donc le triangle est la moitié du trapèze.

Troisième question. R et r étant les rayons, on a

$$\pi(R^2 - r^2) = 4,$$

ou

$$\pi(R + r)(R - r) = 4.$$

Or,

$$R - r = 3,1415;$$

donc $$R + r = \frac{4}{\pi \,.\, 3{,}1415}$$
$$= 0^m{,}40529.$$

La somme des rayons étant moindre que leur différence, le problème est impossible.

CLXXXVI.

(Jeudi, 26 avril.)

1° Faire connaître les procédés à l'aide desquels on détermine la densité des solides.

2° On fait condenser, dans 2 kilogrammes d'eau à 10°, 100 grammes de vapeur d'eau sous la pression $0^m{,}76$; et l'on demande quelle sera la température finale du mélange. On admettra que la quantité de chaleur nécessaire pour volatiliser, à 100°, 1 kilogramme d'eau, sous la pression $0^m{,}76$, est 537.

θ étant la température finale, un kilogramme de vapeur perdrait $637 - \theta$ unités de chaleur; les 2 kilogr. d'eau gagneront chacun $10 + \theta$ unités de chaleur.

Donc $$0{,}100\,(637 - \theta) = 2\,(10 + \theta); \quad \text{d'où}$$
$$\theta = 20°{,}8.$$

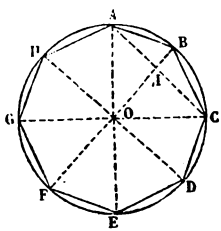
CLXXXVII.

(Vendredi, 27 avril.)

1° Démontrer que deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont les trois côtés perpendiculaires.

2° Dans un cercle, on inscrit un octogone ; on donne le diamètre du cercle et l'on demande la surface et le côté de l'octogone.

3° On donne la différence des cubes de deux nombres consécutifs. On demande ces nombres.



Deuxième question. 1° Menons la diagonale AC, côté du carré inscrit : nous aurons, pour la mesure du quadrilatère ABCO,

$$\frac{1}{2}\,OB\,.\,AC = \frac{1}{2}\,R^2\sqrt{2},$$

R étant le rayon du cercle.

Mais, évidemment, ABO est le quart de l'octogone ; donc l'aire de cette figure a pour expression :

$$A = 2R^2\sqrt{2}.$$

2° Le triangle AOB donne, en appelant C le côté cherché,

$$C^2 = 2R^2 - 2R\,.\,OI,$$

ou

$$C^2 = R^2\,(2 - \sqrt{2})\,;$$

puis

$$C = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Troisième question. Soient x, $x+1$ ces deux nombres; soit d la différence donnée. On aura

$$(x+1)^3 - x^3 = d;$$

ou

$$x^2 + x - \frac{d-1}{3} = 0.$$

x et d devant être entiers, il faut que $\frac{d-1}{3}$ soit un nombre entier n. D'ailleurs, la racine positive a pour valeur

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4n};$$

donc $1+4n$ doit être un *carré impair*. Soit $(2k+1)^2$ ce carré; alors

$$n = \frac{(2k+1)^2 - 1}{4} = k(k+1), \quad d = 1 + 3k(k+1), \text{ et}$$

$$x = k;$$

ce qui devait être.

CLXXXVIII.

(Samedi, 28 avril.)

1° Usage des logarithmes.

2° La hauteur d'un trapèze est 32 mètres; la surface de ce trapèze est égale à celle du rectangle qui serait construit sur ses deux bases parallèles; de plus, le double de la plus petite base, ajouté au triple de la plus grande, est égal à quatre fois la hauteur du trapèze. On demande les valeurs des deux bases.

(Problème donné le 5 avril 1854 et le 16 avril 1855.)

CLXXXIX.

(Lundi, 30 avril.)

1° Presse hydraulique.

2° L'une des branches d'un siphon est remplie de mercure jusqu'à $0^m,275$; l'autre branche est remplie d'un liquide jusqu'à $1^m,42$. Ces deux colonnes se font équilibre. On demande la densité du dernier liquide, par rapport au mercure et à l'eau.

3° Une sphère d'argent a $0^m,375$ de rayon. On demande quel est le poids de cette sphère, la densité de l'argent étant 10,47.

Deuxième question. Les hauteurs des liquides sont inversement proportionnelles aux densités de ces liquides. Si nous désignons par x la densité du liquide relativement à celle du mercure prise pour unité, nous aurons :

$$\frac{x}{1} = \frac{0,275}{1,42};$$

d'où $$x = 0,193.$$

Relativement à l'eau prise pour unité, la densité x' du liquide serait donnée par la relation

$$\frac{x'}{13,596} = \frac{0,275}{1,42};$$

d'où $$x' = 2,624.$$

Troisième question. Le centimètre étant pris pour unité, le volume de la sphère sera :

$$\frac{4}{3}\pi \cdot (37,5)^3;$$

et son poids :

$$\begin{aligned} P &= \frac{4}{3}\pi \cdot (37,5)^3 \cdot 10,47 \\ &= 4 \cdot \pi \cdot (37,5)^3 \cdot 3,49. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 4 &= 0,6020599 \\ \log \pi &= 0,4971499 \\ 3 \log 37,5 &= 4,7220936 \\ \log 3,49 &= 0,5428254 \\ \hline \log P &= 6,3641288 \end{aligned}$$

$$P = 2\,312\,750 \text{ grammes} = 2312^{\text{k.g.}},750.$$

CLC.

(Mardi, 1er mai.)

1° Les rapports direct et inverse de deux nombres donnent pour somme 2,05. Ces nombres eux-mêmes donnent pour somme 63. Quels sont ces deux nombres?

2° La hauteur d'un prisme droit est de $0^m,1$; chaque base est un rectangle dont l'un des deux côtés est le double de l'autre. Les quatre faces latérales jointes aux bases supérieure et inférieure donnent une aire totale de 28 centimètres carrés. On demande l'aire de chacune des faces latérales et de chacune des bases. On demande en outre le poids du mercure que renfermerait ce prisme, s'il était creux, la température étant celle de la glace fondante; la densité du mercure est 13,598.

Première question. Les nombres x, y seront donnés par les deux équations.

$$x + y = 63, \qquad (1)$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2,05;$$

la seconde équivaut à

$$x^2 + y^2 = \frac{41}{20} xy. \qquad (2)$$

Prenons, pour *inconnue auxiliaire*,

$$xy = z; \qquad (3)$$

alors la combinaison des trois équations donnera

$$63^2 = \frac{81}{20} z,$$

ou

$$z = 980. \qquad (4)$$

Les inconnues x, y ayant pour somme 63 et pour produit 980, seront données par les formules :

$$x = \frac{63}{2} + \sqrt{\left(\frac{63}{2}\right)^2 - 980},$$

$$y = \frac{63}{2} - \sqrt{\left(\frac{63}{2}\right)^2 - 980};$$

donc $\qquad x = 35, \qquad y = 28.$

Deuxième question. En prenant le centimètre pour unité, soit x l'une des dimensions de la base ; l'autre sera $2x$; l'aire de chaque base sera $2x^2$, et chaque face aura pour mesure $10x$. Donc, d'après l'énoncé,

$$4x^2 + 40x - 28 = 0,$$

ou

$$x^2 + 10x - 7 = 0.$$

La racine positive a pour valeur

$$x = -5 + \sqrt{32} = 0{,}656\,85.$$

1° L'aire de chaque face latérale sera, à moins de 1 millimètre carré, $6^{c.c},57$.

2° Chaque base aura pour mesure $2x^2 = 2\,(7 - 10x)$ $= 0^{c.c},8630$.

3° Le poids du mercure, évalué en grammes, sera $P = 2x^2 \,.\, 10 \,.\, 13{,}598 = 8{,}630 \,.\, 13{,}598 = 107{,}43$.

CXCI.

(Mercredi, 2 mai.)

1° Des aréomètres.

2° Trouver la valeur numérique de la pression que l'atmosphère exerce sur la surface d'un cercle dont le diamètre est $0^m,75$. On suppose que la pression barométrique est $0^m,74$.

3° Un morceau de glace, à la température 0°, pèse $1^{k.g},75$. On le plonge dans $8^{k.g},50$ d'eau à 89° centigrades. — On demande la température de l'eau après la fusion de la glace ; on ne tiendra pas compte de la température du vase.

Deuxième question. La pression exercée sur le cercle est égale au poids P d'un cylindre de mercure ayant pour diamètre $0^m,75$, et pour hauteur $0^m,74$.

En prenant le décimètre et le kilogramme pour unités, on aura :

$$P = \frac{1}{4}\pi \,.\, (7,5)^2 \,.\, 7,4 \,.\, 13,596$$

$$= \pi \,.\, (7,5)^2 \,.\, 7,4 \,.\, 3,399.$$

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0,4971499 \\ 2 \log 7,5 &= 1,7501224 \\ \log 7,4 &= 0,8692317 \\ \log 3,399 &= \underline{0,5313512} \\ \log P &= 2,6478352 \\ P &= 444^{k.g},462. \end{aligned}$$

Troisième question. Chaque kilogramme de glace absorbera, pour se fondre, 79 unités de chaleur; il gagnera ensuite x unités de chaleur. Chaque kilogramme d'eau, en passant de 89° à x°, perdra $89 - x$ unités de chaleur.

On aura donc :

$$2,75\,(79 + x) = 8,50\,(89 - x)\,;$$

d'où

$$x = \frac{850\ .\ 89 - 275\ .\ 79}{850 + 275} = \frac{34\ .\ 89 - 11\ .\ 79}{45}.$$

En effectuant, on trouve

$$x = 47^\circ,93.$$

CXCII.

(Jeudi, 3 mai.)

1° On mène une droite par les milieux des côtés parallèles d'un trapèze et l'on propose de démontrer qu'en prolongeant cette ligne, ainsi que les côtés non parallèles, ces trois droites iront se couper en un même point.

2° On sait que sur un cercle la longueur d'un arc de 97° 21′ 47″,2 vaut 23 mètres. Quelle sera la longueur du mètre en degrés?

3° Démontrer que la surface de la sphère est égale à la circonférence d'un grand cercle multipliée par le diamètre. Quelle sera la surface d'une sphère de $0^m,21$ de rayon?

Deuxième question.

1° Puisque 23 mètres valent 97° 21′ 47″, 2

$$1 \text{ mètre vaut } \frac{97^\circ\ 21'\ 47'',\ 2}{23}$$

ou

$$4^\circ\ 13'\ 59''\ 4.$$

Troisième question. 2° L'aire de la sphère de $0^m,21$ de rayon sera :

$$A = 4\pi\,(0,21)^2.$$

$$\begin{aligned} 2 \log 0,21 &= \bar{2},6444385 \\ \log \pi &= 0,4971499 \\ \log 4 &= 0,6020600 \\ \hline \log A &= \bar{1},7436484. \end{aligned}$$

$$A = 0,554177.$$

SESSION DE JUILLET-AOUT 1855.

CXCIII.

(Lundi, 9 juillet 1855.)

1° Action des prismes sur les rayons lumineux. — Décomposition et recomposition de la lumière.

2° Un aréomètre de Beaumé, à tige cylindrique, s'enfonce jusqu'à la 66ᵉ division dans l'acide sulfurique, de densité 1,8. On demande 1° quelle est la densité de l'eau salée qui sert à la graduation de l'aréomètre; 2° quel est le rapport du volume d'une division au volume de l'aréomètre jusqu'à 0°.

1° Soit a le volume de l'instrument jusqu'au zéro, c'est-à-dire jusqu'au sommet; soit x le volume d'une division. Le volume de l'aréomètre plongeant dans l'acide sulfurique sera : $a - 66x$; et comme ces deux volumes d'eau et d'acide ont un poids égal à celui de l'aréomètre, ils sont inversement proportionnels aux densités 1 et 1,8 des deux liquides. On a donc

$$\frac{a}{a-66x} = \frac{1,8}{1};$$

d'où
$$x = \frac{a(1,8-1)}{66 \cdot 1,8} = \frac{2}{297}a.$$

Soit maintenant d la densité inconnue de l'eau salée, qui sert à la graduation de l'instrument, et qui, comme on sait, est marquée 15 ; le volume d'eau déplacé par l'aréomètre sera

$$a - 15x,$$

et ce volume ayant le même poids que le volume a d'eau distillée, on aura encore :

$$\frac{a}{a - 15x} = \frac{d}{1}.$$

$$d = \frac{297}{297 - 30} = \frac{99}{89}.$$

2° Le rapport du volume d'une division au volume de l'aréomètre jusqu'au zéro sera $\frac{x}{a}$, c'est-à-dire $\frac{2}{297}$.

CXCIV.

(Mardi, 10 juillet.)

1° Quelle est la marche de la lumière dans le télescope de Newton.

2° On fabrique avec de l'or dont la densité est 19,362 des feuilles qui ont un dix-millième de millimètre d'épaisseur. Quelle surface pourrait-on recouvrir avec 30 grammes de ces feuilles?

(Problème donné le 14 décembre 1853.)

CXCV.

(Mercredi, 11 juillet.)

1° La surface d'un cercle et celle du triangle équilatéral inscrit valent ensemble 3 mètres carrés. On demande de calculer la surface du cercle, et celle du triangle.

2° Une boule en verre pèse un kilogramme. On demande sa surface, sachant que sa densité est 2,38.

Première question. En représentant par x l'aire du cercle, et par y celle du triangle, on a

$$\frac{x}{y}=\frac{\pi}{\frac{3}{2}\sqrt{3}},\quad x+y=3;$$

donc $$x=3\,\frac{\pi}{\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}},\quad y=3\,\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}};$$

ou plutôt $$x=\frac{3}{1+\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}}.\quad y=3-x.$$

Pour calculer x, soit $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}=z.$

$$\begin{aligned}
\log 3 &= 0,4771212 + \\
\frac{1}{2} &= 0,2385606 + \\
\log 2 &= 0,3010300 - \\
\log \pi &= 0,4971499 - \\
\hline
\log z &= \bar{1},9175019 \\
z &= 0,826993 \\
\log 3 &= 0,4771212 + \\
\log(1+z) &= 0,2617369 - \\
\hline
\log x &= 0,2153843 \\
x &= 1,6424. \\
y &= 1,3576.
\end{aligned}$$

Deuxième question. Si nous prenons le décimètre pour unité, et que nous désignions par R le rayon de la boule, nous aurons :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 . 2{,}38 = 1$$

d'où
$$R = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi . 2{,}38}}.$$

La surface de la boule sera :

$$S = 4\pi \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi . 2{,}38}}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{9\pi}{(1{,}19)^2}}.$$

$$\begin{aligned} \log 9 &= 0{,}9542425 + \\ \log \pi &= 0{,}4971499 + \\ 2 \log 1{,}19 &= 0{,}1510939 - \\ \hline &\ 1{,}3002985 \\ \frac{1}{3} &= 0{,}4334328 \end{aligned}$$

$S = 2{,}7129$ décimètres carrés.

CXCVI.

(Jeudi, 12 juillet.)

1° Établir les relations qui existent entre les coefficients et les racines d'une équation du second degré.

2° Établir la proposition suivante : lorsque le côté d'un tronc de cône égale la somme des rayons des bases, la moyenne géométrique entre les rayons donne la moitié de la hauteur, et l'on obtient le volume en multipliant la surface totale par le $\frac{1}{6}$ de cette hauteur.

3° La somme de deux nombres est 100 ; la différence de leurs carrés est 1000. Trouver ces deux nombres.

Deuxième question. La hauteur est le côté d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse égale la somme $R+r$ des rayons, et dont l'autre côté est la différence $R-r$ des mêmes rayons. Conséquemment,

$$H^2=(R+r)^2-(R-r)^2=2R.2r,$$

ou

$$\frac{H}{2}=\sqrt{Rr}.$$

La surface totale du tronc de cône a pour mesure

$$\pi(R+r)^2+\pi R^2+\pi r^2=2\pi(R^2+r^2+Rr).$$

En multipliant cette valeur par $\frac{H}{6}$, on trouve l'expression connue du volume du tronc du cône :

$$V=\frac{\pi H}{3}(R^2+r^2+R.r).$$

Troisième question. Les équations du problème sont

$$x + y = 100,$$
$$x^2 - y^2 = 1000.$$

Celle-ci peut s'écrire :

$$(x + y)(x - y) = 1000,$$

d'où
$$x - y = 10.$$

Nous connaissons ainsi la somme et la différence des deux nombres x et y ; ce qui donne :

$$x = 55$$
$$y = 45.$$

CXCVII.

(Vendredi, 13 juillet.)

1° Des baromètres.

2° On demande le poids d'un bloc de marbre, de forme cylindrique, ayant $3^{m},75$ de hauteur, $6^{m},85$ de diamètre de base; la densité du marbre est 2,72.

3° $3^{kg},50$ de glace à 0° sont mêlés avec 45^{kg} d'eau à 32°. Quelle sera la température du mélange?

Deuxième question. En prenant pour unité le décimètre, nous aurons pour le poids du bloc, en kilogrammes,

$$P = \frac{\pi . (68,5)^2 . 37,5 . 2,72}{4}$$

$$= \pi . (68,5)^2 . 37,5 . 0,68.$$

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0,4971499 \\ 2 \log 68,5 &= 3,6713810 \\ \log 37,5 &= 1,5740312 \\ \log 0,68 &= \bar{1},8325089 \\ \hline &\ 5,5750710 \end{aligned}$$

$$P = 375\,899 \text{ kilogrammes.}$$

Troisième question. Les $3^{kg},5$ de glace absorbent chacun 79 unités de chaleur pour se fondre, et de plus x unités de chaleur (x étant la température finale), ou

$$3,5\,(79 + x).$$

L'eau perd $45\,(32 - x)$ unités de chaleur.

On a donc :

$$3,5\,(79 + x) = 45\,(32 - x);$$

d'où $$x = 23°,98.$$

CXCVIII.

(Lundi, 16 juillet. — 1re série.)

1° Mélanges réfrigérants.

2° Exprimer en degrés centigrades la température du thermomètre Farenheit à 4° au-dessous de zéro.

3° On demande la longueur d'une barre de plomb, qui se dilate autant qu'une barre d'acier non trempé, de 3 mètres de longueur. Le coefficient de dilatation de l'acier est $\frac{1}{351}$, celui du plomb $\frac{1}{927}$.

Deuxième question. Le 0° du thermomètre Farenheit correspond à 32° de son thermomètre au-dessous de la glace fondante; la température donnée — 4° correspond donc à — 36°, qu'il faut comparer à l'échelle centigrade; ce qui donne

$$\frac{180}{100}=\frac{-36}{x};$$

d'où $x=-20°$ du thermomètre centigrade.

Troisième question. x étant la longueur de la barre de plomb, sa dilatation, pour 1°, sera $\frac{x}{927}$.

La dilatation de la barre d'acier est, pour 1°, $\frac{3}{351}$.

On a donc :

$$\frac{x}{927}=\frac{3}{351};$$

d'où $$x=\frac{927\,.\,3}{351}=\frac{309}{39}=\frac{103}{13}=7^{m},923.$$

CXCIX.

(Lundi, 16 juillet. — 2e série.)

1° Quelle est la mesure d'un angle qui a son sommet dans l'intérieur d'une circonférence de cercle. (Démonstration.)

2° Prouver que, dans un trapèze, le triangle qui a pour base un des côtés non parallèles et pour sommet le milieu du côté opposé, a sa surface égale à la moitié de celle du trapèze.

3° On donne une couronne circulaire comprise entre deux circonférences concentriques; la surface de cette couronne est de 4 mètres carrés; son épaisseur, c'est-à-dire la différence des rayons des deux circonférences est de $3^m,1415$. On demande la longueur de ces rayons.

(Problèmes donnés le 25 avril 1855.)

CC.

(Mardi, 17 juillet. — 1re série.)

1° On mène une droite par les milieux des côtés parallèles d'un trapèze, et l'on propose de démontrer qu'en prolongeant cette ligne, ainsi que les 2 côtés non parallèles, ces droites iront se couper en un même point.

2° Démontrer que la surface de la sphère égale la circonférence d'un grand cercle multipliée par le diamètre.

3° Quelle est la surface d'une sphère de $0^{m},21$ de rayon ? On fera le calcul en prenant π égal à 3,1416.

4° Sur un certain cercle, la longueur de l'arc de $97^{\circ}\ 21'\ 49'',2$ vaut 23 mètres Quelle sera la valeur du mètre en degrés de ce même cercle.

Troisième question. La surface d'une sphère ayant pour expression $4\pi R^2$, la surface de la sphère donnée sera, en centimètres carrés,

$$\begin{aligned} S &= 4\pi \,.\, 21^2. \\ &= 5541^{c.c.},78\,24. \end{aligned}$$

Quatrième question. Il suffit de diviser $97^{\circ}\ 21'\ 49'',2$ par 23.

On trouve $4^{\circ}\ 13'\ 59'',5$.

CCI.

(Mardi, 17 juillet. — 2e série.)

1° Lois des vibrations des cordes.

2° On plonge par le sommet, dans du mercure dont la densité est 13,596, un cône de fer dont la hauteur est $0^m,22$, le diamètre de base $0^m,01$, et la densité 7,788. On demande de combien le cône s'enfoncera dans le mercure.

Si nous désignons par x la hauteur du cône de mercure déplacé, par y le diamètre de sa base, nous aurons, entre les poids du cône de fer et du cône de mercure, l'équation suivante :

$$\frac{1}{12}\pi y^2 \,.\, x \,.\, 13{,}596 = \frac{1}{12}\pi \,.\, 1.22 \,.\, 7{,}788\,;$$

ou, en simplifiant,

$$y^2 \,.\, x \,.\, 13{,}596 = 22 \,.\, 7{,}788.$$

Les hauteurs des deux cônes sont d'ailleurs comme les diamètres des bases ; donc

$$y = \frac{x}{22}.$$

L'équation précédente se réduit donc à

$$y^3 = \frac{7788}{13596} = \frac{59}{103}.$$

$$\log 59 = 1{,}7708520 +$$
$$\log 103 = 2{,}0128372 -$$
$$\log y^3 = \bar{1}{,}7580148$$
$$\frac{1}{3} = \log y = \bar{1}{,}9193383$$
$$y = 0{,}830498 \text{ centimètres.}$$

On a ensuite, en multipliant par 22,

$$x = 18{,}2709 \text{ centimètres.}$$

CCII.

(Mercredi, 18 juillet. — 1re série.)

1° Des piles.

2° La cloche d'une machine pneumatique renferme 3gr,17 d'air. Un manomètre, communiquant d'un côté avec la partie supérieure de la cloche, de l'autre avec l'atmosphere, marque 0. On ferme la cloche, et on fait jouer la machine; le manomètre s'élève à 0m,65. Un baromètre, placé dans la chambre, est resté à 0m,76 pendant toute l'expérience. Combien a-t-on retiré d'air de la cloche, et combien en est-il resté? La température était 0°, et n'a pas varié.

Soit x le poids de l'air qui reste sous la cloche, après le jeu de l'appareil; cet air est à la pression 0,76—0,65, ou 0,11.

D'ailleurs, les poids des gaz sont proportionnels aux pressions; donc :

$$\frac{x}{3{,}17} = \frac{0{,}11}{0{,}76};$$

d'où $$x = 0^{gr.},458.$$

Le poids de l'air retiré est donc $2^{gr.},712$.

CCIII.

(Mercredi, 18 juillet. — 2ᵉ série.)

1° On demande de démontrer l'expression de la surface de la zone sphérique, et de l'appliquer à l'exemple suivant :

Une sphère dont le rayon est de 4 mètres, étant coupée par deux plans parallèles, d'un même côté du centre, à des distances de ce point de 2 mètres et de 3 mètres, quelle est la surface de la zone, et quelles sont les surfaces des deux cercles qui forment ses deux bases?

2° Partager 88° 21′ 13″ en trois parties proportionnelles aux nombres 3,2 ; 5,3 ; et 8,5.

Première question. La surface de la zone a pour expression $2\pi RH$, R étant le rayon de la sphère, H la hauteur de la zone.

La surface de la zone donnée sera donc :

$$2.\pi.4.1. = 8\pi = 25^{m.\ c.},13.27.$$

Chaque cercle de base de la zone a pour rayon un côté d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est le rayon de la sphère, et dont l'autre côté est la distance du centre au plan de ce cercle ; donc :

$$\begin{aligned} r^2 &= 4^2 - 2^2 \\ &= 12 ; \\ r'^2 &= 4^2 - 3^2 \\ &= 7. \end{aligned}$$

Les surfaces des deux cercles sont :

$$12\pi, \text{ ou } 37^{m.\ c.},6990$$

et

$$7\pi, \text{ ou } 21^{m.\ c.},9912.$$

Deuxième question. Les trois parties sont, d'après la règle connue :

$$x=\frac{88^\circ\,21'\,13''.\,3{,}2}{3{,}2+5{,}3+8{,}5}=88^\circ\,21'\,13''.\,\frac{32}{170}=16^\circ\,37'\,52'',5$$

$$y=88^\circ\,21'\,13''.\,\frac{53}{170}=\qquad 27^\circ\,32'\,43'',9$$

$$z=88^\circ\,21'\,13''.\frac{85}{170}=88^\circ\,21'\,13''.\,\frac{1}{2}=\frac{44^\circ\,10'\,36'',5}{88^\circ\,21'\,12'',9}.$$

CCIV.

(Jeudi, 19 juillet. — 1re série.)

1° Lunette astronomique.

2° On suppose la surface des mers sphérique; la sphère terminée par cette surface a un rayon de 6 366 200 mètres. Un observateur est placé au sommet du grand mât d'un vaisseau; à 60 mètres au-dessus du niveau de la mer. On demande jusqu'où s'étendra la vue de cet observateur.

(Problème donné le 24 juillet 1854.)

CCV.

(Jeudi, 19 juillet. — 2e série.)

1° Décrire l'électroscope ordinaire. Expliquer la manière dont on le charge par influence.

2° Dans les conditions normales de pression et de température, le litre d'air pèse $1^{gr},293$; ceci posé, on demande ce que pèsera dans l'air, dans ces conditions, un demi-mètre cube de bois, de densité égale à $\frac{1}{2}$. On demande en outre quel serait le côté d'un cube de laiton de densité égale à 8,3, qui dans l'air pèserait autant que ce demi-mètre cube de bois.

Un demi-mètre cube de bois, ou 500 décimètres cubes, pèsent 250 kilogrammes. Dans l'air, ce corps perd de son poids une portion égale au poids de l'air déplacé. Puisque 1 litre d'air pèse $1^{gr.},293$, 500 décimètres cubes d'air pèsent $646^{gr.},5$; le demi-mètre cube de bois pèse donc dans l'air :

$$250^{kg} - 646^{gr.},5, \quad \text{ou} \quad 249^{kg},3535.$$

En désignant par x le côté du cube de laiton qui pèserait autant que le demi-mètre cube de bois, on aura :

$$x^3 . 8,3 = 249,3535,$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{249,3535}{8,3}}.$$

$$\begin{aligned}
\log 249,3535 &= 2,3968155 + \\
\log 8,3 &= 0,9190780 - \\
&\overline{1,6777375} \\
\log x &= 0,5592458 \\
x &= 3,624 \text{ décimètres.}
\end{aligned}$$

CCVI.

(Vendredi, 20 juillet. — 1re série.)

1° Exposer l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier, en prenant pour exemple 3 349.

2° Prouver que le triangle qui a pour sommets les milieux des côtés d'un triangle donné est semblable à celui-ci. Trouver le rapport des surfaces des deux triangles.

3° La différence de deux nombres est 7; la différence de leurs cubes est 4 501. Trouver ces deux nombres.

Troisième question. Les équations du problème sont, évidemment,

$$x - y = 7, \qquad (1)$$

$$x^3 - y^3 = 4501. \qquad (2)$$

Divisant la deuxième par la première, on a:

$$x^2 + xy + y^2 = 643. \qquad (3)$$

Si l'on élève au carré les deux membres de l'équation (1), et qu'on retranche de l'équation (3), on trouve :

$$xy = 198. \qquad (4)$$

La somme des quantités x et $-y$ est donc 7, et leur produit, -198. Par conséquent,

$$x = \frac{1}{2}\left(7 + \sqrt{49 + 198.4}\right) = \frac{1}{2}(7 + 29) = 18,$$

$$-y = \frac{1}{2}(7 - 29) = -11,$$

ou

$$y = 11.$$

CCVII.

(Vendredi, 20 juillet. — 2e série.)

1° Par un point pris sur le plan d'un cercle, on mène plusieurs cordes, sécantes et tangentes. Déterminer les relations qui existent entre ces cordes, ces tangentes et ces sécantes.

2° Les côtés de trois octogones réguliers sont, respectivement, 3 mètres, 4 mètres et 12 mètres. On demande quel devra être le côté d'un octogone, pour qu'il soit équivalent à la somme des trois octogones donnés.

En désignant par x le côté de l'octogone cherché, on a, d'après le théorème sur le rapport des aires des polygones semblables :

$$x^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2;$$

d'où

$$x = 13.$$

CCVIII.

(Samedi, 21 juillet. — 1re série.)

1° Action des courants sur les courants.

2° On mêle 1 kilogramme d'eau à 0° avec 1 kilogramme de mercure à 100°. On trouve que la température du mélange est de 3°. On demande la capacité calorifique du mercure, comparée à celle de l'eau.

3° On demande le poids d'une sphère en or fondu, dont la circonférence, à 0°, est 0m,3248. La densité de l'or est 19,26.

Deuxième question. Soit c la capacité calorifique du mercure, c'est-à-dire la chaleur nécessaire pour élever de 1° la température d'un kilogramme de mercure. La quantité de chaleur perdue par ce kilogramme de mercure, quand la température variera de 100° à 3°, sera représentée par

$$c(100-3).$$

L'eau gagnera une quantité de chaleur représentée par 3; donc

$$c\times 97=3$$

$$c=\frac{3}{97};$$

c'est-à-dire que la chaleur spécifique du mercure est les $\frac{3}{97}$ de celle de l'eau.

Troisième question. En désignant par R le rayon de la sphère, et prenant pour unité le décimètre, on a :

$$2\pi R = 3{,}248\,,$$

$$R = \frac{3{,}248}{2\pi} = \frac{1{,}624}{\pi}.$$

Le poids de la sphère est :

$$P = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1{,}624}{\pi}\right)^3 .\, 19{,}26 = \frac{(1{,}624)^3 .\, 25{,}68}{\pi^2}$$

$$\begin{aligned} 3 \log 1{,}624 &= 0{,}6317580 + \\ \log 25{,}68 &= 1{,}4095950 + \\ 2 \log \pi &= 0{,}9942998 - \\ \hline \log P &= 1{,}0470532 \\ P &= 11{,}144 \text{ kilogrammes.} \end{aligned}$$

CCIX.

(Samedi, 21 juillet. — 2e série.)

1° Des paratonnerres.

2° Calculer la pression qu'exerce l'atmosphère sur un rectangle dont la diagonale est $0^m,44$ et un côté, $0^m,26$. La température est 0° et la pression, 0,76.

Le second côté du rectangle est, en centimètres :

$$\sqrt{44^2-26^2}=\sqrt{1260}.$$

La surface du rectangle est donc équivalente à

$$26\sqrt{1260} \text{ centimètres carrés.}$$

La pression P, exercée sur le rectangle, est égale au poids d'une colonne de mercure de 76 centimètres de hauteur, ayant pour base ce rectangle :

$$P=76.\,13,596.\,26.\,\sqrt{1260}$$

$$\begin{aligned}
\log 76 &= 1,8808136\\
\log 13,596 &= 1,1334112\\
\log 26 &= 1,4149733\\
\frac{1}{2}\log 1260 &= 1,5501852\\
\hline
\log P &= 5,9793833\\
P &= 953\,637 \text{ kilogrammes.}
\end{aligned}$$

CCX.

(Lundi, 23 juillet. — 1re série.)

1° Division des polynômes.

Diviser :

$10a^5b - 21a^4b^2 - 56ab^5 - 5a^2b^4 - 10a^3b^3$, par $8b^3 - 3ab^2 + 5a^2b$.

2° Quel doit être le rayon de base d'un cylindre dont la hauteur est $3^m,75$ et le volume 12 mètres cubes ?

Soit x ce rayon :

$$\pi x^2 . 3{,}75 = 12,$$

$$x^2 = \frac{12}{\pi . 3{,}75} = \frac{4}{\pi . 1{,}25} = \frac{3{,}2}{\pi}.$$

$$\begin{aligned} \log 3{,}2 &= 0{,}5051500 + \\ \log \pi &= 0{,}4971499 - \\ \hline 2 \log x &= 0{,}0080001 \\ \log x &= 0{,}0040000 \\ x &= 1^m{,}00925. \end{aligned}$$

CCXI.

(Lundi, 23 juillet. — 2e série.)

1° Règle des signes dans la multiplication des polynômes.

2° La différence de deux nombres est 6; la différence de leurs carrés est 480. Trouver ces deux nombres.

3° La plus grande pyramide d'Égypte a une hauteur de 146 mètres. Sa base est un carré dont le côté est 237 mètres. Le sommet du Panthéon est à 79 mètres au-dessus du sol. On imagine un prisme droit dont la base carrée aurait pour côté la hauteur du Panthéon, et dont l'élévation serait celle de la pyramide. On demande de comparer le volume de la pyramide et celui du prisme.

Deuxième question.
$$x - y = 6,$$
$$x^2 - y^2 = 480.$$

Cette seconde équation peut s'écrire :

$$(x + y)\ (x - y) = 480;$$

ou

$$6\ (x + y) = 480,$$
$$x + y = 80.$$

Connaissant la somme et la différence des deux nombres, nous aurons facilement

$$x = 43, \quad y = 37.$$

Troisième question. Le volume de la pyramide est

$$\frac{237^2 \,.\, 146}{3};$$

le volume du prisme de même hauteur, et ayant pour base un carré de 79 mètres de côté, est

$$79^2 \,.\, 146.$$

Le rapport de ces deux volumes est :

$$\frac{237^2 \cdot 146}{3 \cdot 79^2 \cdot 146} = 3.$$

Le volume de la pyramide est donc le triple de celui du prisme.

CCXII.

(Mardi, 24 juillet. — 1re série.)

1° Énoncer la loi de Mariotte touchant la compressibilité des gaz; faire connaître les expériences qui en montrent l'exactitude, et indiquer les circonstances dans lesquelles elle cesse d'être applicable.

2° Le rapport entre le poids du cuivre à 0° et celui de l'eau à 4° est 8,88. Le coefficient de dilatation cubique du cuivre est $\frac{1}{58200}$, et la fraction qui représente la dilatation totale de l'eau entre 4° et 15° est $\frac{1}{136}$. Ceci posé, on demande quel est, à 15°, le rapport des poids spécifiques des deux corps.

1 décimètre cube de cuivre pèse, à 0°, 8kg,88; il pèsera donc, à 15° :

$$\frac{8,88}{1+\frac{15}{58200}} = 8,88 \cdot \frac{3880}{3881}.$$

De même, 1 décimètre cube d'eau pèse 1 kilog. à 4°; et, à 15°:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{136}}=\frac{136}{137}.$$

Le rapport de ces deux poids sera le poids spécifique cherché x :

$$x=8{,}88\cdot\frac{3880}{3881}\cdot\frac{137}{136}.$$

$$\begin{aligned}\log\ 8{,}88 &= 0{,}9484130+\\ \log\frac{137}{136} &= 0{,}0031817+\\ \log\frac{3881}{3880} &= 0{,}0001119-\\ \hline \log x &= 0{,}9514828.\end{aligned}$$

$$x=8{,}9430.$$

CCXIII.

(Mardi, 24 juillet. — 2e série.)

1° **Démontrer que les bissectrices des suppléments de deux angles d'un triangle, et la bissectrice du troisième angle de ce triangle, sont trois droites qui vont concourir en un même point.**

2° **Trouver, dans la sphère, la hauteur d'une zone dont la surface égale celle d'un grand cercle.**

3° **Une personne doit 5 000 fr.; elle remet à son créancier un billet de 4 200 fr., payable dans quatre mois, le taux d'escompte étant 6 p. 0/0. On demande combien elle doit ajouter d'argent comptant pour acquitter sa dette.**

Deuxième question. Soient R le rayon de la sphère, et x la hauteur de la zone ; on aura :

$$2\pi R \cdot x = \pi R^2 ;$$

d'où

$$x = \frac{R}{2}.$$

Le plan qui détermine la calotte sphérique doit donc être perpendiculaire au milieu d'un rayon.

Troisième question. Le billet de $4\,200^f$ vaut, actuellement $4\,200^f \cdot \frac{100}{102}$, ou $4\,117^f,64$ (l'escompte étant pris en *dedans*). Le débiteur doit donc ajouter, en argent comptant, $5\,000^f - 4\,117^f,64$, ou $882^f,36$.

CCXIV.

(Mercredi, 25 juillet. — 1re série.)

1° Expliquer la théorie de la résolution des équations du second degré, sur l'exemple suivant :

$$x^2 - 12x + 35 = 0.$$

2° Calculer la surface d'un triangle équilatéral, sachant que le rayon du cercle inscrit est de 142m,25. Évaluer cette surface en hectares, ares, centiares.

Le rapport entre le côté du triangle équilatéral et le rayon R du cercle inscrit est $2\sqrt{3}$. Par conséquent, le triangle a pour mesure :

$$A = 3R^2\sqrt{3} = 3\,(142,25)^2\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} 2\log 142,25 &= 4,3061046 + \\ \log 3 &= 0,4771212 + \\ \frac{1}{2}\log 3 &= 0,2385606 + \\ \hline \log A &= 5,0217864 \\ A &= 105144. \end{aligned}$$

La surface du triangle est donc 105 144 mètres carrés, ou 10 hectares, 51 ares 44 centiares.

CCXV.

(Mercredi, 25 juillet. — 2e série.)

1° Des baromètres.

2° Deux miroirs sphériques, l'un concave et l'autre convexe, ont chacun 1 mètre de rayon. On présente une bougie successivement devant eux, à 2 mètres de distance sur l'axe. Quels effets observe-t-on?

3° On mêle 6 kilogrammes de glace à 0°, avec 28 kilogrammes d'eau à 40°. On demande la température après le mélange.

Deuxième question. La bougie étant présentée devant le miroir concave, donnera une image renversée, amoindrie, et située entre le foyer principal et le centre. Pour avoir la position de cette image, on emploiera la formule

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$$

dans laquelle p représente la distance de l'objet au miroir, p' la distance de l'image au miroir, f le demi-rayon.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{x}=\frac{1}{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1}{x}=2-\frac{1}{2},$$

$$x=\frac{2}{3}.$$

Telle sera la distance de l'image au miroir.

Pour avoir sa grandeur relativement à l'objet, considérons les deux triangles semblables ayant pour sommet commun le centre de la sphère, et pour bases, l'un l'image, l'autre l'objet :

$$\frac{image}{objet} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1} = \frac{1}{3},$$

c'est-à-dire que l'image de la bougie est, en grandeur, le tiers de la bougie.

En présentant la bougie devant le miroir convexe, on aura une image virtuelle, droite, amoindrie, dont la position sera déterminée par la formule

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = -\frac{1}{f},$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{2},$$

$$x = \frac{2}{5}.$$

Pour avoir la grandeur de l'image, considérons encore les deux triangles semblables ayant pour sommet commun le centre de la sphère, et pour bases, l'un l'image, et l'autre l'objet :

$$\frac{image}{objet} = \frac{1 - \frac{2}{5}}{3} = \frac{1}{5}.$$

C'est-à-dire que l'image de la bougie située derrière le miroir, à une distance du miroir égale à $\frac{2}{5}$ de mètre, n'est que le $\frac{1}{5}$ de la bougie.

Troisième question. Les 6 kilogrammes de glace absorbent $6 . 79 + 6x$ unités de chaleur, x étant la température après le mélange.

Les 28 kilogrammes d'eau perdent

$$28\,(40 - x).$$

On a donc :

$$6\,(79 + x) = 28\,(40 - x),$$

ou

$$x = 19.$$

CCXVI.

(Jeudi, 26 juillet. — 1re série.)

1° Construction et usage du galvanomètre multiplicateur.

2° Sachant que la capacité du corps de pompe d'une machine pneumatique est le tiers de la capacité du récipient, indiquer après combien de coups de piston la pression intérieure sera la deux-centième partie de ce qu'elle était primitivement.

Soient V le volume du récipient, P le volume du corps de pompe, H la pression primitive, H_n la pression après n coups de piston, la formule répondant à la question est :

$$\frac{H_n}{H} = \left(\frac{V}{V+P}\right)^n.$$

Dans l'exemple proposé,

$$P = \frac{1}{3} V;$$

$$\frac{H_n}{H} = \frac{1}{200};$$

donc

$$\frac{1}{200} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)^n,$$

ou

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n = 200;$$

$$n = \frac{\log 200}{\log \frac{4}{3}},$$

$$\log n = \log \log 200 - \log \log \frac{4}{3}.$$

$$\log 200 = 2{,}30103, \qquad \log \log 200 = 0{,}3619223$$

$$\log \frac{4}{3} = 0{,}12494, \qquad \log \log \frac{4}{3} = \bar{1}{,}0967015$$

$$\log n = 1{,}2652208$$

$$n = 18{,}4\ldots$$

Après 18 coups de piston, la masse d'air, sous le récipient, sera un peu plus que le $\frac{1}{200}$ de la masse primitive; après 19 coups, elle sera un peu moindre que le $\frac{1}{200}$.

CCXVII.

(Jeudi, 26 juillet. — 2e série.)

1° On suppose que trois droites Ox, Oy, Oz, partant d'un même point O, font entre elles les angles suivants :

$$xoy = 110°, \quad xoz = 113°, \quad yoz = 137°.$$

On demande si ces trois droites sont dans un même plan. *Prouver ce que l'on avancera.*

2° Une droite AB égale 3 784 mètres. Deux points C, D, dans un même plan avec cette droite, sont déterminés par les angles

$$CAB = 87° \, 25', \; CBA = 46° \, 34', \; DAB = 47° \, 32', \; DBA = 84° \, 35'.$$

On propose de calculer, avec ces données, la distance CD.

$$1° \quad ACB = 180° - (87° \, 25' + 46° \, 34') = 46° \, 1'.$$

$$AC = AB \frac{\sin CBA}{\sin ACB} = 3784 \frac{\sin 46° \, 34'}{\sin 46° \, 1'}.$$

$$\begin{aligned} \log 3784 &= 3{,}5779511 + \\ \log \sin 46° \, 34' &= \bar{1}{,}8610412 + \\ \log \sin 46° \, 1 \;\; &= \bar{1}{,}8570561 - \\ \hline \log AC &= 3{,}5819362 \\ AC &= 3818^m{,}88. \end{aligned}$$

$$2° \quad ADB = 188° - (46° \, 32' + 84° \, 35') = 48° \, 53'.$$

$$AD = AB \frac{\sin DBA}{\sin ADB} = 3784 \frac{\sin 84° \, 35'}{\sin 48° \, 53'}.$$

$$\begin{aligned} \log 3784 &= 3{,}5779511 + \\ \log \sin 84° \, 35' &= \bar{1}{,}9980563 + \\ \log \sin 48° \, 53' &= \bar{1}{,}8770096 - \\ \hline \log AD &= 3{,}6989978. \\ AD &= 5000^m{,}32. \end{aligned}$$

3° $$\mathrm{CAD} = 87^\circ\,25' - 47^\circ\,32' = 39^\circ\,53'.$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\mathrm{ACD} - \mathrm{ADC}) = \frac{\mathrm{AD} - \mathrm{AC}}{\mathrm{AD} + \mathrm{AC}}\cot\frac{1}{2}\,\mathrm{CAD}$$

$$= \frac{1181{,}44}{8819{,}20}\cot 19^\circ\,56'\,30''.$$

$$\begin{aligned}\log 1181{,}44 &= 3{,}0724118\ + \\ \log\cot 19^\circ\,56'\,30'' &= 0{,}4403116\ + \\ \log 8819{,}20 &= 3{,}9454292\ - \\ \hline \log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\mathrm{ACD} - \mathrm{ADC}) &= \bar{1}{,}5672942\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(\mathrm{ACD} - \mathrm{ADC}) = 20^\circ\,15'\,55''.$$

$$\frac{1}{2}(\mathrm{ACD} + \mathrm{ADC}) = 70^\circ\,3'\,30''.$$

$$\mathrm{ACD} = 90^\circ\,19'\,25'', \quad \mathrm{ADC} = 49^\circ\,47'\,35''.$$

4° $$\mathrm{CD} = \mathrm{AC}\,\frac{\sin\mathrm{CAD}}{\sin\mathrm{ADC}}.$$

$$\begin{aligned}\log\mathrm{AC} &= 3{,}5819362\ + \\ \log\sin\mathrm{CAD} = \log\sin 39^\circ\,53' &= \bar{1}{,}8070114\ + \\ \log\sin\mathrm{ADC} = \log\sin 49^\circ\,47'\,35'' &= \bar{1}{,}8829329\ - \\ \hline \log\mathrm{CD} &= 3{,}5060147\end{aligned}$$

$$\mathrm{CD} = 3206^{\mathrm{m}}{,}38.$$

CCXVIII.

(Vendredi, 27 juillet. — 1re série.)

1° Exposer la méthode des mélanges pour la détermination des chaleurs spécifiques.

2° Un fragment de métal pèse dans l'air 7gr,234 ; dans l'eau 4gr,523 ; dans un liquide A 5gr,417 ; dans un liquide B 3gr,215. On demande la densité du métal et celle de chacun des liquides A et B, par rapport à l'eau.

3° On veut faire, avec du taffetas verni qui pèse 250 grammes le mètre carré, un ballon propre à contenir 904,78 mètres cubes de gaz hydrogène. On demande le poids du taffetas employé.

Deuxième question. Le métal perd dans l'eau

$$7^{gr.},234 - 4^{gr.},523, = 2^{gr.},711.$$

Son poids spécifique est donc

$$\frac{7,234}{2,711} = 2,66.$$

Le même métal perd dans le liquide A,

$$7^{gr.},234 - 5^{gr.},417, = 1^{gr.},817.$$

Le poids spécifique du liquide A est donc

$$\frac{1,817}{2,711} = 0,67.$$

Enfin, la perte de poids dans le liquide B étant

$$7^{gr.},234 - 3^{gr.},215, = 4^{gr.},119,$$

le poids spécifique du liquide B est

$$\frac{4,119}{2,711} = 1,52.$$

Troisième question. En désignant par R le rayon du ballon, on a

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 904{,}78,$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{904{,}78 \cdot 3}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{678{,}585}{\pi}}.$$

La surface du taffetas aura pour expression :

$$S = 4\pi\left(\sqrt[3]{\frac{678{,}585}{\pi}}\right)^2.$$

Enfin, le poids du ballon, exprimé en grammes, sera

$$P = 4\pi \cdot 250 \sqrt[3]{\left(\frac{678{,}585}{\pi}\right)^2}$$

$$= 1000\,\pi\left(\sqrt[3]{\frac{678{,}585}{\pi}}\right)^2 = 1000 \sqrt[3]{(678{,}585)^2 \cdot \pi}$$

$$\begin{array}{rl}
2 \log 678{,}585 = & 5{,}6632086 + \\
\log \pi = & 0{,}4971499 + \\
\hline
& 6{,}1603585 \\
\frac{1}{3} = & 2{,}0534528 + \\
\log 1000 = & 3. \qquad\qquad + \\
\hline
\log P = & 5{,}0534528 \\
P = & 113097 \text{ grammes.}
\end{array}$$

CCXIX.

(Vendredi, 27 juillet. — 2e série.)

1° Exposer les procédés pour la détermination des densités des corps solides et liquides.

2° Le volume d'air de l'éprouvette d'une machine à compression est égal à 152 parties ; par le jeu de la machine, ce volume est réduit à 37 parties, et le mercure s'est élevé dans le tube manométrique à $0^m,48$. On demande dans quel rapport s'est accrue la quantité d'air du récipient de la machine.

Soit x la tension de l'air sous l'éprouvette, après le jeu de la machine ; on a, par la loi de Mariotte,

$$\frac{152}{37}=\frac{x}{0,76};$$

d'où $$x=3^m,122.$$

La pression de l'air, sous le récipient, sera :

$$y=3^m,122+0^m,48=3^m,602.$$

En appelant a et b les quantités d'air sous le récipient avant et après l'expérience, le rapport de ces quantités d'air sera le même que celui des pressions $0^m,76$ et $3^m,602$; ainsi :

$$\frac{a}{b}=\frac{0,76}{3,602},$$

$$b=a\,.\,4,739;$$

c'est-à-dire que la quantité d'air qui se trouve sous le récipient après l'expérience est égale à celle qui s'y trouvait d'abord, multipliée par 4,739.

CCXX.

(Samedi, 28 juillet. — 1re série.)

1° Théorie des vibrations des cordes, et théorie de la gamme.

2° Étant donnée une masse d'air de $1^l,25$ à la pression $0^m,75$, trouver le volume de cet air à la pression $0^m,45$ et à celle de $1^m,58$; la température restant constante.

Le volume de l'air étant x à la pression $0^m,76$, et x' à la pression $1^m,58$, ces volumes seront déterminés, d'après la loi de Mariotte, par les deux formules :

$$x = \frac{1,25 \,.\, 0,75}{0,45} = \frac{1,25 \,.\, 5}{3} = 2^l,08;$$

$$x' = \frac{1,25 \,.\, 0,75}{1,58} = 0^l,59.$$

CCXXI.

(Samedi, 28 juillet. — 2e série.)

1° Multiplication des polynômes.

2° Calculer le poids d'un obélisque ayant la forme d'un tronc de pyramide à base carrée, dont les côtés sont $0^m,72$ et $2^m,4$, et la hauteur 48 mètres; la densité de la matière est 2,68.

Le volume du tronc de pyramide a pour expression :

$$V = \frac{H}{3}(B + b + \sqrt{B \,.\, b})$$

$$= \frac{48}{3}[(2,4)^2 + (0,72)^2 + 2,4 \,.\, 0,72]$$

$$= 128^{m.c.},1024.$$

En multipliant ce volume par la densité 2,68 de la matière, on trouve, pour le poids de l'obélisque :

$$343\,314^{kilog.},432.$$

CCXXII.

(Lundi, 30 juillet. — 1re série.)

1° Expliquer la réduction de plusieurs fractions au plus petit dénominateur commun. On prendra pour exemple : $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{13}{60}$ et $\frac{17}{72}$.

2° On sait que le sinus d'un arc compris entre 90° et 180° a pour valeur $0^m,84357$.

On demande de calculer le cosinus, la tangente, la cotangente, la sécante, la cosécante de cet arc. On aura soin de faire connaître le signe dont chacune de ces quantités doit être affectée. On fera ce calcul à $\frac{1}{1000}$ près.

L'arc, que nous désignerons par a, ayant son extrémité dans le deuxième quadrant, son cosinus sera négatif, ainsi que sa tangente, sa cotangente et sa sécante. Le sinus et la sécante seront seuls positifs.

Le cosinus sera donné par la formule

$$\cos^2 a = 1 - (0,84357)^2,$$

que l'on peut écrire ·

$$\cos^2 a = (1 + 0,84357)(1 - 0,84357)$$
$$= 1,84357 \,.\, 0,15643.$$

La multiplication abrégée donne

$$\cos^2 a = 0,288\,370.$$

Nous extrairons la racine du nombre 288 370 à une unité près, et cette racine donnera le cosinus cherché, à $\frac{1}{1000}$ près.

On trouve ainsi :

$$\cos a = -0,537.$$

Les autres quantités demandées sont :

$$\text{tang } a = \frac{\sin a}{\cos a} = -\frac{0,84357}{0,53701} = -1,578,$$

$$\text{cotg } a = \frac{\cos a}{\sin a} = -\frac{0,53701}{0,84357} = -0,636,$$

$$\text{séc } a = \frac{1}{\cos a} = -\frac{1}{0,53701} = -1,862,$$

$$\text{coséc } a = \frac{1}{\sin a} = +\frac{1}{0,84357} = +1,185.$$

CCXXIII.

(Lundi, 30 juillet. — 2e série.)

1° Expérience d'Œrsted. — Action des courants sur les aimants. — Solenoïdes.

2° Pour faire équilibre au poids d'un lingot de platine placé dans le plateau d'une balance, on a mis un poids de 27 grammes en *cuivre jaune*. Quel poids aurait-on dû mettre si cette pesée avait été faite dans le vide? On sait que la densité du platine est 21,53, celle du cuivre jaune 8,30, et que l'air à 8° et $0^m,76$ de pression (conditions dans lesquelles on opère) pèse 770 fois moins que l'eau.

Le volume du platine, en centimètres cubes, est $\frac{27}{21,53}$.

Celui de l'air déplacé est le même, et comme chaque centimètre cube d'air pèse $\frac{1}{770}$ grammes, le poids total de l'air est $\frac{27}{21,53 \,.\, 770}$ grammes.

De même, le volume du cuivre est $\frac{27}{8,30}$, et le poids de l'air déplacé est $\frac{27}{8,30 \,.\, 770}$ grammes.

La différence x de ces deux poids sera ce qu'il faut ajouter pour établir l'équilibre dans le vide:

$$x = \frac{27}{770}\left(\frac{1}{8,30} - \frac{1}{21,53}\right) = \frac{27 \,.\, 13,23}{770 \,.\, 8,30 \,.\, 21,53}.$$

$$\begin{aligned}
\log 27 &= 1{,}4313638 + \\
\log 13{,}23 &= 1{,}1215598 + \\
\log 770 &= 2{,}8864907 - \\
\log 8{,}30 &= 0{,}9190781 - \\
\log 21{,}53 &= 1{,}3330440 - \\
\hline
\log x &= \bar{3}{,}4143108 \\
x &= 0^{g}{,}002608.
\end{aligned}$$

CCXXIV.

(Mardi, 31 juillet. — 1re série.)

1° Règles de l'addition, soustraction, multiplication et division des fractions.

2° On a un triangle ABC; on connaît l'angle A, l'angle B et le côté AB; calculer l'angle C et les deux autres côtés; calculer la surface en hectares, ares et centiares.

Cette question se trouve dans tous les traités de trigonométrie, sous la dénomination de premier cas de résolution des triangles.

CCXXV.

(Mardi, 31 juillet. — 2e série.)

1° Résoudre l'équation $x^2 + px + q = 0$. Discussion.

2° Étant donné un cône tronqué dont la hauteur est H, le rayon de la base supérieure 4 mètres, celui de la base inférieure 22 mètres, trouver le rayon d'un cylindre de même hauteur H, dont le volume soit équivalent à celui du tronc de cône.

3° Étant donnés deux couples de fractions $\frac{4}{7} + \frac{9}{16}$ et $\frac{2}{3} + \frac{3}{11}$, on demande quel est le plus grand des deux couples. Si l'on multiplie chaque fraction du premier couple par celle qui occupe le même rang dans le second, on demande quel sera le plus grand des deux produits obtenus.

Deuxième question. En désignant par x le rayon du cylindre, on aura

$$\pi x^2 . \mathrm{H} = \frac{\pi \mathrm{H}}{3} (22^2 + 4^2 + 22 . 4);$$

d'où

$$x^2 = \sqrt{196},$$
$$x = 14^{\mathrm{m}}.$$

Troisième question. Le premier couple équivaut à $\frac{64}{112} + \frac{63}{112}$ ou $\frac{127}{112} = 1 + \frac{15}{112}$; le second couple équivaut à $\frac{22}{33} + \frac{9}{33}$ ou $\frac{31}{33} = 1 - \frac{2}{33}$. Le premier couple est donc plus grand que le second.

En multipliant $\frac{4}{7}$ par $\frac{2}{3}$, on trouve $\frac{8}{21}$;

En multipliant $\frac{9}{16}$ par $\frac{3}{11}$, on trouve $\frac{27}{176}$.

Le premier produit surpasse le second, puisqu'il équivaut à $\frac{1408}{21 \,.\, 176}$, tandis que le second équivaut à $\frac{567}{21 \,.\, 176}$.

CCXXVI.

(Mercredi, 1er août.)

1° De l'aimantation par les courants et des télégraphes électriques.

2° A quelle température amènerait-on 300 litres d'eau prise à 15° centigrades, en y faisant condenser 25 kilogrammes de vapeur d'eau bouillante, à la pression ordinaire? On suppose que la chaleur latente de la vapeur d'eau est de 530 calories. On ne tiendra pas compte de l'influence du vase.

Les 25 kilogrammes de vapeur contiennent 530 unités de chaleur latente et 100 unités de chaleur sensible; si nous désignons par x la température finale, la chaleur perdue par la vapeur sera

$$25\ (630 - x).$$

L'eau gagnera 300 $(15 + x)$ unités de chaleur. De là l'équation :

$$25\ (630 - x) = 300\ (15 + x);$$
$$x = 34°,61.$$

CCXXVII.

(Jeudi, 2 août.)

1° Des lentilles concaves et convexes.

2° On donne un ballon qui contient $11^{kg},572$ d'air à la pression de $0^m,75$ et à 0^o; ce même ballon est successivement rempli d'un premier gaz qui pèse $12^{gr},317$ à $0^m,79$ de pression, puis d'un second gaz qui pèse $7^{gr},221$ à la pression $0^m,70$. On demande les densités des deux gaz par rapport à celle de l'air prise pour unité.

Pour déterminer ces densités, il faut ramener les poids à ce qu'ils seraient à la pression $0^m,75$, correspondant à la pesée de l'air.

Or les poids x, x' des gaz sont proportionnels aux pressions; donc

$$x = 12^g,317 \cdot \frac{0,75}{0,79} = 11^g,693,$$

$$x' = 7^g,221 \cdot \frac{0,75}{0,70} = 7^g,736.$$

Les densités des deux gaz par rapport à celle de l'air prise pour unité sont donc

$$\text{pour le premier : } \frac{11,693}{11,572} = 1,01,$$

$$\text{pour le second : } \frac{7,736}{11,572} = 0,66.$$

CCXXVIII.

(Vendredi, 3 août.)

1° De la lunette astronomique et du télescope de Newton.

2° Une sphère creuse en argent pèse, quand elle est vide, 726gr,05; le poids de l'eau qu'elle contient à 0°, est 2521gr,35; la densité de l'argent est 10,47.

On demande quelle est la circonférence d'un grand cercle de cette sphère.

Le volume de l'argent est, en centimètres cubes, $\frac{726{,}05}{10{,}47}$,

ou $$69{,}34.$$

Le volume de l'eau est 2521,35.

Le volume de la sphère, dont je désigne le rayon par R, est $\frac{4}{3}\pi R^3 = 69{,}34 + 2521{,}35 = 2590{,}69$;

donc $$R = \sqrt[3]{\frac{2590{,}69 \times 3}{4\pi}}.$$

La circonférence de cette sphère est :

$$x = 2\pi \sqrt[3]{\frac{2590{,}69 \,.\, 3}{4\pi}} = \sqrt[3]{2590{,}69 \,.\, 6 \,.\, \pi^2}.$$

$$\begin{aligned} \log 2590{,}69 &= 3{,}4134155 + \\ \log 6 &= 0{,}7781512 + \\ \log \pi &= 0{,}4971499 + \\ \log \pi &= 0{,}4971499 + \\ \hline \log x^3 &= 5{,}1858663 \\ \log x &= 1{,}7286221 \\ x &= 53{,}533 \text{ centimètres.} \end{aligned}$$

CCXXIX.

(Samedi, 4 août.)

1° Expliquer la construction et l'usage du manomètre.

2° Un manomètre est divisé en 110 parties d'égale capacité. Quand la pression extérieure est de $0^m,76$, le mercure se tient au zéro de l'échelle dans l'intérieur de l'éprouvette et dans le bain. On porte ce manomètre dans une machine où l'on comprime l'air, et l'on voit le mercure s'élever jusqu'à la 80ème division; enfin, on mesure la hauteur du mercure dans le tube, et on la trouve de $0^m,45$. On demande la pression dans la machine.

En désignant par x la tension de l'air dans l'éprouvette, après le jeu de la machine, on a, par la loi de Mariotte :

$$\frac{110}{80} = \frac{x}{0,76};$$

d'où

$$x = 1^m,045.$$

La pression de l'air dans la machine sera donc :

$$1^m,045 + 0^m,45 = 1^m,495.$$

CCXXX.

(Lundi, 6 août.)

1° Quels sont les faits fondamentaux présentés par les courants d'induction?

2° Le coefficient de dilatation linéaire du fer est $\frac{1}{795}$; celui du zinc, $\frac{1}{340}$. On demande quelle sera la longueur d'une barre de zinc qui se dilatera autant qu'une barre de fer de 2 mètres de longueur.

La barre de fer se dilate, par degré, de $2 \cdot \frac{1}{795}$.

La barre de zinc se dilate, par degré, de $x \cdot \frac{1}{340}$.

Puisque ces deux barres se dilatent également, on aura :

$$\frac{x}{340} = \frac{2}{795};$$

d'où $$x = 0^{m},855.$$

CCXXXI.

(Mardi, 7 août.)

1° De l'équilibre des liquides et du principe de transmission de pression.

2° Combien faut-il de kilogrammes de glace pour liquéfier et amener à 0°,3 kilogrammes de vapeur d'eau dégagée d'un appareil où la pression est de $0^m,76$? On prendra 540 pour la chaleur latente de la vapeur.

x kilogrammes de glace absorberont, pour se fondre, $x \,.\, 79$ unités de chaleur. Les 3 kilogrammes de chaleur perdront de leur côté, pour arriver à 0°, $640 \,.\, 3$ unités de chaleur; on aura donc

$$x \,.\, 79 = 640 \,.\, 3\,;$$

d'où $$x = 24^{kg},3.$$

SESSION DE DÉCEMBRE 1855.

CCXXXII.

(Lundi, 3 décembre 1855.)

1° Lois de la réfraction.

2° Un tuyau cylindrique en bronze a $0^m,75$ de long, $0^m,36$ de diamètre intérieur, et ses parois ont $0^m,08$ d'épaisseur. La densité du bronze est 8,46.

On demande le poids de ce tuyau quand il est vide, et quand il est plein d'eau, à la température de 0°.

Le volume V du bronze est la différence des volumes de deux cylindres ayant tous deux 75 centimètres de hauteur, et dont les rayons sont 18 centimètres et 26 centimètres. Par conséquent,

$$\begin{aligned} V &= \pi \,.\, 75\,(26^2 - 18^2) \\ &= \pi \,.\, 75 \,.\, 44 \,.\, 8\,; \end{aligned}$$

ou, en effectuant,

$$V = 26400 \,.\, \pi.$$

Le poids du bronze est donc, en grammes,

$$P = 26400 \,.\, \pi \,.\, 8{,}46.$$

$$\begin{aligned} \log 26400 &= 4{,}4216039 \\ \log \pi &= 0{,}4971499 \\ \log 8{,}46 &= 0{,}9273703 \\ \hline & 5{,}8461241 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= 701\,656 \text{ grammes}, \\ &= 701^{\text{kg}},656. \end{aligned}$$

Le poids de l'eau contenue dans le tuyau est, en grammes,

$$\begin{aligned} P' &= \pi \,.\, 18^2 \,.\, 75 \\ &= 24300 \,.\, \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 24300 &= 4{,}3856062 \\ \log \pi &= 0{,}4971499 \\ \hline \log P' &= 4{,}8827561 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P' &= 76\,340 \text{ grammes}, \\ &= 76^{\text{kg}},340. \end{aligned}$$

CCXXXIII.

(Mardi, 4 décembre.)

1° Sur un même plan se trouvent un cercle et un angle, dont les côtés coupent ou touchent le cercle. Quelle est la mesure de l'angle dans les diverses positions du sommet ?

2° Trois cercles ont pour rayons 20 mètres, 28 mètres et 29 mètres. On demande quel sera le rayon d'un quatrième cercle équivalent à la somme des trois premiers.

3° La somme de deux nombres est 100; la somme de leurs carrés est 5018. On demande quels sont ces deux nombres.

Deuxième question. En désignant par x le rayon du cercle cherché, on aura :

$$x^2 = 20^2 + 28^2 + 29^2 = 2025;$$
$$x = 45 \text{ mètres}.$$

Troisième question. Les équations du problème sont :

$$x + y = 100, \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 = 5018. \qquad (2)$$

Si l'on élève au carré les deux membres de l'équation (1), et qu'on retranche ensuite l'équation (2), on obtient :

$$xy = \frac{1}{2}(10000 - 5018) = 2491.$$

Par conséquent :

$$x = 50 + \sqrt{50^2 - 2491} = 50 + 3 = 53,$$
$$y = 50 - 3 = 47.$$

CCXXXIV.

(Mercredi, 5 décembre.)

1° Démontrer les théorèmes qui servent à trouver la mesure de la surface du rectangle.

2° Résoudre les équations suivantes :

$$5x - 2y + 8z = 12,$$
$$4x - 3y + 7z = 19,$$
$$7x - 4y + 8z = 21.$$

1° En éliminant y entre la première et la troisième, on obtient d'abord

$$3x - 2z = 3.$$

2° Si, de la somme de la première et de la troisième, on retranche le double de la deuxième, on trouve

$$4x - 3z = -5.$$

3° Enfin, l'élimination de z, entre ces deux dernières équations, donne

$$x = 19.$$

Par suite, $$z = 27,$$

et $$y = \frac{1}{2}(95 + 81 - 12) = 82.$$

CCXXXV.

(Jeudi, 6 décembre.)

1° Si deux droites sont parallèles et que l'une d'elles soit perpendiculaire à un plan, l'autre sera aussi perpendiculaire à ce plan.

2° Deux arcs A et B d'une même circonférence sont donnés, savoir:

$$A = 85^\circ\ 31'\ 22''$$
$$B = 3^\circ\ 17'\ 24'',7.$$

On veut calculer à un millième près le rapport de A à B.

3° AB est le diamètre d'un demi-cercle qui a son centre en O, et sur chacun des rayons OA, OB, on décrit aussi un demi-cercle. On demande le volume décrit par la surface comprise entre les deux demi-cercles, lorsque la figure fait une révolution complète autour de AB.

Deuxième question. L'arc A vaut 307822''; et l'arc B, 11844'',7.

Le rapport demandé est donc

$$\frac{307822}{11844,7} = 25,988.$$

Troisième question. Chacun des petits demi-cercles engendre une sphère qui est le $\frac{1}{8}$ de la sphère engendrée par le grand demi-cercle. Par conséquent, le volume cherché est les $\frac{3}{4}$ du volume de cette dernière sphère. Si R est le rayon du demi-cercle donné,

$$V = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \pi R^3.$$

CCXXXVI.

(Vendredi, 7 décembre.)

1° Théorie des vases communiquants.

2° On suppose que dans 300 litres d'eau à 14°, on a fait condenser 25 kilogrammes de vapeur d'eau bouillante, à la pression ordinaire, et que la température de la masse entière a été portée à 61°,4; on demande quelle est la chaleur latente de la vapeur d'eau. On supposera qu'il n'y a point de chaleur employée à l'échauffement du vase, ou perdue pendant l'échauffement de la masse.

Soit x la chaleur latente de la vapeur d'eau, c'est-à-dire la quantité de chaleur latente contenue dans 1 kilogramme de vapeur à 100° : les 25 kilogrammes de vapeur perdront d'abord en se condensant $25 . x$; de plus, comme le mélange doit rester à 61°,4, ils perdront encore

$$25\,(100^\circ - 61^\circ 4);$$

la chaleur gagnée par les 300 litres d'eau à 14° sera :

$$300\,(61,4 - 14).$$

On aura donc l'équation :

$$25\,.\,x + 25\,(100 - 61,4) = 300\,(61,4 - 14);$$

d'où

$$x = \frac{300\,.\,47,4 - 25\,.\,38,6}{25}$$

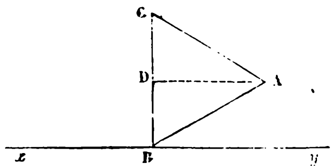
$$= 530,4.$$

CCXXXVII.

(Samedi, 8 décembre.)

1° Donner les principes sur lesquels est fondée la construction des télégraphes électriques.

2° Un triangle équilatéral en acier, de $0^m,15$ de côté, tourne sur un de ses côtés, et s'enfonce ainsi complétement dans un bloc de marbre dont la densité est 2,72. L'axe de rotation est normal à la surface du bloc, et le triangle pénètre par son sommet. Quelle est la perte de poids que le bloc de marbre doit subir dans cette opération?



Le volume V du marbre enlevé par le triangle tournant autour de CB se composera: 1° du volume d'un cône ayant BD pour hauteur, et DA pour rayon de sa base; 2° du volume d'un cylindre de même base et de même hauteur que le cône.

Si nous désignons par a le côté BC du triangle tournant, nous aurons

$$BD = \frac{a}{2}, \qquad \overline{AD}^2 = \frac{3}{4}a^2;$$

donc

$$V = \frac{3}{4}\pi a^2 \left(\frac{1}{6}a + \frac{1}{2}a\right)$$
$$= \frac{1}{2}\pi a^3.$$

Prenant le décimètre pour unité, nous aurons donc :

$$V = \frac{1}{2}\pi (1,5)^3 = \frac{27}{16}\pi.$$

Le poids cherché sera, en kilogrammes,

$$P = \frac{27}{16}\pi \,.\, 2,72 = 27 \,.\, 0,17 \,.\, \pi,$$
$$= 14^{kg},420.$$

CCXXXVIII.

(Lundi, 10 décembre.)

1° Démontrer qu'un même cercle peut contenir tous les sommets d'un polygone régulier, et qu'un autre cercle peut être tangent à ses côtés.

2° Les côtés de deux hexagones semblables ont l'un 33, l'autre 56 mètres. Trouver le côté d'un troisième hexagone équivalent à la somme des deux autres.

3° La somme de deux nombres est 31; celle de leurs cubes est 8029. On demande ces deux nombres.

Deuxième question. En désignant par x le côté de l'hexagone cherché, on a :

$$x^2 = 33^2 + 56^2;$$
$$x = 65^{\text{m}}.$$

Troisième question. Les équations du problème sont :

$$x + y = 31, \qquad (1)$$
$$x^3 + y^3 = 8029. \qquad (2)$$

Divisant la seconde par la première, nous aurons :

$$x^2 - xy + y^2 = 259. \qquad (3)$$

Si, du carré de l'équation (1), nous retranchons l'équation (3), nous obtiendrons :

$$3xy = 31^2 - 259,$$

ou

$$xy = 234. \qquad (4)$$

Les équations (1) et (4) donnent ensuite :

$$x = \frac{1}{2}(31 + \sqrt{31^2 - 4 \,.\, 234}) = \frac{1}{2}(31 + 5);$$

ou

$$x = 18;$$

$$y = \frac{1}{2}(31 - 5) = 13.$$

CCXXXIX.

(Mardi, 11 décembre. — 1re série.)

1° Origine des fractions décimales périodiques. Comment revient-on de la fraction périodique à la fraction simple qui lui est équivalente?

2° La terre étant supposée sphérique, calculer son rayon en mètres, et sa surface en mètres carrés.

(Problème donné le 29 juillet 1853.)

CCXL.

(Mardi, 11 décembre. — 2e série.)

1° Lois des vibrations des cordes.

2° Un ballon fait avec du taffetas verni pèse $78^{kg},54$; ce taffetas pèse 250 grammes le mètre carré. On se propose de remplir le ballon avec de l'hydrogène impur, qui pèse 100 grammes le mètre cube, et on demande quelle en sera la force ascensionnelle. On suppose l'air à la température et à la pression ordinaire.

Le nombre de mètres carrés formant la surface du ballon sera le quotient de 78 540 par 250, ou $314^{m.c},56$.

En désignant par R le rayon de la sphère, on aura :

$$4\pi R^2 = 314,56\,;$$

d'où

$$R = \sqrt{\frac{78,64}{\pi}}.$$

Le volume du ballon est $\frac{4}{3}\pi R^3$; et puisque 1 mètre cube d'hydrogène pèse 100 grammes, le poids de l'hydrogène est

$$\frac{4}{3}\pi \,.\, 100 \,.\, R^3.$$

Comme 1 mètre cube d'air pèse 1300 grammes, le poids de l'air déplacé par le ballon est

$$\frac{4}{3}\pi \,.\, 1300 \,.\, R^3.$$

La force ascensionnelle du ballon est la différence F entre le poids de l'air et celui du ballon plein :

$$F = \frac{4}{3}\pi . 1300 . R^3 - \frac{4}{3}\pi . 100 . R^3 - 78640$$

$$= 1600\pi . R^3 - 78640$$

$$= 1600 \sqrt{\frac{(78,64)^3}{\pi}} - 78640.$$

$$\begin{aligned} \log 78,64 &= 1,8956435 \\ 3 \log 78,64 &= 5,6869305 + \\ \log \pi &= \underline{0,4971499} - \\ & 5,1897806 \\ \frac{1}{2} &= 2,5948903 + \\ \log 1600 &= \underline{3,2041200} + \\ & 5,7990103 \end{aligned}$$

Nomb. corresp. $= 629521$.

$$F = 629521 - 78640 = 550881 \text{ grammes};$$

ou $$F = 550^{kg},881.$$

CCXLI.

(Mercredi, 12 décembre. — 1re série.)

1° Démontrer que les aires de deux triangles semblables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues.

2° Résoudre le système des 3 équations :

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{2z}{7}=58.$$

$$\frac{5x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=76.$$

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{5}+\frac{7z}{40}=\frac{147}{5}.$$

En résolvant ces équations par les méthodes connues, on trouve :

$$x= 12,$$
$$y= 30,$$
$$z=168.$$

CCXLII.

(Mercredi, 12 décembre. — 2e série.)

1° Expliquer les effets de la loupe et des microscopes.

2° On suppose que, dans une certaine masse d'eau qui avait une température de 14°, on a fait condenser 25 kilogrammes de vapeur d'eau bouillante, à la pression ordinaire de l'atmosphère, et que la température de la masse entière a été élevée à 61°,4. Quelle était cette quantité d'eau? On suppose qu'il n'y a pas eu de chaleur employée à chauffer le vase, et qu'il ne s'en est pas perdu pendant l'expérience; on sait d'ailleurs que la chaleur latente de la vapeur est 530.

Les 25 kilogrammes de vapeur perdent, en se condensant, un nombre d'unités de chaleur exprimé par

$$25 \,.\, 530 + 25\,(100 - 61{,}4).$$

Les x kilogrammes d'eau gagnent un nombre d'unités de chaleur exprimé par

$$x\,(61{,}4 - 14)\,;$$

d'où l'équation :

$$25\,(630 - 61{,}4) = x\,(61{,}4 - 14).$$

$$x = 299^{\text{kg.}}{,}89.$$

CCXLIII.

(Jeudi, 13 décembre. — 1re série.)

1° Démontrer que si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un d'eux sera perpendiculaire à l'autre.

2° Démontrer que si l'on mène un plan par deux arêtes opposées d'un parallélipipède quelconque, le volume sera divisé en deux prismes triangulaires equivalents.

3° Partager 590 en deux parties dont le produit est égal à 80 464.

Les deux parties seront données par la formule :

$$x = 295 \pm \sqrt{295^2 - 80464},$$

$$x = 295 \pm 81.$$

Elles sont donc 376 et 214.

CCXLIV.

(Jeudi, 13 décembre. — 2e série.)

1° De la loi de Mariotte et des manomètres.

2° On a deux thermomètres à mercure construits avec le même verre; l'un a une boule dont le diamètre intérieur est $0^m,0075$, et un tube dont le diamètre intérieur est $0^m,0025$; l'autre a une boule de $0^m,0062$ de diamètre intérieur, et un tube de $0^m,0015$ de diamètre intérieur. On demande quel est le rapport de longueur d'un degré dans les deux thermomètres.

Prenons pour unité le dix-millimètre.

Le volume du mercure, dans le réservoir du premier thermomètre, est

$$\frac{\pi\, 75^3}{6}.$$

Pour une variation de température de 1°, ce volume devient $\frac{\pi \,.\, 75^3}{6}\left(1+\frac{1}{5550}\right)$, c'est-à-dire que son augmentation a été de $\frac{\pi \,.\, 75^3}{6 \,.\, 5550}$.

Or, cette augmentation est représentée par un petit volume cylindrique de mercure, correspondant à 1° du tube dont le diamètre est 25. En désignant par x la hauteur de ce degré, son volume est $\frac{\pi \,.\, 25^2 \,.\, x}{4}$;

d'où
$$\frac{\pi \,.\, 25^2 \,.\, x}{4}=\frac{\pi \,.\, 75^3}{6 \,.\, 5550},$$

et
$$x=\frac{75^3 \,.\, 4}{25^2 \,.\, 6 \,.\, 5550}.$$

En répétant le même raisonnement pour l'autre thermomètre, et en désignant par y la longueur d'une de ses divisions, on a :

$$\frac{\pi \cdot 15^2 \cdot y}{4} = \frac{\pi \cdot 62^3}{6 \cdot 5550},$$

et

$$y = \frac{62^3 \cdot 4}{15^2 \cdot 6 \cdot 5550}.$$

Enfin

$$\frac{x}{y} = \frac{75^3 \cdot 15^2}{62^3 \cdot 25^2}.$$

$$= 0{,}63.$$

C'est-à-dire qu'un degré du premier thermomètre est les $\frac{63}{100}$ d'un degré du second.

CCXLV.

(Vendredi, 14 décembre.)

1° Lois des vibrations des cordes.

2° Un ballon sphérique a $1^m,25$ de rayon; il est formé de papier pesant 10 grammes le mètre carré, et il est rempli d'air chaud. La température de l'atmosphère est de 7° au-dessus de zéro, et le coefficient de dilatation de l'air est $0^m,00366$. On demande quelle devra être la température de l'air contenu dans le ballon pour qu'il puisse s'élever.

On sait qu'un mètre cube d'air, à 0° et à $0^m,76$, pèse 1300 grammes; son poids à 7° sera :

$$x = \frac{1300}{1 + 0,00366 \cdot 7}$$

$$= \frac{1300}{1,02562}.$$

Le volume du ballon étant $\frac{4}{3}\pi \cdot (1,25)^3$, le poids de l'air déplacé sera :

$$\frac{4}{3}\pi \cdot (1,25)^3 \frac{1300}{1,02562}.$$

Le poids de l'air contenu à la température y sera :

$$\frac{4}{3}\pi \cdot (1,25)^3 \frac{1300}{1 + 0,00366 \cdot y}.$$

Le poids du taffetas est :

$$4\pi \,.\, (1{,}25)^2 \,.\, 10.$$

Pour que le ballon puisse s'élever, il faut que son poids soit moindre que celui de l'air déplacé. On a donc :

$$\frac{4}{3}\pi\,(1{,}25)^3 \,.\, \frac{1300}{1 + 0{,}00366\,y} + 4\pi\,(1{,}25)^2 \,.\, 10$$
$$< \frac{4}{3}\pi\,(1{,}25)^3 \,.\, \frac{1300}{1{,}02562}.$$

Cette inégalité devient, par des simplifications successives,

$$1{,}25 \,.\, \frac{1300}{1 + 0{,}00366 \,.\, y} + 30 < 1{,}25 \,.\, \frac{1300}{1{,}02562},$$

$$\frac{1625}{1 + 0{,}00366\,y} < \frac{1625}{1{,}02562} - 30,$$

$$\frac{1625}{1 + 0{,}00366\,y} < \frac{1594{,}2314}{1{,}02562},$$

$$0{,}00366\,y > \frac{1625 \,.\, 1{,}02562}{1594{,}2314} - 1.$$

$$\begin{aligned} \log 1625 &= 3{,}2108534 + \\ \log 1{,}02562 &= 0{,}0109864 + \\ \log 1594{,}2314 &= 3{,}2025513 - \\ \hline & \ 0{,}0192885 \end{aligned}$$

Nomb. corresp. $= 1{,}04541$.

Donc $$y > \frac{0{,}04541}{0{,}00366},$$

ou enfin $$y > 12^\circ{,}4.$$

La température de l'air chaud devra donc être supérieure à 12°,4, pour que le ballon puisse s'élever.

CCXLVI.

(Samedi, 15 décembre. — 1re série.)

1° Qu'est-ce que le poids spécifique d'un corps? — Par quels procédés peut-on le déterminer?

2° Comment fait-on un électro-aimant?

3° Le poids spécifique du mercure étant 13,59 à 0°, on demande quel est, à 85°, le volume de 30 kilogrammes de ce métal. On prendra, pour coefficient de dilatation cubique du mercure, $\frac{1}{5550}$.

Le volume des 30 kilogrammes de mercure est, à 0°, $\frac{30}{13,59}$ litres.

Pour connaître ce que devient à $t°$ un volume V pris à 0°, le coefficient de dilatation de la matière étant k, on emploie la formule :

$$V' = V\,(1 + kt).$$

Dans l'exemple donné :

$$V' = \frac{30}{13,59}\left(1 + \frac{85}{5550}\right)$$

$$= \frac{3 \,.\, 5635}{13,59 \,.\, 555}$$

$$= 2^{l},24.$$

CCXLVII.

Samedi, 15 décembre. — 2e série.)

1° Construire graphiquement un triangle dont on connaît la base, la hauteur et l'angle opposé à la base.

2° On donne trois cubes : le premier a 3 mètres de côté, le deuxième 4 mètres, le troisième 5 mètres. On demande quel sera le côté d'un quatrième cube dont le volume soit égal à la somme des volumes des trois cubes donnés.

3° Une personne emprunte une certaine somme dont elle s'acquittera par trois payements égaux de 9261 francs ; le premier après un an, le deuxième après deux ans, et le troisième après trois ans. — On demande quelle est la somme empruntée. Le taux est de 5 p. 100.

Première question. Sur la droite donnée, on construira un arc capable de l'angle donné. On mènera ensuite une parallèle à la droite, à une distance égale à la hauteur. Les points d'intersection de cette parallèle avec l'arc seront les sommets des deux triangles répondant à la question. Il n'y aura qu'une solution, si la parallèle à la base est tangente à la circonférence ; il n'y aura pas de solution, si cette parallèle ne rencontre pas la circonférence.

Deuxième question. En désignant par x le côté du cube cherché, on aura :

$$x^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3;$$

d'où

$$x = 6.$$

Troisième question. x étant la somme empruntée, on a, par la formule des annuités :

$$x \,.\, 1{,}05^3 = 9261 \,.\, [(1{,}05)^2 + 1{,}05 + 1],$$

ou $$x = \frac{9261\,[1{,}1025 + 1{,}05 + 1]}{1{,}157625} = \frac{9261 \,.\, 3{,}1525}{1{,}157625}$$
$$= \frac{343 \,.\, 12{,}61}{0{,}1715}.$$

$$\begin{aligned} \log 343 &= 2{,}5352941 \,+ \\ \log 12{,}61 &= 1{,}1007151 \,+ \\ \log 0{,}1715 &= \bar{1}{,}2342641 \,- \\ \hline \log x &= 4{,}4017451 \end{aligned}$$

$$x = 25\,220 \text{ francs.}$$

CCXLVIII.

(Lundi, 17 décembre. — Une seule série.)

1° Démontrer que les aires de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont entre elles comme les carrés des rayons des cercles circonscrits.

2° Un morceau de bois, dont la densité est 0,729, a la forme d'un cône droit; son rayon de base a 0m,03, et sa hauteur, 0m,25. On le fait flotter sur l'eau de manière que son axe soit vertical, en mettant d'abord le sommet en bas, puis le sommet en haut. On demande quelle fraction de la hauteur du cône s'enfoncera dans l'eau dans chaque cas.

D'après le principe d'Archimède, il faut, pour l'équilibre, que le poids du liquide déplacé soit égal au poids du corps flottant. Dans le premier cas, le volume du liquide déplacé est celui d'un cône semblable au cône donné. D'ailleurs, les volumes semblables sont proportionnels aux cubes des dimensions homologues. Par conséquent, x étant la fraction cherchée :

$$x^3 = 0{,}729, \quad \text{ou} \quad x = 0{,}9.$$

Dans le second cas, on a pareillement :

$$1-(1-x)^3 = 0{,}729\,; \quad \text{d'où} \quad x = 1-\sqrt[3]{0{,}271}.$$

$$\frac{1}{3}\log 0{,}271 = \bar{1}{,}8109897$$

$$\text{Nomb. corresp.} = 0{,}64713.$$

$$x = 0{,}35287.$$

Remarque. L'énoncé contient deux données inutiles.

CCXLIX.

(Mardi, 18 décembre. — 1re série.)

1° Des solénoïdes.

2° Un verre à pied, de forme conique, a 0m,08 de diamètre à son bord supérieur, et 0m,12 de hauteur à l'intérieur. Il est rempli par du mercure et de l'eau dans des proportions telles, que le poids du mercure est le triple du poids de l'eau; la température est 0°, et la densité du mercure 13,598. On suppose que la densité de l'eau est 1. On demande quelle est l'épaisseur de la couche formée par chacun des liquides.

h étant la hauteur du cône de mercure, exprimée en centimètres, les volumes du mercure et de l'eau seront entre eux comme h^3 et $12^3 - h^3$.

Les poids des deux couches seront donc proportionnels à $h^3 \,.\, 13{,}598$ et $(12^3 - h^3)$.

On a donc :

$$h^3 \,.\, 13{,}598 = 3\,(12^3 - h^3);$$

d'où
$$h = 12\sqrt[3]{\frac{3}{16{,}598}}.$$

$$\begin{array}{rl}
\log 3 = & 0{,}4771212 + \\
\log 16{,}598 = & \underline{1{,}2200558 -} \\
 & \bar{1}{,}2570654 \\
\frac{1}{3} = & \bar{1}{,}7523551 + \\
\log 12 = & \underline{1{,}0791812 +} \\
\log h = & 0{,}8315363
\end{array}$$

$$h = 6{,}7848 \text{ centimètres.}$$

La hauteur de la couche d'eau est, par suite, 5,2152 centimètres.

Remarque. L'énoncé renferme une donnée superflue.

CCL.

(Mardi, 18 décembre. — 2e série.)

1° Démontrer les principales propriétés des progressions géométriques.

2° Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = o$. (Discussion.)

3° On a deux cercles, dont l'un a 20 mètres de rayon, l'autre 21 mètres. Chercher le rayon d'un cercle dont la surface est égale à la somme des surfaces des deux autres cercles.

En désignant par x le rayon du cercle cherché, on a :

$$x^2 = 21^2 + 20^2;$$

d'où

$$x = 29.$$

CCLI.

Mercredi, 19 décembre. — 1re série.)

1° Dire comment on met les problèmes en équations ; comment on résout plusieurs équations du 1er degré renfermant plusieurs inconnues.

2° Le côté d'un cône est $25^m,7$; la surface de sa base est de 4 mètres carrés. On demande de calculer la surface du cercle dont le plan est distant de $3^m,42$ du plan de la base.

Le carré du rayon de la base est $r^2 = \frac{4}{\pi}$.

En second lieu, la hauteur h du cône est l'un des petits côtés d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est 25,7, et dont l'autre petit côté égale $\sqrt{\frac{4}{\pi}}$.

Donc :

$$h^2 = (25,7)^2 - \frac{4}{\pi}. \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}
\log 4 &= 0,6020600 + \\
\log \pi &= \underline{0,4971499} - \\
\log \frac{4}{\pi} &= 0,1049101 \\
\frac{4}{\pi} &= 1,27321. \\
h^2 &= 660,49 - 1,27321 = 659,21679 \\
\log h^2 &= 2,8190283 \\
\frac{1}{2} &= \underline{1,4095141} \\
h &= 25,6752.
\end{aligned}$$

Enfin, si l'on représente par A l'aire cherchée, on aura, par le théorème sur les sections faites dans un cône, par des plans parallèles :

$$\frac{h^2}{(h-3,42)^2}=\frac{4}{A}. \qquad (2)$$

On a donc, à cause des valeurs de h^2 et de h :

$$A=4\,\frac{(22,2552)^2}{659,21679}.$$

$$\begin{aligned}
\log 4 &= 0,6020600 + \\
\log 22,2522 &= 1,3473730 \\
2 \log 22,2522 &= 2,6947460 + \\
\log 659,21679 &= 2,8190283 - \\
\hline
\log A &= 0,4777777
\end{aligned}$$

A = 3,00454 mètres carrés.

CCLII.

(Mercredi, 19 décembre. — 2e série.)

1° Un objet est placé devant un miroir plan; donner la position de l'image; indiquer les déplacements de l'image correspondant aux déplacements de l'objet.

2° Un corps pèse dans l'air $7^{gr},55$; dans l'eau $5^{gr},17$; dans un autre liquide $6^{gr},35$. Tirer de ces données la densité du corps et celle du liquide par rapport à l'eau.

Le poids spécifique p du corps s'obtient en divisant son poids dans l'air par la perte de poids qu'il subit dans l'eau :

$$p = \frac{7,55}{7,55 - 5,17} = 2,33.$$

Le poids spécifique p' du second liquide s'obtient en divisant la perte de poids du corps dans le liquide, par la perte de poids dans l'eau; car ces deux pertes représentent les poids de deux volumes égaux de liquide et d'eau.

Donc :

$$p' = \frac{7,55 - 6,35}{7,55 - 5,17} = 0,504.$$

CCLIII.

(Jeudi, 20 décembre. — 1re série.)

1° Description de la lunette de Galilée, de la lunette astronomique et du télescope de Newton.

2° Quel est le diamètre d'un fil de platine qui pèse 27 grammes par mètre de longueur? On prendra pour densité du platine 21,53.

En prenant pour unité le centimètre, on aura, pour le poids d'un mètre de fil de platine :

$$\frac{1}{4}\pi \,.\, D^2 \,.\, 100 \,.\, 21{,}53 = 27.$$

$$D^2 = \frac{108}{\pi \,.\, 2153}.$$

$$\begin{aligned} \log 108 &= 2{,}0334237 + \\ \log \pi &= 0{,}4971499 - \\ \log 2153 &= 3{,}3330440 - \\ \hline 2 \log D &= \bar{2}{,}2032298 \\ \log D &= \bar{1}{,}1016149. \end{aligned}$$

$$D = 0{,}126 \text{ centimètres.}$$

CCLIV.

Jeudi, 20 décembre. — 2e série.)

1° Démontrer que les volumes de deux pyramides semblables sont entre eux comme les cubes des côtés homologues.

2° Si l'on réduit une fraction ordinaire en décimales, et qu'on ne puisse point trouver un quotient exact, démontrer que la fraction sera périodique.

3° Effectuer la division suivante :

$$32x^5 + 243 \text{ par } 2x + 3.$$

Le quotient de cette division est :

$$16x^4 - 24x^3 + 36x^2 - 54x + 81.$$

CCLV.

(Vendredi, 21 décembre. — 1re série.)

1° De la presse hydraulique.

2° Quel est le diamètre d'un fil d'or qui pèse 26 grammes par mètre de longueur? On prendra pour la densité de l'or 19,26.

3° On mêle 8 kilogrammes de glace à 0° avec 35 kilogrammes d'eau à 59°. On demande quelle sera la température du mélange.

Deuxième question. En prenant pour unité le centimètre, on aura, pour le poids d'un mètre de fil d'or :

$$\frac{1}{4}\pi D^2 . 100 . 19,26 = 26;$$

$$D^2 = \frac{26 . 4}{\pi . 1926} = \frac{52}{\pi . 963}.$$

$$\begin{aligned} \log 52 &= 1,7160033 \\ \log \pi &= 0,4971499 \ - \\ \log 963 &= 2,9836262 \ - \\ \hline 2 \log D &= \bar{2},2352272 \\ \log D &= \bar{1},1176136. \end{aligned}$$

$$D = 0,131 \text{ centimètres.}$$

Troisième question. x étant la température finale, la chaleur gagnée par les 8 kilogrammes d'eau sera :

$$8\ (79 + x);$$

la chaleur perdue par les 35 kilogrammes d'eau sera :

$$35\ (59 - x).$$

Donc :

$$8\ (79 + x) = 35\ (59 - x)$$

$$x = 33^{\circ},3.$$

CCLVI.

(Vendredi, 21 décembre. — 2e série.)

1° Démontrer la règle de la division des fractions ordinaires.

2° S'il faut 1 centimètre cube d'or pour dorer la surface latérale d'un cylindre ayant $0^m,75$ de hauteur et $0^m,2$ de rayon, quelle sera l'épaisseur de la couche d'or?

Le centimètre étant pris pour unité, la surface latérale du cylindre donné a pour expression : $2\pi . 20 . 75$, ou 3000π.

Cette aire, multipliée par l'épaisseur x de la couche d'or, donnera le volume de l'or employé.

Donc :

$$3000\pi . x = 1,$$

ou

$$x = \frac{1}{3000 . \pi}.$$

$$\begin{aligned} \log 1 &= 0 \\ \log \pi &= 0,4971499 - \\ \log 3000 &= 3,4771212 - \\ \hline \log x &= \bar{4},0257289 \end{aligned}$$

$$x = 0,000106 \text{ centimètres.}$$

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Ce, rue Racine, 26.

Paris. — Imprimerie de E. THUNOT ET Ce, 26, rue Racine.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Ce, rue Racine, 26.