Bien raisonner en TSUM

(Transition Secondaire-Université en Mathématiques)

par Jacques BAIR

Bien raisonner est assurément une des compétences clés que doivent acquérir et développer les étudiants entrant à l'Université. Nous y consacrons entièrement ce travail illustré par de nombreux exemples construits à partir de notre expérience professionnelle.
En premier lieu, nous distinguons, à la suite de G. Polya, les raisonnements plausibles des raisonnements démonstratifs. Ensuite, nous nous intéressons à certains éléments de logique qui nous paraissent importants au niveau d'une TSUM. Puis, nous analysons la nature de preuves mathématiques à ce stade de l'apprentissage. Enfin, nous dissertons quelque peu sur l'usage des démonstrations dans l'enseignement.
Ce travail se termine par deux annexes techniques, relatives respectivement à différents types de syllogismes et à quelques éléments plus formels de logique mathématique.

1. Les types de raisonnement

Très schématiquement, un raisonnement consiste en une activité intellectuelle qui conduit un individu à déduire, de manière argumentée et convaincante, une conclusion à partir de certaines prémisses (qui sont des hypothèses formulées a priori, des données observées, …). Polya [1] prétend que l'homme recourt essentiellement à deux types de raisonnements, à savoir les raisonnements <u>plausibles</u> ou <u>démonstratifs</u>. Cette affirmation peut être illustrée concrètement par ces quelques exemples typiques :

- Raisonnement plausible pour justifier des hypothèses

En guise d'illustrations, citons les cas suivants :

- une preuve inductive du physicien ou du biologiste
- une preuve de l'historien basée sur des documents
- une preuve du juriste basée sur des indices
- une preuve de l'économiste basée sur une étude statistique d'observations
- …

- Raisonnement démonstratif pour assurer la validité de connaissances scientifiques ; c'est l'objet typique d'une preuve mathématique

[1] G. Polya, *Les mathématiques et le raisonnement '' plausible''*, Gauthier-Villars, Paris, 1958.

Toujours selon cet auteur, la différence fondamentale entre ces deux types de raisonnement dépend de la nature de la conclusion tirée, essentiellement du « degré de confiance » qu'elle provoque : elle peut être soit une présomption dans le cas d'un raisonnement plausible, soit une certitude pour un raisonnement démonstratif. Polya précise [2]:

- *« Dans le raisonnement plausible, l'essentiel est de distinguer une présomption d'une autre, une présomption plus raisonnable d'une présomption qui l'est moins*
- *Dans le raisonnement démonstratif, l'essentiel est de distinguer une preuve d'une présomption, une démonstration valable d'une tentative qui a échoué ».*

En d'autres termes, on pourrait dire, selon une formule certes schématique mais fort parlante, que les mathématiciens utilisent des « si … alors … », alors que les autres scientifiques dégagent seulement des « alors … ». Expliquons quelque peu [3] cette distinction en l'illustrant à partir de syllogismes [4]. Un exemple typique de raisonnement démonstratif consiste à construire un syllogisme en choisissant comme prémisse majeure l'affirmation « tous les hommes sont mortels », et comme mineure l'affirmation « je suis un homme » ; de ces deux prémisses supposées vraies, on en déduit la véracité de la conclusion « je suis mortel » ; plus généralement, pour des affirmations P (dans notre exemple « être un homme ») et Q (ici « être mortel »), la majeure peut se mettre sous la forme « si P alors Q », la mineure sous la forme « P » et la conclusion étant « Q », ce qui note symboliquement

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ P \\ ---- \\ Q \end{array}$$

Un tel syllogisme est appelé *modus ponens* ; ce nom est issu du verbe latin « *ponere* » qui signifie « poser », car « en posant P, on pose Q ». Ce type de raisonnement peut de façon équivalente se traduire d'une manière ensembliste assez parlante : pour des ensembles A et B d'un même référentiel et un objet x de celui-ci, il est indiscutable que

[2] G. Polya, *ibidem*, p. X.
[3] Nous reviendrons plus en détail sur la logique dans la section 2.
[4] Un syllogisme est un raisonnement élémentaire composé uniquement de trois propositions, dont une, appelée la *conclusion*, se déduit des deux autres, les *prémisses* qui sont baptisées la *majeure* et la *mineure*. Pour en savoir plus à ce sujet, voir la première annexe.

$$\begin{array}{l} A \subset B \\ x \in A \\ ---- \\ x \in B \end{array}.$$

Un autre type de syllogisme déductif est le suivant, livré respectivement sous forme propositionnelle puis en version ensembliste, en faisant appel au symbole $\neg$ pour indiquer une négation ainsi qu'à des notations courantes en théorie des ensembles :

$$\begin{array}{ll} P \Rightarrow Q & A \subset B \\ \neg Q & x \notin B \\ ---- & ---- \\ \neg P & x \notin A \end{array};$$

un tel syllogisme est nommé *modus tollens*, l'appellation provenant du verbe latin « *tollere* » dont la traduction française est « enlever », car « en enlevant *Q*, on enlève *P* ».

On peut construire un syllogisme à partir de deux affirmations *P* et *Q*, en conservant la majeure « si *P*, alors *Q* », mais en supposant la mineure *P* plausible (et non nécessairement certaine) ou encore échangeant les rôles des deux affirmations dans la mineure et aussi dans la conclusion ; cette dernière n'est alors plus certaine, mais seulement plausible : on parle alors de *syllogisme heuristique*. En voici trois cas concrets qui pourraient être rencontrés dans la vie de tous les jours :

1) On se doute que *P* est plausible. Or, on sait que si *P* est vrai, alors *Q* l'est également. Donc, on peut en conclure que *Q* est plausible. On peut même ajouter que *Q* est plus ou moins croyable selon que *P* est lui-même plus ou moins vraisemblable.

2) En médecine, il est établi que « si une personne a la maladie *M*, alors elle a le symptôme *S* ». Le médecin observe qu'un patient possède le symptôme *S*. Alors, il diagnostique que « son client en question est atteint par la maladie *M*. » [5]

3) « Quand on est proche d'un rivage, on voit souvent des oiseaux. Or, des marins sont éloignés du rivage. Le capitaine du navire en conclut qu'il ne verra pas d'oiseaux. »

A la lecture de ces deux derniers exemples concrets, on imagine aisément que la conclusion est seulement « croyable » et est loin d'être garantie sans informations supplémentaires : pour donner son verdict, le docteur a probablement tenu compte d'autres symptômes que S ou de

[5] Une comparaison des raisonnements utilisés en mathématiques et en médecine est réalisée dans l'article intitulé « Diagnostic – raisonnements médicaux », par A. Albert et J. Bair, *Tangente* Hors Série 58 sur le thème « *Mathématiques et Médecine* », Collection Bibliothèque, 2017, pp. 50-53.

l'existence d'une épidémie de la maladie M au moment de la consultation, tandis que le marin s'est probablement basé sur sa connaissance de la mer, par exemple.
L'aspect incertain de la conclusion fournie dans un syllogisme heuristique peut être formalisé en présentant les *modus ponens* et *modus tollens* heuristiques aussi bien sous forme propositionnelle qu'ensembliste, en utilisant le symbole $\approx$ pour désigner qu'une proposition est non pas vraie mais seulement plausible. Pour le *modus ponens* heuristique, on a

$$\begin{array}{ll} P \Rightarrow Q & A \subset B \\ \approx P & \approx (x \in A) \\ ---- & ---- \\ \approx Q & \approx (x \in B) \end{array}$$

ou encore

$$\begin{array}{ll} P \Rightarrow Q & A \subset B \\ Q & x \in B \\ ---- & ---- \\ \approx P & \approx (x \in A) \end{array} ;$$

pour le *modus tollens* heuristique :

$$\begin{array}{ll} P \Rightarrow Q & A \subset B \\ \neg P & x \notin A \\ ---- & ---- \\ \approx (\neg Q) & \approx (x \notin B) \end{array} .$$

Les deux types de raisonnements, déductifs et plausibles, présentent évidemment des avantages et des inconvénients qui peuvent être résumés dans le tableau comparatif ci-dessous :

Raisonnement démonstratif	Raisonnement plausible
• Sûr • A l'abri de controverses • Définitif • Rigide • Incapable de conduire à des connaissances nouvelles sur le monde • Exploité uniquement en maths	• Hasardeux • Susceptible d'être controversé • Provisoire • Souple • Peut apporter des connaissances nouvelles sur le monde • Exploité dans toute démarche scientifique

La dernière ligne de ce tableau indique quand sont exploités ces deux types de raisonnement, mais ne donne aucun renseignement sur qui doit les utiliser. A cet égard, nous suivons les idées de Polya qui apporte une réponse non équivoque à cette interrogation [6] :

- les raisonnements plausibles sont l'apanage de tous, y compris des mathématiciens « *qui doivent deviner*
  - *un théorème avant de le démontrer*
  - *le principe général d'une démonstration avant de la détailler » ;*
- les raisonnements démonstratifs devraient être pratiqués par tous, y compris les non-mathématiciens, car chacun doit, même « *s'il n'aura que rarement l'occasion de s'en servir directement, acquérir un élément de comparaison qui puisse lui permettre de juger les prétendues preuves de toutes sortes qui lui seront offertes dans le monde où nous vivons actuellement* ». Bien plus, partant des deux hypothèses (très plausibles) selon lesquelles, premièrement, le sens de la précision et de la rigueur n'est pas forcément inné chez tout individu mais doit faire l'objet d'un apprentissage régulier et progressif, et, deuxièmement, ces deux qualités sont (quasi) incontournables pour accomplir efficacement des activités intellectuelles dévolues à des diplômés du supérieur, on peut en déduire toute l'importance des cours de mathématiques dans une formation universitaire. De fait, d'une part, les raisonnements démonstratifs forment mieux aux deux qualités mentionnées que leurs homologues plausibles, car il paraît difficile (voire impossible) d'apprendre à devenir précis et rigoureux à l'aide de raisonnements dont la conclusion n'est guère certaine ; d'autre part, les cours de mathématiques sont assurément ceux qui font le plus (et le mieux) appel à des raisonnements démonstratifs.

Notons encore que la démarche scientifique classique repose sur le principe de réfutabilité dû à Popper ; elle est assez fréquemment illustrée par cet exemple emblématique : « on suppose que tous les cygnes sont blancs ; dans ce cas, tous les cygnes observés doivent être de couleur blanche ; si on observe un cygne qui n'est pas blanc (par exemple, qui est noir), alors l'hypothèse de départ ne peut pas être retenue ». Un tel raisonnement est démonstratif, puisqu'il peut être présenté par un syllogisme du type *modus tollens*, à savoir :

---

[6] G. Polya, *op. cit.*, pp. X – XI.

$$\begin{array}{l} H \Rightarrow O \\ \neg O \\ ---- \\ \neg H \end{array},$$

où H désigne l'hypothèse qui est conjecturée par un scientifique, sur base d'un raisonnement plausible, par exemple de type inductif, tandis que O représente une observation ; en effet, il est évident que l'implication suivante est vraie : « si l'hypothèse H est satisfaite, alors les observations O vérifient aussi cette supposition » ; cette dernière est admise aussi longtemps qu'elle n'est pas contredite par une observation ; si, par contre, une observation infirme l'hypothèse (soit $\neg O$), alors cette dernière est réfutée (ou $\neg H$).

Avant d'examiner plus en profondeur les raisonnements qui interviennent plus spécifiquement en mathématiques, effectuons un petit détour par la logique.

2. Logique mathématique

A la fin du siècle dernier, deux collègues français [7] écrivaient : «*Depuis plusieurs années nous cherchons les raisons des blocages et échecs en Mathématique ; nous sommes maintenant persuadés que la raison principale est le manque de connaissances de base : écriture et lecture insuffisantes du langage mathématique (par exemple, utilisation incorrecte des quantificateurs et du symbole* $\Rightarrow$ *d'implication) mais aussi méconnaissance des méthodes élémentaires de démonstration qui paralyse l'étudiant lorsqu'il commence un exercice. Nous avons également constaté que les étudiants en difficulté ne sont pas ceux qui travaillent le moins : ce sont peut-être ceux qui ont besoin de supports écrits en logique. […] Cette initiation à la logique du raisonnement se fait, malheureusement, uniquement oralement, par bribes et redites durant de nombreuses années. C'est précisément cette tradition orale que nous aimerions faire passer ici sur papier : travail ingrat (comment expliquer des ''évidences'', expliquer ''l'inexplicable'' ?) mais aussi travail enthousiasmant quand le but visé est d'aider certains étudiants à jouer avec les Mathématiques, à ne pas les subir* ». [8]
Ces réflexions nous semblent toujours pertinentes aujourd'hui, et même peut-être plus encore que par le passé. En effet, il y a quelques années encore, les programmes de mathématiques en

---

[7] Ces mathématiciens français étaient Gérard Coquet et Jean-Claude Dupin. Ils avaient des contacts réguliers avec l'Ecole liégeoise de Géométrie convexe mise sur pied par le Professeur F. Jongmans.
[8] « Initiation à la logique, à l'écriture et au raisonnement mathématique – première partie ». Article publié dans *Mathématique et Pédagogie*, n° 86, 1992, pp. 67 – 89.

vigueur dans l'enseignement secondaire prévoyaient un chapitre consacré à la logique élémentaire, en accordant notamment une place non négligeable aux tables de vérité ainsi qu'au vocabulaire spécifique, insistant singulièrement sur l'usage des quantificateurs ou encore sur les différences entre une implication et sa réciproque, entre une condition nécessaire ou une condition suffisante, … . De nos jours, la situation a évolué : dans les documents officiels [9] consacrés aux programmes de mathématiques suivis dans l'enseignement secondaire en Belgique francophone, il n'existe plus un chapitre spécifique entièrement consacré à la logique, mais il est recommandé aux enseignants de donner des éléments de logique tout au long du parcours ; il y est de plus spécifié explicitement que « *le recours aux règles logiques s'appuie dans un premier temps sur le langage courant. Les principes qui sous-tendent le raisonnement mathématique sont ensuite exprimés dans un langage approprié* ».

Cette réforme présente assurément des avantages. Appliquées à la lettre, les consignes peuvent amener les élèves du secondaire à rencontrer de façon récurrente la logique de base, bien plus souvent que par le passé ; des éléments de logique sont en effet intégrés au sein de chaque grand chapitre [10] du cours, quand le besoin s'en fait sentir en quelque sorte. Ainsi, cet enseignement, dit de type horizontal selon la terminologie de A. Treffers [11], a pour vocation louable de développer des compétences transversales d'une manière régulière et efficace. A titre d'exemple éloquent, voici un extrait des compétences terminales visées dans le chapitre de géométrie dans le dernier cycle du secondaire ; les directives officielles déjà mentionnées recommandent de :

« - *insister sur l'importance des expressions logiques telles que « et », « ou », « car », « or », « donc », d'où », « si », « si et seulement si », « si… alors », …*

- *étudier quelques notions et règles de logique (contraposition d'implications ou d'équivalences, démonstrations par l'absurde, critères faisant intervenir des conditions nécessaires et suffisantes, récurrence, négation, …).*

---

[9] Voir par exemple le site http://www.restode.cfwb.be/

[10] A savoir, pour les deux dernières années du secondaire, les programmes comprenant six périodes hebdomadaires de mathématiques comportent les chapitres suivants :
en ***cinquième année*** : géométrie, calcul matriciel, trigonométrie,
en ***sixième année :*** nombres complexes, géométrie analytique dans l'espace, géométrie plane, statistique à deux variables analyse combinatoire, calcul des probabilités, analyse.

[11] A. Treffers, *Three dimensions : a model of theory and goal description in mathematics instructions, the Wiskobas project* (Reidel, Dordrecht, 1986). Voir également le chapitre 2, intitulé « Enseigner les mathématiques aujourd'hui », dans le rapport de recherche du CREM sur « Les Mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques » (Crem, Nivelles, 1995).

La mise en évidence de structures et de modes de raisonnement ne constitue pas un préalable, mais donne un éclairage nouveau sur des matières apparemment hétérogènes. Cette formalisation fait l'objet de synthèses qui ponctuent différentes séquences d'enseignement. »

Nous voudrions ici relever deux dangers potentiels qui résultent, nous semble-t-il, de la situation actuelle décrite ci-dessus.

1) S'appuyer sur le langage courant pour présenter des éléments fondamentaux de logique est certes souhaitable, mais cela nécessite, pour être efficace, que l'on distingue la logique commune de la logique mathématique. C'est ce que nous ferons ci-après.
2) Le risque nous semble grand que les recommandations officielles concernant la logique ne soient pas toujours respectées. En effet, les programmes sont (le plus souvent exagérément) chargés et le nombre effectif d'heures pour le suivre est probablement trop peu élevé. Si le professeur ne dispose pas d'un nombre suffisant d'heures pour parcourir avec ses élèves toute sa matière, il risque de négliger la logique, notamment parce qu'il pourrait estimer que ce sujet semble moins important que les chapitres officiellement reconnus, mais aussi, peut-être, parce qu'il n'est pas toujours formé à un tel exercice difficile de synthèse, ou simplement parce qu'il n'apprécie pas ce sujet un peu éloigné des théories mathématiques traditionnelles.

Ces propos paraissent peut-être nostalgiques, mais, au vu de notre expérience avec de nombreuses cohortes d'étudiants entrant à l'Université, nous les croyons assez réalistes pour un certain nombre de sujets. En effet, nous constatons que quelques étudiants (et pas tous, bien entendu) n'ont pas été assez souvent confrontés à des rudiments de logique mathématique, et que ceux-ci ne font pas partie des outils théoriques qu'ils maîtrisent. De la sorte, ces étudiants ne peuvent se référer qu'aux seuls éléments de logique qu'ils ont déjà rencontrés, c'est-à-dire ceux de la logique de « Monsieur et Madame tout le monde ». Or, à bien des égards, il existe un décalage parfois important entre la logique utilisée dans la vie quotidienne et celle exploitée en mathématiques. Dès lors, ces étudiants éprouvent des difficultés réelles pour atteindre le niveau d'exigences requis à l'Université.

Notre but dans cette section consiste à montrer, d'une part, que la logique des mathématiques [12] repose sur un nombre restreint de règles [13] a priori simples mais, d'autre part, que ces règles-ci ne sont pas toujours d'un usage aussi facile qu'il n'y paraît à première vue et sont assez souvent transgressées dans les raisonnements courants ; pour ce dernier point, nous nous appuierons quelquefois sur des exemples concrets rencontrés dans la vie de tous les jours ou sur des réactions qu'ont eues nos étudiants lors de leurs travaux mathématiques.

Précisons le vocabulaire qui sera employé car il n'est pas toujours universel.
Nous allons uniquement considérer des assertions, c'est-à-dire des affirmations qui sont soit vraies, soit fausses, mais pas les deux à la fois. On exclut donc de nos raisonnements de nombreuses phrases prononcées dans la vie courante, ainsi que nous le mentionnerons ultérieurement. Au surplus, nous allons prioritairement nous placer dans le cadre d'une théorie mathématique bien donnée, comme l'algèbre des nombres réels (ou complexes), la géométrie euclidienne plane, l'analyse classique (ou non standard) des fonctions à une variable réelle (ou à plusieurs variables), … Un énoncé (sous-entendu, mathématique) est une assertion dans le cadre de la théorie mathématique adoptée. Une proposition (mathématique) est une assertion toujours vraie. Un prédicat est une fonction d'énoncés. Un des objectifs du travail en mathématiques consiste à construire, dans le cadre d'une théorie donnée, des propositions ainsi que des prédicats vrais qui seront appelés, selon leur importance, des lemmes (ou résultats préliminaires), des théorèmes (ou résultats jugés importants), des corollaires (ou conséquences de théorèmes).
Notons que la théorie mathématique au sein de laquelle on travaille doit être connue avec précision, car un même énoncé peut être vrai dans une théorie et faux dans une autre. De nombreux exemples peuvent être donnés à propos de ce point capital ; contenons-nous d'en donner un seul, à la fois classique et frappant.

Exemple 2.1. Au fur et à mesure de sa progression dans son apprentissage des mathématiques, le cadre théorique de référence d'un apprenant évolue, souvent en devenant de plus en plus large. Il importe dès lors que l'étudiant sache avec précision quelle est la théorie mathématique au sein de laquelle il se situe. Par exemple, quand il était dans le secondaire,

[12] Nous nous plaçons ici au niveau de la transition entre le secondaire et l'Université, car il est clair que la logique peut être abordée à un niveau supérieur et peut apparaître alors bien plus compliquée et abstraite.
[13] Dans une annexe située en fin de ce document sont rassemblées, de façon plus technique, les principales règles de logique qui nous intéressent ici.

l’élève travaillait avec des nombres réels, tandis qu’à l’université il va être amené à manipuler également des nombres complexes. Dans ces conditions, l’affirmation « il existe un nombre dont le carré est négatif » était un énoncé faux en humanités, mais peut devenir vraie à l’université.

Notons encore qu’au niveau qui nous concerne, aucune assertion indécidable ne sera rencontrée ; plus précisément, toutes les propositions rencontrées seront des axiomes (ou postulats), des définitions ou des énoncés déjà démontrés [14].
Bien qu’un énoncé peut être perçu comme étant un prédicat constant, commençons par quelques réflexions sur la logique des énoncés qui est évidemment plus simple que celle des prédicats.

a) Eléments de logique à propos d’énoncés

Dans la plupart des raisonnements mathématiques, on suppose vrais certains énoncés et on s’efforce de montrer que d’autres énoncés sont en réalité des propositions.
Dans la pratique, ces deux étapes peuvent être indiquées de diverses manières, ce qui pourrait troubler certains étudiants non habitués à rédiger ou étudier des démonstrations mathématiques.
Si on suppose qu’un énoncé P est une proposition, on dira indifféremment [15] « supposons que P est vrai » ou bien simplement « supposons P vrai » ou « supposons qu’on a P » ou même « supposons P » ou encore « soit P » ; de même, on ne distinguera pas les énoncés suivants : « montrons que P est vrai » ou « montrons qu’on a P » ou simplement « montrons P ».
Notons toutefois qu’il s’agit de ne pas confondre « considérons P » avec « considérons qu’on a P » : dans le second cas, on est émet l’hypothèse que l’énoncé P est une proposition, tandis que dans le premier cas on ignore si P est une proposition. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement, notamment lorsque nous distinguerons des conditions nécessaires de suffisantes (que pas mal d’étudiants confondent de temps à autre), mais arrêtons-nous un moment sur la base de la logique utilisée.

---

[14] Nous partons du principe que les étudiants ne sont pas confrontés à des conjectures au niveau d’apprentissage considéré.

[15] Mentionnons que, dans la suite, les notations P , Q , … pour désigner des énoncés seront supposés écrits au masculin. De plus, signalons que certains préfèrent travailler avec des formule plus impersonnelles, par exemple en écrivant « on suppose qu’on a P » au lieu de « supposons qu’on a P », ou, au contraire, plus personnalisées, par exemple en mentionnant « je suppose que P est vrai ».

Fondamentalement, la logique qui nous intéresse fait appel à trois « opérations » permettant de construire de nouveaux énoncés en partant d'un ou de deux énoncés connus.
La première est « unaire » en ce sens qu'elle associe à un énoncé P un autre, nommé la <u>négation</u> de P et noté « non P » ou symboliquement, comme il a été signalé ci-dessus, $\neg P$: l'énoncé $\neg P$ est vrai lorsque P est faux, et il est faux lorsque P est vrai.
Les deux autres opérations de base sont « binaires » car elles associent un troisième énoncé à deux autres connus, qui seront notés P , Q ; il s'agit de la <u>conjonction</u> qui relie les deux énoncés de départ par le mot (appelé « connecteur ») « et », et la <u>disjonction</u> qui fait de même en utilisant le connecteur « ou » ; l'assertion « P et Q » se note encore $P \wedge Q$, tandis que « P ou Q » s'écrit $P \vee Q$. Par définition, on peut affirmer que, pour deux énoncés P, Q, leur conjonction n'est vraie que dans un seul cas, à savoir lorsque P est vrai et que, simultanément, Q est vrai et $P \wedge Q$ est donc faux dans les trois autres cas possibles (c'est-à-dire lorsque l'un des deux énoncés élémentaires est faux ou lorsqu'ils sont tous deux faux) ; quant à leur conjonction, elle n'est fausse que dans un seul cas, à savoir lorsque P est faux et que, simultanément, Q est faux et, dès lors, $P \wedge Q$ est vraie dans les trois autres cas possibles (c'est-à-dire lorsque l'un des deux énoncés élémentaires est vrai ou lorsqu'ils sont tous deux vrais). Tout ceci peut utilement être résumé à l'aide de ces « tables de vérité » dans lesquelles V est mis pour « vrai » et F pour « faux ».

P	$\neg P$
V	F
F	V

P	Q	$P \wedge Q$	$P \wedge Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Une première constatation met en évidence une éventuelle difficulté que pourraient rencontrer des étudiants n'appliquant pas strictement les lois précises de la logique mathématique. Elle concerne les lois de non contradiction et du tiers exclu (qui ont une portée totalement différente puisque la conjonction d'un énoncé et de sa négation est fausse, alors que leur disjonction est vraie [16]). Dans la vie courante, il n'est pas rare d'être en présence d'une affirmation qui est manifestement vraie ou fasse mais pour laquelle il est impossible de

[16] Voir l'annexe pour un rappel des règles principales de la logique. Notons que ces deux lois peuvent se déduire l'une de l'autre.

décider dans lequel de ces deux cas l'on se trouve (par exemple quand une personne affirme « pendant les dernières grandes vacances, je courais 20 kilomètres chaque jour »), ou qui peut être jugée à la fois vraie et fausse (par exemple quand on affirme que « ce produit est cher » ou « le temps est beau »), ou encore qui n'est visiblement ni vraie ni fausse (ainsi en est-il d'une question du type « quelle heure est-il ? » qui n'est évidemment ni vraie ni fausse puisqu'elle n'affirme rien, ou même d'une affirmation telle que « cette phrase est fausse », car si elle est vraie alors elle est fausse, mais si elle est fausse alors elle est vraie). Dans pareils cas, on ne se situe pas dans le cadre précis d'une théorie mathématique donnée, ce qui n'est pas permis à ce stade [17].

Par ailleurs, les trois opérations fondamentales de logique interviennent non seulement dans le langage véhiculaire, mais également au sein des mathématiques. Ainsi, en théorie (naïve [18]) des ensembles ou encore en calcul des probabilités, le connecteur « et » (resp. « ou ») correspond souvent à l'intersection (resp. à la réunion) de sous-ensembles ou d'événements. Tout ceci peut également être traduit numériquement en travaillant sur des variables booléennes [19], le connecteur « et » (resp. « ou ») correspondant généralement au produit booléen (resp. à l'addition booléenne [20]).

Toutefois, la situation n'est pas aussi claire et nette qu'il n'y paraît à première vue, ainsi qu'en attestent ces résultats classiques en théorie des probabilités.

<u>Exemple 2.2</u>. Pour deux événements A , B relatifs à une même expérience aléatoire, on a :

1) P(A et B) coïncide avec le produit de P(A) et de P(B) uniquement lorsque les événements A , B sont indépendants (sinon, il faut faire appel à des probabilités conditionnelles)
2) P(A ou B) vaut la somme de P(A) et de P(B) lorsque A , B sont mutuellement exclusifs (sinon, il faut retrancher de cette dernière somme la probabilité de la conjonction de des deux événements).

---

[17] La logique floue, non considérée ici, permet de considérer des affirmations qui sont à la fois « un peu vraies » et « un peu fausses ».
[18] La seule considérée dans ce travail.
[19] C'est-à-dire des variables qui ne prennent que les valeurs 0 ou 1. Bien entendu, on associe le nombre 1 à une assertion vraie et la valeur 0 à une assertion fausse.
[20] Le produit booléen coïncide avec le produit usuel entre les deux nombres 0 , 1 ; l'addition booléenne donne les mêmes résultats que l'addition usuelle entre ces deux nombres, à ceci près que, en algèbre booléenne, l'égalité suivante est d'application : « 1 + 1 = 1 ».

Il est donc aisé de trouver des cas concrets où la correspondance souhaitée n'est pas de mise.

De plus, la définition commune des deux mots « et » , « ou » peut entraîner des difficultés dans leur usage au sein des mathématiques. Ainsi, un dictionnaire [21] donne ces définitions comme sens premier :

- **Et** : « conjonction de coordination qui sert à lier les parties de discours, les propositions ayant même fonction même rôle et à exprimer une addition, une liaison, un rapprochement » (LPR, p. 822)
- **Ou** : « conjonction qui sert à unir des parties de discours, des membres de phrases ou des propositions de même rôle ou de même fonction, en séparant les idées exprimées de façon exclusive ou non » (LPR, p. 1555).

Nous allons voir que ces définitions peuvent générer des difficultés. En ce qui concerne le mot « et », sa définition fait explicitement référence à une addition, et non à une multiplication ; c'est d'ailleurs dans ce sens que l'on recourt souvent à ce connecteur dans la vie de tous les jours [22] ; par ailleurs, le « et » est très souvent employé pour relier entre elles des assertions n'appartenant pas à une même théorie mathématique, ainsi qu'en attestent ces exemples :

Exemple 2.3. En voyant un drapeau à damier, c'est-à-dire un drapeau dont le tissu est composé de carreaux blancs et noirs, des individus pourraient affirmer que « ce drapeau est blanc et noir » ; il est d'ailleurs à noter que cette affirmation est assez naturelle puisque la définition littéraire de ce qu'est un damier fait elle-même appel à la conjonction « et ». Pourtant, d'un point de vue de la logique classique, l'affirmation est en fait la conjonction de deux assertions élémentaires, à savoir « le drapeau est blanc » ainsi que « le drapeau est noir », toutes deux fausses, de sorte que la conjonction de ces deux assertions doit être considérée comme fausse. Une variante mathématique à cet exemple est la suivante : l'énoncé « la fonction $f : x \mapsto x^3$ est convexe et concave (sur l'ensemble des réels) » est faux, bien que *f* soit convexe sur l'ensemble des réels positifs et concave sur l'ensemble des réels négatifs, mais elle n'est pas concave sur l'ensemble de tous les réels, ni convexe

[21] *Le Petit Robert, dictionnaire de la langue française*, en abrégé LPR, édition 1996.
[22] Voici un exemple trivial. Si un homme possède 2 pommes **et** que sa femme en a 3, le couple est en possession de 5 pommes.

d'ailleurs. Bien plus, il est mathématiquement incorrect d'affirmer que « la fonction $f : x \mapsto x^3$ est (partout) concave ou convexe ».

Revenons un instant sur les définitions du dictionnaire pour remarquer que celle du mot « ou » fait explicitement référence au caractère exclusif ou non de la disjonction ; c'est effectivement ce que l'on constate dans le langage commun au sein duquel les deux situations peuvent être rencontrées ; par exemple, un étudiant en gestion sincère emploie un « ou » exclusif quand il affirme « j'étudie ou je fais du sport », mais un « ou » non exclusif lorsqu'il prévoit pour le lendemain : « je vais faire du sport ou jouer au tennis ». Par contre, en logique mathématique ainsi qu'en théorie des ensembles, le « ou » est, en principe [23], non exclusif, ce qui devrait simplifier la vie ; remarquons toutefois que, dans la loi du tiers exclu, le « ou » employé est exclusif en vertu de la loi de non contradiction. Tout cela peut évidemment paraître perturbant pour certains étudiants.

A ce stade élémentaire, mentionnons encore, sans éprouver le besoin d'insister davantage sur ce point tant il est évident et connu, que l'usage de négations (voire doubles, triples, …) semble souvent plus difficile à maîtriser que des affirmations directes.

On a déjà mentionné que les deux opérations binaires fondamentales de la logique (le « et » , le « ou ») permettent de relier (ou connecter) entre eux deux énoncés. De nombreux raisonnements mathématiques recourent à d'autres connexions, notamment quand ils consistent à déduire la vérité d'un énoncé de celle d'un autre, ou bien quand ils montrent que deux énoncés sont simultanément vrais.
Plus précisément, avec deux énoncés P , Q, on peut construire ces deux nouveaux :
$P \Rightarrow Q$, qui s'appelle <u>implication</u> (logique) de Q par P ; il se lit d'habitude [24] « P implique Q »
$P \Leftrightarrow Q$, qui est l'équivalence (logique) entre P , Q ; on dit alors que « P est équivalent à Q ».
Ces deux nouveaux énoncés sont définis par la table de vérité suivante :

[23] Le « ou » est parfois utilisé de manière exclusive en mathématiques, par exemple quand on affirme « un nombre naturel *n* est pair ou impair ».
[24] On verra ci-après d'autres manières utilisées par les mathématiciens pour désigner une implication.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

De cette table, on peut déduire que les deux nouveaux énoncés composés peuvent être construits avec les trois opérations élémentaires de la logique. En effet, dans tous les cas possibles, les valeurs de vérité de $P \Rightarrow Q$ et de $\neg P \vee Q$ coïncident ; il en va de même pour $P \Leftrightarrow Q$ et $\left[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)\right]$.

De ces définitions, il résulte que, pour deux énoncés *P* , *Q*, l'implication $P \Rightarrow Q$ est toujours vraie, sauf lorsque *P* est vrai tandis que *Q* est faux. En particulier, il est vrai que, comme on l'entend souvent dire, le faux implique n'importe quoi. Par ailleurs, la vérité de l'implication $P \Rightarrow Q$ ne fournit aucun renseignement sur celle de *Q* lorsque *P* est faux.

Des implications sont d'un usage très répandu aussi bien dans la vie courante où se rencontrent souvent des phrases du type « si …, alors … », qu'en mathématiques où tout énoncé peut schématiquement s'écrire sous la forme d'une implication « $H \Rightarrow T$ » indiquant qu'on peut prouver que l'hypothèse (ou supposition) *H* entraîne bien la thèse (ou conclusion) *T* [25].

De nombreuses difficultés sont enregistrées à propos des implications.

Il n'est pas rare, dans la vie quotidienne, de voir utilisée une implication avec une conception différente de celle de la logique scientifique. Ainsi, par exemple, quand un parent dit à son enfant « si tu n'étudies pas, alors tu ne réussiras pas », il pense probablement que son conseil signifie aussi « si tu étudies, alors tu réussiras » ; dans le même ordre d'idées, lorsque j'affirme « s'il pleut demain, alors je n'irai pas faire mon footing », j'imagine bien que j'irai courir demain si le temps est beau ; un autre exemple est fourni par l'affirmation « si on est un homme, alors on est intelligent » que certaines personnes jugent sexiste dans la mesure où elles croient que la phrase énoncée veut aussi dire qu'une femme n'est pas intelligente. D'une

[25] Certains énoncés mathématiques ne font pas apparaître explicitement une implication, mais bien implicitement. Par exemple, le théorème de Pythagore s'énonce généralement sous cette forme : « Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés ». A première vue, cet énoncé ne se présente pas sous la forme d'une implication du type « Si …, alors », mais il est équivalent, par exemple, à cette formulation : « Si *T* est un triangle rectangle de côtés *a* et *b* et d'hypoténuse *c*, alors $c^2 = a^2 + b^2$ ». Cet exemple est donné dans le livre *Comment penser comme un mathématicien*, par K. Houston, De Boeck, Bruxelles, 2011, pp. 142-143.

manière générale, les deux implications $P \Rightarrow Q$ et $\neg P \Rightarrow \neg Q$ sont parfois assimilées l'une à l'autre, alors qu'elles diffèrent d'un point de vue logique, l'une pouvant être vraie alors que l'autre serait fausse.

Par ailleurs, une implication $P \Rightarrow Q$ ne fournit pas forcément des renseignements précis à propos de la vérité ou non de P , Q ; en particulier, elle ne traduit pas uniquement le fait de voir apparaître la vérité de Q comme conséquence ordinaire (c'est-à-dire au sens causal) de la vérité de P.

En fait, lorsque l'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse, il est alors certain que P est vrai et Q faux ; mais, lorsque $P \Rightarrow Q$ est une implication vraie, alors trois cas sont possibles : a) P est vrai , Q est vrai ; b) P est faux et Q est vrai ; c) P et Q sont vrais.

Ces derniers cas peuvent heurter l'intuition. Exhibons à ce propos deux exemples classiques qui débouchent sur des conclusions qui paraissent parfois troublantes pour certains étudiants.

<u>Exemple 2.4</u>. Pour un nombre réel positif r, on considère, dans le cadre de la théorie des nombres réels, les trois énoncés suivants relatifs à un réel positif r :

P : « le carré de r est négatif » ; Q : « le cube de r est positif » ; R : « le cube de r est négatif ».

Bien entendu, P et R sont faux tandis que Q est vrai. Dans ces conditions, les implications $P \Rightarrow Q$ et $P \Rightarrow R$ sont des propositions, tandis que $Q \Rightarrow P$ et $Q \Rightarrow R$ sont des énoncés faux

<u>Exemple 2.5</u>. Dans le cadre de la théorie des nombres réels, l'énoncé « l'ensemble vide est inclus dans l'ensemble **R** des nombres réels (ce qui s'écrit formellement « $\varnothing \subset \mathbf{R}$ ») est une proposition puisque, pour tout réel r, l'énoncé « $r \in \varnothing$ » est faux et implique dès lors la proposition « $r \in \mathbf{R}$ ».

De tels exemples appellent des commentaires.

Il importe de ne pas confondre une implication $P \Rightarrow Q$ de sa <u>réciproque</u> $Q \Rightarrow P$: l'une peut être vraie tandis que l'autre est fausse, mais elles peuvent toutes les deux être vraies (dans le cas d'une équivalence). De nombreux théorèmes mathématiques s'écrivent sous la forme d'une implication : schématiquement, il convient de démontrer que la vérité d'une hypothèse entraîne celle de la thèse. Les étudiants confondent encore trop souvent une implication, de sa réciproque ou d'une équivalence. Illustrons ce point par deux exemples tirés du cours d'analyse (des fonctions à une variable).

Exemple 2.6. On considère la fonction $f : x \to |x|$, ainsi que les énoncés :
P : « f est dérivable en 0 » ; Q : « f est continue en 0 ». Il est connu que P est un énoncé faux, mais que Q est une proposition. En conséquence, l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, mais sa réciproque $Q \Rightarrow P$ est fausse.

Exemple 2.7. On considère, pour une fonction f, définie sur **R**, et un réel r , les deux énoncés :
P : « f est dérivable en r » ; Q : « f est différentiable en r ». Il est possible de démontrer que l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, même, par exemple, dans le cas de la fonction f de l'exemple ci-dessus lorsque le réel r considéré est 0 [26].

Notons encore que les étudiants éprouvent parfois des difficultés avec le vocabulaire utilisé (en plus des subtilités des définitions), bien que ce dernier soit assez conforme au langage courant. De fait, considérons vraie l'implication $P \Rightarrow Q$. On dit alors indifféremment que P est une condition suffisante pour avoir Q, car la vérité de P suffit à garantir celle de Q, ou que Q est nécessaire pour P, car Q est vrai obligatoirement lorsque P est vrai ; mais Q peut être vrai sans que P ne le soit ou, en d'autres termes, P est vrai seulement si Q est vrai. De la sorte, il existe une grande variété de traductions verbales pour désigner une implication ou une équivalence.

Pour exprimer qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, l'usage veut que l'on utilise indifféremment l'une ou l'autre des formulations suivantes :

- $P \Rightarrow Q$
- P implique (ou entraîne) Q
- Si on a P, alors on a Q (ou même, plus simplement, « si P, alors Q », ou encore « Q si P » [27])
- Q est une conséquence de P

[26] Observons que ces propositions P et Q ne sont pas équivalentes quand on travaille avec une fonction f de deux (ou plusieurs variables) réelles. Cet exemple montre bien l'importance de connaître le contexte théorique dans lequel on raisonne.

[27] Il est à noter que le fait d'écrire Q à gauche et P à droite peut perturber certains étudiants et entraîner des confusions.

- Q est une condition nécessaire (CN, en abrégé) pour avoir P
- Pour avoir P, il faut (ou il est nécessaire d') avoir Q
- P est une condition suffisante (CS, en abrégé) pour avoir Q
- Pour avoir Q, il suffit (ou il est suffisant d') avoir P
- On a P seulement si on a Q (ou, plus simplement, « P seulement si Q »)

De même, on exprime le fait qu'une équivalence $P \Leftrightarrow Q$ est une proposition de plusieurs manières :

- $P \Leftrightarrow Q$
- P équivaut (est équivalent) à Q
- On a P si et seulement si on a Q (ce qui s'écrit parfois, en abrégé P ssi Q)
- P est une condition nécessaire et suffisante (CNS, en abrégé) pour avoir Q

Signalons encore qu'il existe, en langue française, de nombreux synonymes qui peuvent être utilisés dans le cas d'une implication. Ainsi, une déduction s'indique par diverses expressions, telles que « donc, dès lors, alors, partant, d'où, ainsi, il s'ensuit que, par conséquent, a comme résultat, … » ; pour une explication, on peut faire appel à des mots comme « car, parce que, puisque, à cause de, comme, du fait que, étant donné que, tenant compte de, vu que, … ».

Enfin, mentionnons que l'usage des symboles $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ doit être très rigoureux et faire apparaître explicitement, et de manière non ambiguë, les énoncés P et Q que ces connecteurs relient entre eux ; sinon, le texte devient illisible ainsi qu'en témoigne l'exemple suivant :

Exemple 2.8 [28]. Dans le cadre de la théorie des nombres réels, on considère, pour un réel r, l'énoncé suivant qui est visiblement une proposition (pas très bien formulée toutefois) :
« comme $r > 0$ et comme ($r > 0 \Rightarrow r^2 \neq 0$), alors $2r^2 \neq 0$ ».
Par contre, des formulations telles que les suivantes sont inacceptables
« comme $r > 0$ et ($r > 0 \Rightarrow r^2 \neq 0$) $\Rightarrow 2r^2 \neq 0$ »
« comme $r > 0$ et $r > 0 \Rightarrow r^2 \neq 0 \Rightarrow 2r^2 \neq 0$ ».

b) Logique et quantificateurs

De façon très simplifiée, on peut concevoir la plupart des résultats mathématiques comme des énoncés construits, en respectant les règles de la logique, au départ de propositions de départ

[28] Cet exemple est repris dans l'article de Coquet-Dupin déjà mentionné (*op. cit.*, p. 74).

(les axiomes ou postulats). Mais, souvent, on est amené à considérer des assertions qui ne sont pas vraies dans toutes les circonstances, mais uniquement sous des conditions, c'est-à-dire pour certaines valeurs d'une (ou de plusieurs) variable(s) x (y, z, …) ; il ne s'agit pas alors d'énoncés à proprement parler : il s'agir alors d'<u>énoncés conditionnels</u>. Il en va ainsi, dans le cadre de la théorie des nombres réels, avec l'énoncé « le nombre x est tel que $x^2 \leq 1$ », qui sera noté $P(x)$: $P(x)$ est vrai pour tout $x \in [-1\,,1]$, est faux pour tout $x \notin [-1\,,1]$, mais est par exemple vrai pour au moins un $x \in [1\,,+\infty[$ (et dans ce dernier cas, pour un seul de ces x).

D'une manière générale, pour un énoncé conditionnel $P(x)$ et un sous ensemble E de valeurs pouvant prendre la variable x, on peut travailler avec différentes valeurs (ou <u>prédicats)</u> de l'application, définie sur E, qui à tout x associe $P(x)$. Plus précisément, on est souvent amené à considérer ces deux propositions :

- « $\forall x \in E\ ,\ P(x)$ » : l'énoncé $P(x)$ est vrai pour tout x dans E ; ceci se lit indifféremment « pour tout x de E, on a $P(x)$ (ou simplement pour tout x, on a la propriété P) », « quel que soit x (de E), on a la propriété $P(x)$ », « pour n'importe quel x (de E), on a la propriété $P(x)$ » ou encore « pour chaque x (de E), on a la propriété $P(x)$ ».
- « $\exists x \in E\ ,\ P(x)$ » : il existe au moins un x dans E pour lequel P(x) est vrai ; ceci se lit « pour au moins un x de E, on a $P(x)$ » ou encore « il existe au moins un x de E pour lequel on a la propriété $P(x)$ (ou … pour lequel on a la propriété P)», « pour certains x (de E), on a $P(x)$ » ou encore « pour au moins un x (de E), on a $P(x)$ ».

Il est certain que les mathématiciens utilisent les deux quantificateurs, à savoir l'universel $\forall$ et l'existentiel $\exists$, très souvent, mais qu'ils les emploient de façon plus limitative et plus rigoureuse que dans la vie courante. Voici des exemples qui illustrent cette différence, le premier étant mathématique tandis que le deuxième consiste en une historiette humoristique.

<u>Exemple</u> <u>2.9</u>. « les nombres premiers sont impairs » : c'est vrai pour tous, sauf un seul (le 2). Dans le langage courant, on dirait « c'est presque toujours vrai » et on ajouterait même peut-être « le nombre 2 est l'exception qui confirme la règle ».

Exemple 2.10. Une famille, composée des deux parents et d'un petit garçon, passe des vacances reposantes en Irlande et effectuent de nombreuses balades en voiture dans les vastes campagnes de la région. Au cours de l'une de celles-ci, ils parcourent une route entourée de prairies et, à un moment donné, voient deux chevaux dans un pré. Le fils dit à ses parents : « regardez ! voici deux chevaux et ils sont blancs, donc, en Irlande, tous les chevaux sont blancs ». Son père, qui est ingénieur, le reprend en disant : « tu ne peux pas conclure que tous les chevaux irlandais sont blancs, mais tu peux affirmer que certains d'entre eux sont blancs ». La mère, une mathématicienne, les corrige : « Non, on peut seulement dire qu'en Irlande, il existe au moins une prairie dans laquelle se trouvent au moins deux chevaux dont au moins un côté est blanc ».

Dans la pratique, nous observons fréquemment un mauvais usage des quantificateurs ; soit un quantificateur requis est carrément oublié, soit les deux types de quantificateurs sont confondus.

Exemple 2.11. En énonçant le théorème de Rolle pour une fonction f continue sur un intervalle $[a , b]$ et dérivable sur $]a , b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$, il n'est pas rare que des étudiants écrivent la thèse sous la forme $f'(c) = 0$ sans mention du quantificateur existentiel portant sur c.

Exemples 2.12. De façon caricaturale, on entend souvent des raisonnements de ce type, le premier émanant d'un élève et le second d'un enseignant : « un tel professeur est sévère, donc tous les professeurs sont vaches », « un élève ayant la caractéristique C est paresseux, donc tous les élèves de type C sont paresseux ».

Par ailleurs, les règles relatives à un emploi correct des quantificateurs ne sont pas toujours bien exploitées, bien qu'elles soient peu nombreuses (voir en annexe). Ainsi en témoignent ces quelques exemples, observés auprès de certains de nos étudiants, qui se réfèrent, respectivement, aux règles de négation, aux règles d'échange et aux règles reliant quantificateurs et connecteurs logiques.

Exemple 2.13. Quand on demande de nier certains énoncés faisant apparaître un quantificateur, certains étudiants se contentent de nier l'énoncé $P(x)$ en conservant le même quantificateur, alors qu'ils devraient évidemment changer un quantificateur existentiel en un universel (et vice-versa).

Exemple 2.14. Dans une succession de deux (ou plusieurs) quantificateurs, leur ordre n'est pas toujours indifférent, lorsqu'ils ne sont pas de même nature. Il n'est pas rare de trouver des productions d'étudiants n'ayant aucun sens parce que des quantificateurs sont employés dans un ordre inadéquat. Ainsi, dans l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires relatifs à une fonction *f* continue sur un intervalle *I*, certains étudiants écrivent cet énoncé faux «il existe un *c* dans *I* tel que, pour tout *r* de *f*(*I*), *f*(*c*) = *r* » au lieu de « pour tout *r* dans *f*(*I*), il existe un *c* dans *I* tel que *f*(*c*) = *r* ».

Exemple 2.15. En ce qui concerne les liaisons entre quantificateurs et connecteurs logiques, la tendance est forte de voir toujours une équivalence, alors que, dans certains cas, seule une implication est vraie et non sa réciproque. Il est pourtant aisé de se référer à un exemple relatif à la théorie des ensembles pour constater que des implications réciproques sont fausses. Ainsi, pour tout *x* appartenant à une réunion de deux ensembles *A* , *B*, il n'est pas vrai que tout *x* est dans *A* ou que tout *x* est dans *B* ; par ailleurs, si *A* et *B* ne sont pas vides (il existe donc au moins un élément dans *A* et il existe au moins un élément dans *B*), cela ne signifie pas que l'intersection de *A* et de *B* n'est pas vide (ou il n'est pas vrai qu'il existe un élément dans *A* et dans *B*).

Voici quelques remarques additionnelles concernant l'usage des quantificateurs.

- Quelquefois, on doit démontrer un énoncé du type suivant : « $\exists! x \in E \ , P(x)$ », qui se lit « il existe un et un seul *x* dans *E* pour lequel *P*(*x*) est vrai ». Dans ce cas, il faut démontrer en fait deux énoncés, à savoir « $\exists x \in E \ , P(x)$ » (existence) et « $\forall x \in E, \forall y \in E, \left(P(x) \wedge P(y)\right) \Rightarrow \left(x = y\right)$ (unicité).
- Plus le nombre de quantificateurs est élevé, plus l'énoncé devient difficile à comprendre et plus les risques d'erreurs est grand. Il est quelquefois possible de réduire le nombre de quantificateurs en se plaçant dans un contexte mathématique différent. Ainsi, en analyse classique, une suite (u_n) est convergente lorsque l'énoncé suivant est vrai : $\exists l \in R, \forall \varepsilon > 0, \exists m \in N, \forall n \in N, \left(n \geq m\right) \Rightarrow \left(|u_n - l| < \varepsilon\right)$. En analyse non standard, la

même propriété se traduit symboliquement comme suit : $\exists l \in R, \forall n\ igp, u_n \in H(l)$. Dans ce cas, toutefois, le « prix à payer » est évidemment le passage aux nombres hyperréels puisque la formulation non standard fait appel à des nombres igp (infiniment grands positifs, c'est-à-dire des nombres plus grands que tout réel positif) et au halo de *l* (composé des nombres infiniment proches de *l* en ce sens que leur différence avec *l* est infiniment petite, c'est-à-dire inférieure, en valeur absolue, à tout nombre réel positif).

- L'usage oral diffère parfois de l'écrit. Ainsi, il n'est pas rare qu'un professeur, au cours de son cours oral, présente une proposition sous le forme générale suivante « on a *P*(*x*) pour tout *x* », ce qui devrait s'écrire symboliquement sous la forme « $\forall x, P(x)$ ». Par ailleurs, il est important d'indiquer clairement sur quoi porte un quantificateur. Par exemple, au sein de l'ensemble des nombres réels, l'énoncé « $\forall x, \sqrt{x+1} = \sqrt{-x} \Rightarrow x = 0$ » signifie « $\forall x, \left(\left(\sqrt{x+1} = \sqrt{-x}\right) \Rightarrow (x = 0)\right)$ » et est visiblement faux ; par contre, l'énoncé « $\left(\forall x, \sqrt{x+1} = \sqrt{-x}\right) \Rightarrow x = 0$ » est vrai (puisque l'énoncé « $\forall x, \sqrt{x+1} = \sqrt{-x}$ » est faux).

- Dans la pratique, il est utile de concevoir chaque quantificateur comme un « processus ». Pour le quantificateur universel « $\forall x, P(x)$ », c'est comme si quelqu'un me donnait un *x* absolument quelconque (on dit encore arbitraire), sur lequel j'ignore tout, et il me faut alors prouver qu'on a bien *P*(*x*). Par contre, en ce qui concerne le quantificateur existentiel « $\exists x, P(x)$ », la situation est fort différente : c'est à moi de trouver au moins un *x*, parmi tous les *x* possibles, pour lequel *P*(*x*) est vrai. Par exemple, dans le cadre de la théorie des nombres entiers, l'énoncé « $\forall x, \exists y, y > x$ » est vrai car, si une personne me donne un nombre *x* arbitraire, je suis toujours capable de trouver un *y* qui est plus grand (par exemple, *y* = *x* + 1) ; par contre, l'énoncé « $\exists y, \forall x, y > x$ » est faux car je suis incapable de trouver un nombre *y* qui soit plus grand qu'un nombre *x* qui me serait donné tout à fait arbitrairement ; en effet, si je disposais d'un tel *y*, la personne qui me donne le *x* pourrait choisir ce dernier plus grand que mon *y*.

Le recours à cette façon de procéder permet d'éclairer cette situation : l'énoncé « $(\forall x \in E, P(x)) \Rightarrow (\exists x \in E, P(x))$ » est visiblement vrai chaque fois que *E* est non vide, mais est, paradoxalement, faux lorsque *E* coïncide avec l'ensemble vide ; en effet, dans cette éventualité, la première partie de l'implication est un énoncé vrai (puisque mon interlocuteur ne me donne aucun *x* et donc que je n'ai rien à faire), au contraire de la seconde partie (puisqu'il m'est impossible de trouver un *x* pour lequel on a *P*(*x*)).

3. Preuves mathématiques

D'après T. Tao [29], le passage du secondaire au supérieur (en mathématiques) se caractérise essentiellement par l'introduction systématique de la preuve dans tous les développements mathématiques (passant ainsi de la « pré-rigueur » à la « rigueur »).

En dehors des axiomes et des définitions de base, toutes les propositions mathématiques doivent être démontrées. Les preuves (ou démonstrations) jouent donc un rôle-clé dans la construction des mathématiques sur deux plans différents, à savoir au niveau de l'acceptabilité et de la compréhension.

a) Le but premier d'une preuve est de garantir la vérité d'un énoncé en partant de propositions connues et en respectant les règles de la logique. Le langage des mathématiques est ainsi universel et même éternel dans le cadre mathématique considéré.

b) Les preuves facilitent l'assimilation en profondeur d'une matière, car

- elles peuvent donner du sens aux résultats prouvés en montrant pourquoi ces derniers sont vrais
- elles fournissent des méthodes qui sont éventuellement transférables à d'autres situations et permettent dès lors, le cas échéant, de construire de nouvelles propositions.

<u>Exemple 3.1.</u> En calcul matriciel, on démontre qu'une condition nécessaire pour qu'une matrice *n*-carrée soit diagonalisable est l'existence de *n* vecteurs propres linéairement indépendants. En construisant la preuve de cette proposition, on comprend le rôle que jouent des vecteurs propres linéairement indépendants dans le processus de diagonalisation de la matrice. On *peut* alors en déduire que cette condition nécessaire est également suffisante, ce qui nous fournit, par la même occasion, un critère général caractérisant le caractère diagonalisable d'une matrice et livre même une technique de diagonalisation.

Mais, en réalité, en quoi consiste vraiment une preuve mathématique ?

Nous n'avons pas l'ambition de présenter une théorie de la preuve d'une façon complète et irréprochable, comme des logiciens pourraient le faire [30].

---

[29] Voir notamment l'article intitulé « *There's more to mathematics than rigour and proofs* » sur le blog "*What's new*" de Terrence Tao (https://terrytao.wordpress.com/career-advice/). Voir également l'article « Pensées (mathématiques) de Tao », par J. Bair, *Losanges*, 23, 2013, pp. 33-41.

Notre but principal est d'analyser concrètement le fonctionnement de certaines preuves, en partant d'exemples classiques pouvant être rencontrés au niveau de la TSU [31], ce qui pourrait déboucher sur des conseils à donner à des étudiants pour devenir plus efficaces dans leur apprentissage des mathématiques à l'Université.

Assez paradoxalement, une preuve peut être très simple ou fort compliquée.

De fait, dans les cas courants qui sont rencontrés au niveau de la TSU, une preuve peut schématiquement et souvent se ramener à un syllogisme de base [32]. Nous allons considérer ici principalement le recours au *modus ponens*, la preuve étant alors qualifiée de « directe » [33]; on pourrait traiter assez semblablement l'usage d'un *modus tollens*, la preuve étant alors appelée « indirecte » [34].

Il s'agit de démontrer qu'un énoncé est vrai ; on note ce dernier T et on l'appelle la « thèse » ; une fois démontré, l'énoncé T aura le statut de proposition et portera alors le nom de « théorème ». La preuve consiste à partir d'une proposition connue, cette dernière étant notée H et baptisée du nom d' « hypothèse », et de s'assurer qu'est vraie également l'implication « $H \Rightarrow T$ ». Le *modus ponens*

$$\begin{array}{c} H \Rightarrow T \\ H \\ ---- \\ T \end{array} ,$$

qui sera noté par la suite $(H \,;\, H \Rightarrow T)$, permet de conclure que T est bien une proposition (donc est un théorème).

<u>Exemple 3.2</u>. Soit O un objet. On suppose vraie l'hypothèse H suivante : « un exemplaire de O coûte 5 euros ». L'implication « si un exemplaire de O coûte 5 euros, alors 7 exemplaires

---

30 Pour un exposé simple, voir, par exemple, le livre « *Logique et raisonnement* », par M. Freund, Ellipses, Paris, 2011.

31 C'est ainsi que nous éviterons de recourir à des objets mathématiques assez sophistiqués, rarement rencontrés au niveau de la TSU, comme, par exemple, des catégories, des notions abstraites de topologie, des espaces de dimension infinie (éventuellement, de fonctions), ….

32 Un exposé complet sur les techniques de démonstration peut être trouvé dans le livre *How to prove it. A structural approach* de D.J. Velleman, Cambridge Un. Pr., 1994. Une synthèse en a été faite par F. Buekenhout, dans un article intitulé « Les démonstrations : une vision génétique et spiralée », *Mathématiques et Pédagogie*, 124, 1999, pp. 15-43.

33 Le plus souvent, nous adopterons le *modus ponens* comme unique règle d'inférence au départ d'axiomes. Les logiciens parlent alors de *système axiomatique de Hilbert* (cfr Freund, *op. cit.*, p. 44).

34 Les démonstrations indirectes les plus courantes sont la démonstration par l'absurde et la démonstration par contraposition.

de O coûtent 35 euros » étant clairement vraie en supposant bien sûr que tous les objets sont identiques et que le prix reste constant (en excluant, par exemple, des remises pour l'achat en grande quantité). On en déduit le théorème T : « 7 exemplaires de O coûtent 35 euros ».

Bien entendu, les cas étudiés au niveau de la TSU sont généralement plus compliqués que ceux rencontrés avec l'exemple 3.2. On peut être amené à réaliser une cascade de deux syllogismes : on introduit une proposition P qui est la conséquence du *modus ponens* $\left(H\ ;\ H \Rightarrow P\right)$, puis, à son tour, P sert de prémisse pour le nouveau syllogisme $\left(P\ ;\ P \Rightarrow T\right)$ dont la conséquence est T .

<u>Exemple 3.2 (suite).</u> Si on adopte comme hypothèse H la proposition « 3 objets O coûtent 15 euros ». On a recours à la proposition P : « 1 objet O coûte 5 euros » , ce qui nous ramène au cas étudié dans l'exemple 3.2, et nous permet de conclure la thèse T : 7 objets O coûtent 35 euros ». Ce raisonnement est classique et courant : il s'agit d'une « règle de trois » qui peut s'écrire sous la forme : « $H \Rightarrow P \Rightarrow T$ », la proposition intermédiaire P marquant en fait le ''passage par l'unité''.

Le processus décrit ci-dessus peut évidemment se reproduire plusieurs fois d'affilée, ainsi qu'en témoigne ce nouvel exemple :

<u>Exemple 3.3</u>. Dans le cadre des nombres naturels, on veut prouver que « si n est un nombre par, alors n^2 est pair également ». La démonstration peut se faire en exploitant la transitivité des implications (faciles à justifier) pour la chaîne suivante :

$$n \text{ pair} \Rightarrow \exists k\ ,\ n = 2k \Rightarrow \exists k\ ,\ n^2 = 4k^2 \Rightarrow \exists k'\ ,\ n^2 = 2k' \Rightarrow n^2 \text{ est pair}$$

Plus généralement, une preuve du théorème T est pour nous [35] constituée d'une succession de n syllogismes de type *modus ponens*, à savoir $\left(P_0\ ;\ P_0 \Rightarrow P_1\right)$, $\left(H_1\ ;\ H_1 \Rightarrow P_2\right)$, …, $\left(H_{n-1}\ ;\ H_{n-1} \Rightarrow T\right)$, où

[35] Nous n'envisagerons pas ici des techniques de démonstration qui sortent du cadre fixé de la TSU, par exemple des démonstrations par la technique dite de « descente infinie », ou encore des démonstrations réalisées par ordinateurs (comme pour la démonstration du théorème des 4 couleurs), ou …

- H_0 représente l'ensemble des propositions qui sont admises dès le départ, c'est-à-dire des hypothèses retenues, des définitions adoptées, des axiomes adoptés dans le cadre de la théorie mathématique au sein de laquelle on travaille ou encore des théorèmes déjà démontrés ; P_0 est une conjonction (d'un nombre fini) de propositions reprises dans H_0
- Pour tout *i* de 1 à *n* -1, H_i est une conjonction (d'un nombre fini) de propositions qui, soit, se retrouvent parmi celles qui sont supposées vraies au départ (c'est-à-dire qui figurent parmi H_0), soit sont démontrées auparavant (c'est-à-dire des énoncés qui se trouvent parmi $P_1, P_2, \cdots, P_{i-1}$)

D'une manière plus formelle, on considère donc

- l'ensemble **U** de tous les énoncés possibles dans le cadre de la théorie mathématique **T** considérée
- un sous-ensemble **C** de **U**, qui regroupe toutes les propositions possibles au sein de **T**.
- l'application qui, à un sous-ensemble fini *E* de **C** associe un élément *X* de **U**, lorsqu'est vraie l'implication « $\underset{P\in E}{\wedge} P \Rightarrow X$ », où « $\underset{P\in E}{\wedge} P$ » désigne la conjonction de tous les éléments de *E* ; cette relation est notée « $E \rightarrow X$ ».

En guise d'illustrations, nous analysons trois situations classiques. La première concerne la démonstration d'une inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique de deux nombres réels positifs ; les deux suivantes concernent les démonstrations par récurrence (dans des cas très simples).

<u>Exemple 3.4 : inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique de deux nombres réels positifs</u> [36]. Soient *p* et *q* deux nombres réels positifs. Il est clair que l'on a l'inégalité suivante : « $(p-q)^2 \geq 0$ ». De là, on en déduit (en ajoutant 4*pq* aux deux membres de l'inégalité) la proposition suivante « $(p+q)^2 \geq 4pq$ ». Comme *p* et *q* sont positifs, il en résulte que l'on

[36] A propos de l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique, il existe bien d'autres démonstrations parfois plus sophistiquées et concernant le cas d'un nombre fini arbitraire de réels positifs. Un aperçu de quelques preuves particulièrement esthétiques et accessibles à des étudiants en TSUM peut être trouvé dans l'article intitulé « Preuves pour démontrer l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique », par J. Bair, *Losanges*, 29, 2015, pp. 22-29.

obtient, par extraction des racines carrées, la proposition « $p+q \geq 2\sqrt{pq}$ », d'où la thèse *T* traduite par l'inégalité « $\frac{p+q}{2} \geq \sqrt{pq}$ ». Ainsi, la démonstration de l'énoncé *T* peut se formuler en faisant appel à plusieurs propositions, à savoir :

- *P* : « p et q sont des réels positifs » ; on suppose l'énoncé *P* vrai dès le départ ;
- *Q* : « $(p-q)^2 \geq 0$ » ; il est trivialement vrai (au sein des réels) ;
- *R* : « $p^2+q^2+2pq \geq 4pq$ » ; sa vérité se déduit de celle de *Q* par un jeu algébrique élémentaire ;
- *S* : « $(p+q)^2 \geq 4pq$ », ce qui est visiblement une réécriture de *R*.

Notre preuve de *T*, à partir de l'ensemble H_0 composé de *P* et de *S*, est formée par la succession des syllogismes suivants : $(Q\,;Q \Rightarrow R)$, $(R\,;R \Rightarrow S)$ et $(P \wedge S\,;(P \wedge S) \Rightarrow T)$.

Cette démonstration, composée de syllogismes simples, illustre cette pensée de Poincaré :
« *Une démonstration mathématique n'est pas une simple juxtaposition de syllogismes, ce sont des syllogismes placés dans un certain ordre, et l'ordre dans lequel ces éléments sont placés est beaucoup plus important que ne le sont les éléments eux-mêmes. Si j'ai le sentiment, l'intuition pour ainsi dire de cet ordre, de façon à apercevoir d'un coup d'œil l'ensemble du raisonnement, je ne dois plus craindre d'oublier l'un des éléments, chacun d'eux viendra se placer de lui-même dans le cadre qui lui est préparé, et sans que j'aie à faire aucun effort de mémoire* . » [37]

Exemple 3.5. Démonstration par récurrence. Nous nous proposons de démontrer la thèse *T* qui s'écrit sous la forme « $\forall n \geq 1,\ P(n)$ », où *P*(*n*) est un énoncé conditionnel dépendant de la variable *n* qui désigne un entier naturel positif.
Bien entendu, le premier « réflexe naturel » consiste à vérifier la véracité des premiers énoncés *P*(1), *P*(2), …Après un nombre jugé suffisant de vérifications de ce type, il est alors plausible de croire que la thèse est vraie. Ce type de raisonnement, appelé « induction » est assez naturel et est d'ailleurs couramment utilisé par tous les scientifiques lorsqu'ils postulent des lois générales en partant d'exemples particuliers. Mais de telles vérifications ne peuvent être réalisées que sur un nombre fini de cas, et ne garantit nullement que la thèse *T* est vraie

[37] H. Poincaré, *Science et Méthode*, Flammarion, Paris, 1940, p. 47.

car cette dernière rassemble en fait une « infinité » de propositions à vérifier. Des exemples classiques montrent qu'une trop rapide généralisation peut engendrer une erreur ; même de grands mathématiciens se sont laissés surprendre par de telles fautes, ainsi qu'en témoignent ces deux exemples célèbres :

1) Fermat a conjecturé que tout nombre F_n de la forme $F_n = 2^{\left(2^n\right)} + 1$ est un nombre premier. En effet, on peut écrire $F_0 = 2^1 + 1\,;\, F_1 = 2^2 + 1\,;\, F_2 = 2^4 + 1\,;\, F_3 = 2^8 + 1\,;\, F_4 = 2^{16} + 1$. Mais Euler a montré que $F_5 = 2^{32} + 1$ est divisible par 641 : un seul contre-exemple anéantit la conjecture.
2) Polignac a conjecturé que tout nombre impair, à partir de 3, est la somme d'une puissance de 2 et d'un nombre égal à 1 ou à un nombre premier. C'est effectivement vrai pour les premiers nombres impairs 3 , 5, 7, 9, …, Mais cette conjecture, pourtant publiée par l'Académie des Sciences en 1849, est fausse ; elle est en effet mise en défaut par le nombre pour 127 [38].

En fait, pour démontrer *T*, il s'agit de vérifier la véracité de *P*(*n*) pour *n* entier positif arbitraire. Lorsque cela ne peut être réalisé [39], il convient alors d'essayer une démonstration par récurrence.
L'idée de base consiste à voir si la propriété *P*(*n*) en question est « stable » et « se transporte » d'un cas au suivant. On part encore du premier énoncé et on vérifie que *P*(1) est vrai ; si, de plus, l'implication $P(1) \Rightarrow P(2)$ est vraie, on en déduit, par *modus ponens*, que l'énoncé *P*(2) est également vrai ; ensuite, on recommence un syllogisme avec *P*(2) comme prémisse : si l'implication $P(2) \Rightarrow P(3)$ est vraie, on en conclut que c'est également le cas pour *P*(3) ; et ainsi de suite. En fait, on construit de la sorte une infinité de syllogismes élémentaires.
Est-on certain, cette fois, de pouvoir garantir la véracité de tous les *P*(n) ? En fait, la réponse est affirmative … parce que les mathématiciens en ont décidé ainsi : cela résulte en fait du troisième axiome de Peano pour définir l'ensemble des entiers naturels.

---

[38] In « Pourquoi démontrer ce qui est évident ? », par A. Ross, *Accromath*, vol. 3, 2008, pp. 12 – 13. Pour en savoir plus, voir également l'article intitulé « Raisonnements par récurrence », par J. Bair et D. Justens, *Losanges*, 19, 2012, pp. 10-17.
[39] Dans de nombreux cas élémentaires proposés au niveau TSU, il est effectivement possible de justifier directement que l'énoncé *P*(*n*) est vrai pour *n* quelconque. Par exemple, on montre facilement que la somme I des *n* premiers nombres naturels vaut $\frac{n(n+1)}{2}$. En effet, l'on peut écrire à la fois $S = 1 + 2 + \cdots + n$ et $S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$ et en ajoutant membre à membre ces deux égalités, on obtient (comme l'avait remarqué, raconte-t-on souvent, F. Gauss quand il était âgé d'à peine 10 ans) $2S = n(n+1)$, d'où la thèse.

Ainsi, une démonstration par récurrence peut se résumer en un seul *modus ponens* de conclusion *T*, avec pour prémisse la conjonction de trois énoncés, à savoir

1) l'énoncé $P(1)$ à vérifier (étape initiale) ,
2) l'énoncé $\forall n \geq 1,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$ dont il faut s'assurer la vérité (étape d'hérédité ou de transmissibilité) ,
3) le troisième axiome de Peano supposé vrai dès le départ (ce qui permet de donner la conclusion attendue).

Constatons la difficulté potentielle que peut représenter une démonstration par récurrence pour un étudiant qui n'est pas rompu à cette pratique. Pour mener à bien une telle preuve, il faut avoir assimilé à tout le moins les concepts suivants :

- ✓ les énoncés conditionnels $P(n)$
- ✓ l'implication $\Rightarrow$
- ✓ les applications $n \to P(n)$ et $n \to \left(P(n) \Rightarrow P(n+1)\right)$, et les prédicats correspondants
- ✓ le quantificateur universel $\forall$
- ✓ l'axiomatique de Peano (pour l'étape initiale et pour l'étape d'hérédité)
- ✓ le *modus ponens*

Faute de maîtriser ces points, l'étudiant est souvent déstabilisé, notamment parce qu'il ne sait pas ce qu'il doit prouver ; par exemple, dans la justification de l'étape d'hérédité, il n'est pas rare qu'il suppose vraie la thèse à prouver … ce qui lui paraît interdit (puisqu'on lui a généralement appris qu'on ne peut pas supposer vraie la thèse à démontrer).

<u>Exemple 3.6. Démonstration par l'absurde d'un raisonnement par récurrence.</u> Abordons d'une autre manière une démonstration par récurrence, ce qui, entre parenthèses, met quelque peu en évidence la richesse et la variété des raisonnements mathématiques.

Soit $P(n)$ un énoncé conditionnel pour lequel la variable *n* varie dans l'ensemble des entiers naturels. Nous nous proposons donc de démontrer que si l'énoncé $P(0)$ est vrai et si est également vraie l'implication $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ pour tout entier *k*, alors l'énoncé $P(n)$ est vrai pour tout entier *n*.

Pour notre démonstration, procédons par l'absurde et supposons dès lors fausse la thèse qui sera notée simplement *T*.

Nous allons considérer une succession de propositions, la plupart sous forme d'implications, en faisant intervenir les énoncés suivants ou leur négation :

- *T* : l'énoncé conditionnel $P(n)$ est vrai pour tout entier *n* ;

- H_1 : l'énoncé *P*(0) est vrai ;
- H_2 : l'implication $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ est vraie pour tout entier *k* ;
- *A* : l'ensemble des axiomes de Peano définissant l'ensemble des entiers naturels ;
- *B* : la proposition suivante : « l'ensemble des entiers naturels est bien ordonné », ce qui signifie que tout sous-ensemble non vide de nombre naturels possède un plus petit élément.
- *P* : l'assertion *P*(*j*) est fausse pour un certain entier *j* ;
- *Q* : on peut choisir *j* le plus petit possible tel que l'énoncé *P* est vrai ;
- *R* : *j* > 0 ;
- *S* : l'assertion *P*(*j*-1) est vraie.

Nous supposons vraies au départ $\neg T$ (on nie donc la thèse), H_1 et H_2 (les deux hypothèses du théorème que l'on cherche à démontrer, ainsi que *A* et *B* (à savoir les axiomes de Peano et une de leurs conséquences).

Avec ces notations, nous allons successivement nous assurer de la véracité de certaines implications ; la démarche suivie comprend sept étapes :

a) Supposer vraie l'assertion $\neg T$ implique que *P* est une proposition. De même, la véracité des axiomes *A* entraîne celle de *B*, car est vraie l'implication $A \Rightarrow B$ (qui peut effectivement se démontrer, mais nous l'admettrons ici).

b) La conjonction de *P* et de *B* implique que *Q* est une proposition.

c) La conjonction de H_1 et de *Q* implique que *R* est une proposition.

d) La conjonction de *R* et de *Q* implique que *S* est proposition.

e) La conjonction de *S* et de H_2 implique que l'assertion P(j) est vraie.

f) En conséquence, l'assertion P(j) est à la fois fausse (étape a) et vraie (étape e), ce qui est contradictoire.

g) Dès lors, l'hypothèse de départ $\neg T$ est fausse, d'où, en vertu du principe du tiers exclu, la thèse *T* est vraie.

Revenons aux exemples qui l'accompagnent ; ils mettent en évidence :

- D'une part, la simplicité du processus employé dans une (telle) démonstration : il s'agit essentiellement d'appliquer de simples syllogismes de type *modus ponens* pour adjoindre des propositions à un ensemble H_0 de départ, jusqu'à ce qu'on puisse y ajouter l'énoncé *T* à démontrer.

- D'autre part, la possibilité de rencontrer des situations compliquées. En effet, le nombre d'étapes (c'est-à-dire de « boucles ») qui peuvent être utilisées dans le processus n'est pas connu d'avance, et il peut être fort variable ainsi que le suggèrent les exemples précédents [40] ; ainsi, on constate qu'un même énoncé peut être démontré avec un nombre plus ou moins grand de syllogismes, et que ce dernier peut être réduit lorsqu'entrent en jeu des conjonctions composées avec un nombre plus élevé de propriétés bien choisies Au surplus, il n'est pas toujours simple de choisir les sous-ensembles *E* pour construire les différents syllogismes intervenant dans la preuve, en effet, le nombre et la nature de leurs éléments ne sont pas forcément connus.

  Attardons-nous sur ce point capital. Il est clair que le point de départ H_0 peut s'avérer important dans l'élaboration d'une preuve : selon les éléments choisis en première étape dans H_0, la preuve peut s'avérer plus ou moins facile, courte, simple, voire surprenante, astucieuse, et même, dans une certaine manière, élégante. Bien entendu, plus le nombre d'éléments dans H_0 est élevé, plus les possibilités de raisonner augmentent. Donnons deux exemples illustrant ceci.

<u>Exemple 3.6</u>. Il s'agit de démontrer, au sein des nombres réels, l'irrationalité du nombre $\sqrt{2}$ en procédant par l'absurde, c'est-à-dire en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel et en trouvant alors pour thèse *T* une contradiction.

On adopte souvent comme point de départ H_0 l'ensemble composé des deux propositions suivantes :

A : « $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, avec *a* et *b* entiers positifs » ; B : « le plus grand commun diviseur de *a* et *b* est égal à 1 ». On fait ensuite appel, successivement aux énoncés *C* : « $a^2 = 2b^2$ » , *D* : « a^2 est pair », *E* : « *a* est pair » , *F* : « b^2 est pair » , *G* : « *b* est pair ».

[40] On peut même « boucler sans fin ».

On construit alors la preuve à l'aide de cette suggestion de six syllogismes (faciles à justifier) : $(A, A \Rightarrow C)$, $(C, C \Rightarrow D)$, $(D, D \Rightarrow E)$, $(E, E \Rightarrow F)$, $(F, F \Rightarrow G)$ et enfin $(B \wedge G, (B \wedge G) \Rightarrow T)$.

Si on remplace H_0 par H'_0 qui est composé, cette fois, de *A* et de B' : « tout nombre entier naturel se décompose, de façon unique, en un produit de facteurs premiers », on peut écrire une preuve à l'aide de trois syllogismes seulement, à savoir $(A, A \Rightarrow C)$, $(B', B' \Rightarrow B'')$ où B'' est l'énoncé « le carré d'un entier naturel est le produit d'un nombre pair de facteurs premiers », puis $(B'' \wedge C, (B'' \wedge C) \Rightarrow T)$.

Exemple 3.7. Il est plus facile de démontrer des propriétés sur les limites de fonctions en analyse non standard qu'en analyse classique, car l'axiomatique sur les hyperréels est plus riche que celle relative aux réels ; mais, évidemment, cette surabondance d'axiomes est le prix à payer pour simplifier les preuves en y diminuant le nombre de quantificateurs.

Par ailleurs, le choix des éléments retenus pour former les divers ensembles *E* intervenant dans le processus n'est pas toujours évident. Il peut se faire par un raisonnement plausible, quelquefois en partant de la thèse à prouver, ainsi que peut en attester l'exemple 3.4.

4. Démonstrations et enseignement

Au vu de notre conception de l'enseignement (des mathématiques) à l'Université, il nous semble exclu qu'un cours de mathématiques n'accorde pas une grande importance aux démonstrations et ne livre que des « recettes » prêtes à l'emploi. Cela ne signifie pas que tout doit être démontré. Une des tâches, importante et difficile, de l'enseignant consiste précisément à définir clairement la matière, en fixant le cadre théorique dans lequel le cours va se dérouler et en présentant les théorèmes qu'il juge intéressants ; ceux-ci seront situés dans leur contexte et motivés, éventuellement illustrés par des exemples et des contre-exemples bien choisis qui montrent notamment l'utilité et la portée des hypothèses, et démontrés par une preuve adaptée au public, en donnant si possible des repères historiques pour mieux faire comprendre le cheminement suivi par les auteurs des résultats annoncés et en présentant des applications (concrètes ou abstraites) pertinentes.

Si le travail de l'enseignant est conséquent, il en va de même pour celui de l'étudiant. Remarquons d'emblée que certains débutants peuvent se sentir « allergiques » à des démonstrations mathématiques. D'une part, certains étudiants se préoccupent essentiellement du « savoir-faire » et se contentent souvent de savoir résoudre mécaniquement (et de façon parfois aveugle) des exercices ; en d'autres termes, ils s'intéressent essentiellement aux procédures et non aux concepts, ce qui n'apporte qu'une connaissance superficielle de la matière ; ceci ne nous paraît pas suffisant pour bien réussir des études universitaires dignes de ce nom. D'autre part, comme l'a mis en évidence N. Rouche [41] , il existe le « paradoxe » suivant : d'une part, un énoncé mathématique pour lequel une preuve est demandée doit initialement être supposé vrai, sinon une démonstration ne vaudrait pas la peine d'être entamée ; mais, d'autre part, la véracité de l'énoncé doit vite être abandonnée car il est évidemment exclu (par la logique) que la propriété supposée vraie au départ puisse intervenir dans la démonstration : ce double statut de l'énoncé peut déranger certains étudiants et cette difficulté risque de se présenter singulièrement dans des démonstrations par récurrence. Par ailleurs, il est assez facile pour un auditeur attentif de bien comprendre une preuve construite progressivement par un professeur … qui connaît évidemment sa matière et a préparé une façon adéquate de présenter sa matière. L'apprenant doit « s'approprier » la matière enseignée.

Or, une des difficultés rencontrées dans l'enseignement des mathématiques au niveau de la TSU réside dans l'hétérogénéité du public concerné. Certains étudiants ont reçu en mathématiques une formation théorique poussée lors de leurs études antérieures et sont donc rompus aux raisonnements parce qu'ils ont rencontré antérieurement de nombreuses démonstrations et ont eux-mêmes longuement réfléchi pour résoudre des problèmes théoriques inédits qui leur ont été proposés. Par contre, d'autres étudiants sont beaucoup moins habitués à comprendre et produire des démonstrations ; certains n'ont jamais (ou presque jamais) été confrontés à des preuves. Ces derniers doivent prendre conscience de l'importances de la démarche réflexive et des raisonnements dans l'apprentissage mathématique et, le cas échéant, abandonner l'idée que les mathématiques consistent essentiellement à utiliser mécaniquement (et sans réfléchir) une « recette » prête à l'emploi.

[41] Rouche N., Apprendre à prouver, *Bull. Soc. Math. Belgique*, série A, 42, 1990, pp. 117 - 146.

Il importe que ces étudiants s'habituent à construire par eux-mêmes des preuves. Comme l'a écrit G. Glaeser, « *l'éducation mathématique ne procède pas par progrès insensibles ; une étape décisive, véritable mutation de la pensée, survient lorsque le jeune élève imagine une démonstration logique pour la première fois de sa vie, et prend conscience du caractère convaincant de l'argument. Il restera inexpérimenté longtemps encore ; mais il aura de moins en moins recours au livre ou au maître pour juger si un raisonnement est correct. Il se convaincra qu'en mathématique ''il n'y a presque rien à apprendre, tout à comprendre''.* » [42]
Cette réflexion implique la nécessité de prévoir, pour les étudiants qui en ont besoin et qui le souhaitent, des activités adéquates les amenant à franchir cette étape cruciale qui, pour de nombreux étudiants, se situe au niveau de la TSU [43]. Bien entendu, cela demande du temps et des moyens spécifiques.
Essayons de cerner quelques pistes qui pourraient être utilisées dans ce cadre.

L'acte de raisonner étant personnel, il semble difficile de l'incorporer dans un enseignement. Comme l'a écrit Lombard, « *la triste réalité est plutôt que l'on ne sait pas apprendre à raisonner. L'apprentissage du raisonnement est probablement semblable à celui de la marche à pied ou à celui de l'escalade : mettre un enfant devant une paroi à franchir, même avec une « boîte à outils » faire de piolets, de cordes ou de pitons, ne lui apprend guère à grimper… Et il est clair que celui ou celle qui apprendra le mieux le fera d'abord par sa motivation personnelle, et que cette motivation personnelle est généralement faite de curiosité, que cette curiosité repose peut-être même essentiellement sur l'envie d'être meilleur que les autres … et que certainement elle se nourrit avant toutes choses d'un peu de réussite !* » [44]
Et pourtant des conseils généraux peuvent être donnés par le professeur qui peut se baser notamment sur son expérience personnelle ; en effet, il est un mathématicien professionnel et un chercheur en mathématiques ; il a de ce fait déjà rencontré et solutionné de nombreux problèmes mathématiques. Or, comme l'a si bien écrit Poincaré [45], « *entre le travail d'un étudiant qui essaie de résoudre un problème de Géométrie ou d'Algèbre et un travail d'invention, on peut dire qu'il n'y a qu'une différence de degré, de niveau, les deux travaux étant de nature analogue* ».

[42] G. Glaeser, *Mathématiques pour l'élève professeur*, Hermann, Paris, 1973, p. 42.
[43] Certains l'ont déjà franchie antérieurement … mais ils sont probablement les moins nombreux.
[44] P. Lombard, « De l'intuition à l'argumentation, est-il possible d'apprendre à raisonner ? », *Bulletin de l'APMEP*, n° 451, 2004, pp. 242 – 271 ; citation : page 253.
[45] Cette question est abordée par Poincaré dans son ouvrage *Science et Méthode*, p. 104 ; la pensée en question est citée par J. Hadamard, *op. cit.*, p. 99.

Il s'agit essentiellement et simplement [46] de « cogiter intelligemment », c'est-à-dire, en respectant le sens étymologique des termes [47], de choisir (adéquatement) les bonnes propositions qui permettront de construire [48] la démonstration souhaitée. A l'instar de H. Poincaré, on pourrait se demander comment un tel choix peut-il se faire ? Pour cet auteur (qui savait évidemment de quoi il dissertait), les règles qui doivent le guider « *sont extrêmement fines et délicates, il est à peu près impossible de les énoncer dans un langage précis ; elles se sentent plutôt qu'elles ne se formulent ; comment dans ces conditions imaginer un crible capable de les appliquer mécaniquement ?* » (cité par Hadamard, *ibidem*, pp. 37 – 38). A la suite de son Maître, Hadamard se penche sur cette problématique et en arrive « *à la double conclusion :*

- *que l'invention est un choix*
- *que ce choix est gouverné de façon impérative par le sens de la beauté scientifique*. »

(Hadamard, *ibidem*, p. 38)

Malgré la difficulté extrême de l'entreprise, tentons modestement d'apporter quelques idées concrètes pour aider les étudiants (au niveau de la TSU) dans leurs choix.
Le point de départ d'un enseignement sur les démonstrations mathématiques doit consister en une prise de conscience, aussi bien de la part de l'enseignant que des apprenants, de la nature d'une preuve.

La construction d'une preuve consiste, très schématiquement, à élaborer un « réseau argumentatif » [49] qui commence avec des propositions données au départ (les hypothèses) et aboutit à une conclusion dont la véracité doit être établie (la thèse), en transitant par des « nœuds » intermédiaires, qui sont des propositions démontrées, selon des règles logiques précises (essentiellement, dans le cas considéré ici, à des syllogismes élémentaires comme il a été expliqué ci-dessus). Voici un exemple [50] d'un tel réseau (facile à réaliser graphiquement): il est composé, en plus des nœuds (ou sommets) baptisés « hypothèses » et « conclusion », des nœuds notés de *A* à *G*, les lignes en traits pleins marquant la possibilité de passer d'un nœud ou de la conjonction de plusieurs nœuds à un autre sommet au moyen d'un *modus ponens*. Pour aller des hypothèses à la conclusion, il est nécessaire de passer par tous les

[46] Cette simplicité étant assurément toute platonique.
[47] Comme le fait remarquer J. Hadamard, *op. cit.*, p. 36, « cogiter » veut dire « agiter ensemble », tandis que « intelligo » signifie, selon Saint-Augustin, « choisir parmi ».
[48] Voir ci-dessous.
[49] P. Lombard, *op. cit.*, p. 244
[50] Exemple fictif inspiré de P. Lombard, *op. cit.*, p. 244.

autres nœuds de *A* à *G*. Ainsi, *F* et *G* sont indispensables pour arriver à la conclusion ; *F* est issu de *D* et *E* ; *G* est atteint depuis *E, D* depuis *A* et *B, E* depuis *B* et *C,* tandis que *A, B* et *C* découlent directement des hypothèses. Remarquons que l'adjonction du seul nœud *H* nous permettrait d'aller beaucoup plus simplement et vite des hypothèses à la conclusion : il suffirait d'emprunter le chemin passant par les sommets intermédiaires *C* et *H.*

Cet exemple suggère des difficultés que peuvent rencontrer des étudiants (mais aussi des mathématiciens professionnels) dans la construction d'une preuve [51]. Les nœuds intermédiaires qui font partie d'une démonstration doivent être trouvés et certains de leurs liens établis ; il est à noter que l'unicité d'un tel réseau n'est généralement pas garantie et qu'il est alors demandé de construire un chemin le plus « adéquat » possible. Un travail de ce type est évidemment difficile [52], car il réclame des connaissances [53] , des habitudes de raisonner, ainsi que de la créativité, de la motivation, de la volonté, de la persévérance, …

Pour atteindre l'objectif visé, le processus peut être long et compliqué ; il fait appel aussi bien au conscient qu'à l'inconscient, ainsi que l'a décrit F. Galton [54] de façon imagée : « *Quand je suis en train de méditer sur quelque chose, il me semble que le processus de cette méditation est le suivant : les idées qui se trouvent à un moment quelconque en pleine conscience paraissent attirer d'elles-mêmes les plus appropriées parmi un certain nombre d'idées qui se trouvent proches, bien qu'imparfaitement à portée de mon conscient. Tout se passe comme s'il y avait dans mon esprit une salle d'audience où la pleine conscience tient salon et où deux ou trois idées comparaissent simultanément ; et en même temps, une antichambre pleine d'idées plus ou moins apparentées, située juste hors de vue de la pleine conscience. Venant de cette antichambre, les idées les plus liées à celles qui sont dans la salle d'audience semblent être convoquées d'une manière mécaniquement logique, chacune ayant son tour d'audience.* »

Concrètement, il peut être recommandé de travailler en plusieurs phases, qui sont étroitement interconnectées, mais que nous présenterons de façon séquentielle pour la commodité et l'efficacité de l'exposé.

---

[51] Nous n'envisageons pas ici le problème de la rédaction finale.

[52] Le mathématicien et poète D. Bessis compare cette situation à celle dans laquelle se trouverait un explorateur abandonné au milieu d'une forêt vierge et sans carte, ni boussole (ni GPS).

[53] Plus on en dispose, plus les possibilités d'aboutir seront grandes … mais plus les choix seront nombreux (et peut-être délicats) !

[54] Galton F., *Inquiries into Human Faculty*, 1908, p. 146; cité par J. Hadamard, *Essai sur la psychologie de l'ivention dans le domaine mathématique*, Gauthier-Villars, 1975, p. 32

1) Le travail de recherche d'une démonstration doit commencer par une **analyse** du problème posé. Il convient d'avoir une idée précise de ce qui est donné (les hypothèses) et de ce qui est demandé (la conclusion). Il importe également de se faire une idée de la portée du résultat que l'on cherche à prouver. A cet effet, il peut être utile d'essayer d'appliquer l'énoncé à des exemples simples, parfois à des cas-limites, de trouver des contre-exemples montrant l'utilité des hypothèses, d'essayer d'illustrer le tout au moyen d'une figure.

   <u>Exemple 4.1.</u> En analyse mathématique, le théorème de Rolle affirme que, pour une fonction f dérivable sur un intervalle $]a , b[$, continue sur $[a , b]$ et telle que $f(a) = f(b)$, il existe un point c de $]a , b[$ tel que $f'(c) = 0$. La portée de ce théorème et de ses hypothèses pourra être illustrée, par exemple, en traçant, pour $a = -1$ et $b = 1$, la représentation graphique des fonctions définies par $f(x) = 1 - x^2$, $f(x) = 1 - |x|$, $f(x) = 1 - x$, …

2) On peut ensuite, le plus souvent, faire appel à son « **intuition** », ce qui a pour résultat de fournir, dès la première approche du problème posé, un « embryon de réseau »[55] , A cet effet, il importe de connaître des résultats similaires, avec les raisonnements suivis pour les prouver, spécialement ceux qui ont été obtenus auparavant et qui pourraient servir dans la preuve cherchée, car les résultats nouveaux sont généralement construits au départ de théories plus anciennes.

   <u>Exemple 4.2.</u> On peut utiliser la méthode CBR, acronyme pour *Case Based Reasoning* en anglais ou « méthode basée sur l'étude de cas » en français. Cette méthode, développée initialement pour traiter des problèmes rencontrés en intelligence artificielle permet d'exploiter méthodiquement des expériences antérieures. Elle a été adaptée par G. Haesbroeck pour résoudre des problèmes mathématiques. Schématiquement, on peut, « *grâce à un système d'indexation, retrouver des cas emmagasinés (avec leur solution) qui sont proches du problème traité. Les cas sélectionnés sont éventuellement modifiés pour adapter leur solution à la situation examinée* ». Un développement plus complet de cette heuristique ainsi qu'un exemple

[55] P. Lombard, *op. cit.*, p. 246.

concret d'utilisation de cette méthode au niveau de la TSUM se trouvent dans un article de cette auteure [56].

Exemple 4.3. En analyse, le théorème de Lagrange (ou formule des accroissements finis) affirme que, pour une fonction *f* dérivable sur un intervalle $]a\,,b[$ et continue sur $[a\,,b]$, il existe un point *c* de $]a\,,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)\,f'(c)$. Pour démontrer ce résultat, il est utile de se souvenir de l'existence du théorème de Rolle (rappelé ci-dessus) : classiquement, celui-ci joue le rôle de « lemme » : il a été démontré antérieurement dans le cours et peut être exploité dans la preuve en question.

3) Il est souvent utile de **partir de la conclusion** à démontrer pour trouver des propositions qui permettraient d'atteindre le thèse en question. Dans ce cas, on utilise généralement un raisonnement plausible et non démonstratif du type suivant : l'implication « $T \Rightarrow P$ » est vraie et *T* est plausible, donc *P* est plausible. Il est à noter qu'il est assez raisonnable de supposer que *T* est plausible, mais qu'à ce stade, ce n'est nullement une certitude ; de nombreux novices commettent l'erreur de tenir dès le départ la thèse pour vraie (alors que c'est précisément ce qu'il faut démontrer). Voici des exemples déjà considérés qui illustrent ce point.

Exemple 4.4. Si l'on considère l'inégalité traduisant le fait que la moyenne arithmétique de deux nombres positifs est inférieure ou égale à leur moyenne géométrique (exemple 3.4), il semble assez « naturel » de penser à éliminer le symbole de la racine carrée provenant de la moyenne géométrique, ce qui peut se faire en élevant au carré les deux membres de l'inégalité à démontrer. On dispose alors de cette implication « $p+q \le 2\sqrt{pq} \Rightarrow (p+q)^2 \le 4pq$ » qui est toujours vraie. Il convient de constater que la réciproque n'est pas forcément valable, mais qu'elle l'est effectivement si on lui adjoint l'hypothèse selon laquelle *a* et *b* sont tous deux positifs ou nuls. Partir de la thèse permet donc non seulement de trouver la proposition *S* intermédiaire, mais aussi de deviner que celle-ci doit être jointe à *P* pour conclure.

[56] Une heuristique, calquée sur la méthode CBR (Case Based Reasoning), pour résoudre des problèmes de mathématiques, par G. Haesbroeck, *Mathématique et Pédagogie*, 124, 1999, pp. 5-14.

Exemple 4.4. Dans le cas de la formule des accroissements finis (voir exemple 4.3), l'interprétation géométrique de la thèse conduit spontanément à considérer la droite passant par les deux points (*a, f(a)*) et (*b , f(b)*), dont l'équation est $y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$. Le second membre de cette dernière égalité peut alors être comparé à *f(x).*

Exemple 4.5. Dans une démonstration par récurrence (voir notamment l'exemple 3.5), c'est un semblable argument qui mène à la considération de l'étape de transmissibilité. En effet, on fait alors appel à un réseau où peuvent apparaître des simples flèches traduisant de simples vérifications et des doubles flèches désignant des implications au sens de la logique.

4) Les deux extrémités du réseau recherché ayant été ainsi ébauchées dans les points précédents, il ne « reste plus qu'à » le **compléter** pour obtenir un chemin « connexe » (c'est-à-dire intuitivement « sans trous ») reliant les nœuds relatifs aux hypothèses et à la conclusion … ce qui est parfois beaucoup plus facile à écrire qu'à réaliser.

Exemple 4.6. Dans la preuve du théorème de Lagrange amorcée plus haut, pour pouvoir appliquer le théorème de Rolle (exemple 4.1) en faisant appel à la fonction g définie par $g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$ (voir exemple 4.5), il suffit de considérer la fonction *h* définie par *h(x) = f(x) – g(x),* qui satisfait aux hypothèses du théorème de Rolle ce qui permet de conclure à l'existence d'un *c* entre *a* et *b* tel que *h'(c) = 0*, d'où la conclusion.

Exemple 4.7. Nous nous proposons de démontrer la classique formule donnant le cosinus de la somme des deux angles comme la différence entre le produit des cosinus et celui des sinus de ces deux angles [57]. Nous allons construire, pas à pas, un réseau argumentatif partant d'hypothèses (qui seront désignées par $\mathbf{H}_i$ pour un nombre adéquat *n* de valeurs prises par l'indice *i*) pour arriver à la conclusion (qui sera notée ***C***). A cet effet, nous allons travailler au sein d'un triangle (rectiligne plan) en adoptant

[57] L'idée de cette preuve a été fournie par J. Goldsteinas. Pour en savoir plus sur le sujet, voir l'article intitulé « Autour du théorème d'al-Kashi », par J. Bair et J. Goldsteinas, *Losanges*, 19, 2012, pp. 25-33.

les hypothèses (qui consistent en des notations pour la première et de propriétés supposées connues pour les suivantes) ainsi que la conclusion suivantes :

H₁ : *A*, *B* et *C* sont les sommets du triangle considéré, dont les (longueurs des) côtés opposés sont *a*, *b* et *c*, tandis que les (mesures des) angles correspondants sont α , β , γ ; *H* est le pied de la perpendiculaire abaissée de *A* sur le coté *BC*.

H_2 : $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

H_3 : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

H_4 : $\cos\beta = \frac{|BH|}{c}$ et $\cos\gamma = \frac{|HC|}{b}$

H_5 : $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$ et $\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$

H_6 : $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

C : $\cos(\beta + \gamma) = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma$

Observons que la formule finale **C** n'est pas à découvrir et qu'il n'est pas nécessaire de penser, dès le départ, à toutes les hypothèses, l'utilité de certaines d'entre elles pouvant apparaître dans le courant du raisonnement.

La construction du réseau argumentatif se fera en quatre étapes, conformément avec ce qui précède.

1) Le réseau s'amorce en suivant une certaine intuition, cumulée avec une certaine expérience des démonstrations. Ce départ semble naturel une fois que le cadre de travail (à savoir le triangle) et la conclusion sont fixés : pour trouver les hypothèses **H_i**, il suffit (en quelque sorte) de rassembler adéquatement diverses propriétés connues sur les triangles faisant intervenir la somme de deux angles, les cosinus et les sinus des différents angles ; les implications ne concernent à ce stade que de passer naturellement de **H_1** à **H_i** pour *i* = 1, 2, 3.
2) Vient ensuite une phase progressive consistant à réunir divers sommets du réseau amorcé et d'en déduire de proche en proche diverses propositions nouvelles, à savoir

   P_1 : $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(\beta + \gamma)$. Il est clair que la conjonction de **H_2** et de **H_3** implique **P_1**.

$\mathbf{P_2}$: $(c \cos\beta + b \cos\gamma)^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos(\beta+\gamma)$. Il est facile de constater que la conjonction de $\mathbf{H_3}$ et de $\mathbf{H_4}$ implique $\mathbf{P_2}$.

$\mathbf{P_3}$: $c^2 \left(\cos^2\beta - 1\right) + b^2 \left(\cos^2\gamma - 1\right) + 2bc \cos\beta \cos\gamma = 2bc \cos(\beta+\gamma)$. On voit sans peine que la conjonction de $\mathbf{P_2}$ et de $\mathbf{H_5}$ implique $\mathbf{P_3}$.

$\mathbf{P_4}$: $2bc \cos(\beta+\gamma) = 2bc \cos\beta \cos\gamma - \left(b^2 \sin^2\gamma + c^2 \sin^2\gamma\right)$. Bien entendu, $\mathbf{P_3}$ implique $\mathbf{P_4}$.

3) A partir d'ici, le raisonnement étant en quelque sorte « bloqué », va commencer une phase régressive qui va partir notamment de la conclusion C et va générer deux nouvelles propositions, à savoir

   $\mathbf{P_5}$: $b^2 \sin^2\gamma + c^2 \sin^2\beta = 2bc \sin\beta \sin\gamma$. La conjonction de $\mathbf{P_4}$ et de **C** implique clairement $\mathbf{P_5}$

   $\mathbf{P_6}$: $(b \sin\gamma + c \sin\beta)^2 = 0$. Les propositions $\mathbf{P_5}$ et $\mathbf{P_6}$ sont évidemment équivalentes.

4) Il reste à terminer la construction du réseau, ce qui peut être fait en constatant que la conjonction de $\mathbf{P_6}$ et de $\mathbf{H_6}$ implique **C**.

Notons encore qu'il existe souvent de nombreuses autres façons de démontrer un même résultat mathématique. Le choix d'un type de raisonnement se fait, bien sûr, en fonction des connaissances de ce celui qui réalise la preuve, mais aussi avec une certaine recherche d'esthétisme et d'efficacité. Illustrons ces propos en prolongeant l'exemple précédent.

Exemple 4.7 (suite). Les preuves de la formule donnant le cosinus d'une somme sont nombreuses. Nous en proposons deux que nous trouvons « belles » (dans un sens qui sera quelque peu précisé dans la suite [58]).

La méthode la plus rapide et la plus « efficace » consiste assurément à faire appel aux exponentielles de nombres complexes. En effet, en notant *cis x* l'exponentielle en base e du nombre complexe *ix*, on a directement (comme propriété des exponentielles) $cis(\beta+\gamma) = cis\beta \quad cis\gamma$. La conclusion s'obtient aisément en développant le produit du second membre et en égalant la partie réelle des deux membres, l'égalité des parties

[58] A ce sujet, citons G. Hardy : « *Il est sans doute très difficile de définir la beauté mathématique – mais n'en va-t-il pas ainsi de toute beauté ? Nous pouvons parfaitement ignorer ce que nous entendons par un beau théorème, mais cela ne nous empêche pas d'en reconnaître un lorsque nous le lisons.* » (G. Hardy, *L'apologie d'un mathématicien*, Belin, Paris, 1985, pp. 23 – 24.

imaginaires livrant, pour le même prix, la formule relative au sinus d'une somme. C'est évidemment rapide et simple … pour celui qui connaît les exponentielles de nombres complexes !

Une autre démonstration qui me semble « jolie » est la méthode de Gauss [59] pour démontrer la formule bien connue donnant le cosinus d'une différence, la formule considérée ici s'en déduisant évidemment sans peine. Il s'agit de considérer sur le cercle trigonométrique les points M et N d'abscisses curvilignes égales aux deux arcs (ou angles) considérés et situés au-dessus de l'axe horizontal. La méthode en question consiste à calculer la distance MN dans deux repères orthogonaux : en coordonnées cartésiennes d'une part [avec les axes de base, à savoir l'horizontal pour les abscisses et le vertical pour les ordonnées, les coordonnées des deux points étant les cosinus (pour les abscisses) et les sinus (pour les ordonnées) des deux angles considérés] et dans un autre repère orthogonal [à savoir celui de même origine O que pour les coordonnées cartésiennes, avec l'axe ON pour les nouvelles abscisses et la perpendiculaire OP menée à ON pour les nouvelles ordonnées, l'un des deux points correspondant au premier vecteur unitaire tandis que le second possède le cosinus (pour abscisse) et le sinus (pour l'ordonnée) de la différence es deux angles en question]. Des calculs algébriques élémentaires mènent aisément à la conclusion.

Ces deux preuves sont assurément « belles » dans le sens où elles sont quasi immédiates (quand on se place dans le bon cadre théorique) et où, pour les reconstruire, il suffit de retenir une idée de synthèse : dans le premier cas, il s'agit d'utiliser une propriété classique des exponentielles avec des nombres complexes, et dans le second de calculer de deux manières la distance (euclidienne) entre deux points et avec la même formule donnant le carré de la distance comme la somme des carrés de la différence entre les coordonnées des points considérés. Une telle synthèse dégage une certaine beauté, car, comme l'a joliment écrit le grand Poincaré lui-même : « *le sentiment de l'élégance mathématique n'est autre chose que la satisfaction due à je ne sais quelle adaptation entre la solution que l'on vient de découvrir et les besoins de notre esprit, et c'est à cause de cette adaptation même que cette solution peut être pour nous un instrument. Cette satisfaction esthétique est par suite liée à l'économie de pensée.* » (*Science et méthode*, Flammarion, Paris, 1940, page 26) ; le même auteur écrit par ailleurs « *cette économie de pensée, cette économie d'effort, qui est d'après*

[59] Voir l'annexe IV de la quatrième édition de son livre « *Traité de trigonométrie rectiligne* », par N.J. Schons, La Procure, Namur – Bruxelles, 1963, page 240,

Mach la tendance constante de la science, est une source de beauté en même temps qu'un avantage pratique » (ibidem, page 16).

Ces deux démonstrations, surtout la première, possèdent d'autres qualités esthétiques ; on peut notamment leur appliquer le texte suivant de Hardy consacré à ce que l'auteur appelle de « *''vraies mathématiques''. […] Il y a un très haut degré d'inattendu, allié à l'inévitable et à l'économie. Le raisonnement prend la forme la plus étrange et la plus surprenante ; les armes employées semblent d'une simplicité enfantine au regard de la portée des résultats ; mais on n'échappe pas aux conclusions. Il n'y a pas de complication de détail : une seule ligne d'attaque suffit dans chaque cas, et ceci vaut encore pour la démonstration de maint théorème bien plus difficile, dont l'appréciation complète requiert un haut niveau de compétence technique. Il ne doit pas y avoir de nombreuses ''variantes'' dans une démonstration mathématique : la ''division en cas'' est une des formes les plus ennuyeuses du raisonnement. Une démonstration doit ressembler à une constellation simple et nettement définie, pas à un amas diffus dans la Voie Lactée.* » [60]

La preuve donnée au début de cet exemple est incontestablement plus longue. Or, d'après Poincaré toujours, *« en s'allongeant, nos démonstrations perdent cette apparence d'harmonie dont j'ai expliqué tout à l'heure le rôle utile* » (ibidem, page 28).

Ce qui précède ne signifie pas que le raisonnement exposé dans l'exemple 4.7 est dénué d'intérêt. En effet, son atout premier réside dans le fait que toute la démonstration est « intrinsèque » au triangle *ABC*, en ce sens que seules des propriétés classiques d'éléments de ce triangle entrent en jeu. En sus, la preuve en elle-même fournit une excellente opportunité de générer des réflexions métacognitives sur la façon dont on peut construire un réseau argumentatif prouvant la formule étudiée, ainsi que d'exploiter plusieurs propriétés de géométrie et de trigonométrie enseignées dans le secondaire.

Cette petite analyse met en évidence des difficultés que pourraient rencontrer des élèves. En effet, la méthodologie suivie va dépendre fortement du cadre dans lequel on se place, et celui-ci peut varier énormément et de façon pouvant paraître surprenante : pour démontrer une formule de trigonométrie, on peut travailler avec des fonctions

[60] G. Hardy, *L'apologie d'un mathématicien*, *op. cit.*, pp. 38 – 39.

exponentielles (de nombres complexes) ou avec des coordonnées (dans deux repères différents avec la méthode de Gauss) ou encore au sein d'un triangle avec diverses formules de géométrie et de trigonométrie (pour la preuve ci-dessus). Dans le cas de notre raisonnement, la phase d'intuition et le changement dans les phases (progressive ou régressive) me semblent cruciaux, dans la mesure où ils sont nécessaires, mais aussi suffisants (en quelque sorte) pour réaliser une synthèse de vos propos. Or, comme l'a écrit J. Hadamard, « *ceux qui ont une vision d'une telle synthèse 'comprennent les mathématiques'* » [61] (*Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, op. cit., page 100).

Il est évident que les conseils formulés ci-dessus ne constituent pas à eux seuls une « recette miracle » qui s'applique à tous, avec fruits, sans efforts et dans tous les cas. C'est pourquoi, la « méthode » se complète par un cinquième point, dont l'importance surpasse probablement celle des quatre précédents. Cet ultime conseil recommande aux étudiants de s'efforcer, aussi souvent que possible, de construire des démonstrations variées. C'est en effet par une **pratique régulière** des preuves et de leur analyse métacognitive qu'un étudiant pourra progresser idéalement dans son apprentissage des mathématiques.

Posons-nous à présent la question de savoir à qui et quand ces conseils doivent être prodigués par l'enseignant pour être le plus efficace possible.
En première approche, la réponse à cette interrogation est simple, dans la mesure où il est évidemment utile, pour tous les étudiants et à tout instant d'en prendre connaissance ou de s'en rappeler. Mais, approfondissons la situation avec un peu plus de finesse.

Selon notre expérience, nous pouvons, très (et même trop) schématiquement, répartir les étudiants entrant à l'Université dans trois grandes catégories.

A. La première classe se compose d'étudiants ayant effectué de bonnes humanités générales, en y ayant notamment suivi un programme fort en mathématiques ; ils sont curieux par nature et motivés à se perfectionner dans les différentes matières, spécialement en mathématiques ; ils ne craignent pas l'effort intellectuel et

[61] La compréhension mathématique fait l'objet d'un article intitulé « Quelques idées générales à propos de la compréhension en mathématiques », pat J. Bair, E-print diffusé sur Orbi, janvier 2017, adresse électronique : http//hdl.handle.net/2268/205282.

appartiennent souvent à un milieu social qui attache de l'importance à l'épanouissement personnel ; ils connaissent fort bien les règles du « jeu mathématique ». Un tel public, présenté ici de manière caricaturale, va évidemment profiter au maximum de tout conseil méthodologique qui lui serait donné, mais, en définitive, n'en n'a guère besoin dans la mesure où il est capable d'acquérir par lui-même une telle méthodologie. Un professeur peut certes conseiller de tels étudiants en lui fournissant des conseils d'ordre métacognitif ; mais, on peut tout de même se demander s'il ne serait pas plus efficace (bien que plus lent) de laisser de tels étudiants acquérir par eux-mêmes et progressivement une méthode de travail adéquate.

B. A l'opposé peuvent être répertoriés les étudiants ayant terminé laborieusement leurs humanités générales (ou techniques), ayant opté pour un programme plus faible en mathématiques suite à des difficultés rencontrées antérieurement ; ils ne sont pas spécialement motivés par un travail intellectuel intense. Tout conseil d'ordre méthodologique peut évidemment s'avérer très profitable pour de tels étudiants, mais il est à craindre que présenter ces conseils n'apporte pas forcément les résultats escomptés car, d'une part, les apprenants risquent de ne pas être réceptifs à un tel travail métacognitif et, d'autre part, le chantier à mettre en œuvre est vraisemblablement immense en raison des lacunes de base observées dans toutes les matières. Il convient donc de proposer les recommandations ci-dessus, en espérant qu'un « déclic » se produise chez l'étudiant de manière à lui faire changer ses habitudes.

C. Entre ces deux catégories extrêmes se trouvent tous les autres étudiants ; on peut espérer qu'ils sont les plus nombreux. Ils ont réussi des études secondaires honorables et sont désireux de réussir à l'Université. Mais ils ne connaissent pas bien les exigences universitaires en ce qui concerne la profondeur d'étude exigée et la quantité de matière qu'il va leur falloir assimiler. Pour ces étudiants, il nous semble impératif de leur fournir au plus tôt les « clés » qui leur permettront de réussir leur transition vers le Supérieur. Outre la matière proprement dite et des conseils sur les méthodes de travail en général, il convient de leur donner une base logique de départ, afin qu'ils comprennent parfaitement les « règles du jeu » auxquelles ils seront soumis, ainsi que des conseils métacognitifs sur la manière de « faire des mathématiques » à l'Université. Ceci peut être réalisé en (relativement) peu de temps, soit lors d'activités préparatoires organisées avant la rentrée académique, soit au tout début de cette année (en y consacrant les premiers cours). Nous pensons qu'un démarrage précoce des études universitaires dans la direction décrite ci-dessus et un suivi régulier au moyen de séances collectives [62] peuvent faciliter une bonne transition TSU.

Mais nous pouvons constater, à l'instar de N. Rouche, que « *la preuve est une composante de la pensée mathématique, composante, certes, mais non la seule puisque, pour constituer cette pensée, il faut aussi explorer et conjecturer* » [63]. En fait, tout raisonnement mathématique comprend deux étapes distinctes dans son élaboration complète. D'une part est obligatoire une phase d'**analyse** du problème : le travail demandé à l'apprenant est un peu semblable à celui d'un détective qui doit examiner en profondeur le problème posé et essayer de trouver des pistes [64], ce qui se fait par un raisonnement plausible ; souvent on suppose le problème résolu (cfr le travail déjà cité de Lombard). D'autre part est également nécessaire une étape de **synthèse** : une fois le problème bien assimilé, il s'agit de construire un raisonnement déductif confirmant, de façon indiscutable, la voie devinée dans l'analyse.
La présence conjointe de ces deux étapes est assurément une spécificité des mathématiques [65]: aucune autre discipline n'y recourt de façon aussi nette. L'obligation de leur maîtrise simultanée n'est généralement pas facile et il n'existe aucune « recette-miracle » pour les enseigner aisément à tous les étudiants. Toutefois, le professeur peut utilement respecter quelques conseils généraux tels que ceux-ci, les trois derniers étant inspirés par une étude de Lombard [66] :

- inviter les étudiants à s'exercer autant que possible, conformément à l'adage populaire bien connu « c'est en forgeant, que l'on devient forgeron » ; en effet, c'est en réalisant des démonstrations qu'un étudiant développera son réseau argumentatif et donc progressera dans son apprentissage des preuves ;
- préciser au maximum les « règles du jeu » mathématique ;

[62] Les séances collectives, organisées en demandant une participation active des apprenants, sont à privilégier par rapport aux entretiens individuels pour des raisons organisationnelles évidentes, mais aussi surtout parce qu'elles favorisent une activité socio-cognitive : les étudiants peuvent se situer par rapport à leurs pairs et se rendre compte que d'autres ont souvent des difficultés similaires aux leurs. Pour que ces séances soient efficaces, il importe que les étudiants revoient, de manière approfondie et critique, leurs notes de cours et préparent ainsi les séances remédiatrices, une préparation par écrit étant à privilégier dans la mesure où mettre sur papier ses difficultés est un travail métacognitif toujours profitable.
[63] Rouche N., « Apprendre à prouver », *Bull. Soc. Math. Belg.*, 42, 1990, sér. A, p. 117.
[64] Ou d'un médecin qui effectue un diagnostic, ou d'un garagiste qui recherche une panne, … On pourra se rappeler ici l'article intitulé « Diagnostic – raisonnements médicaux », par A. Albert et J. Bair, *ibidem*.
[65] Voir l'article « Analyse et synthèse dans les démonstrations, », par J. Bair, *Tangente, Hors Série 55* sur « Démontrer l'art de convaincre », 2015, pp. 38 - 40.
[66] Lombard, *pp. cit.*, p. 267.

- inscrire l’apprentissage dans une « progression spiralaire » [67] ;
- développer des apprentissages assez répétitifs pour que les étudiants acquièrent de bonnes habitudes et une bonne intuition.

Ainsi, l’apprentissage des mathématiques est souvent compliqué et demande beaucoup de temps, car il consiste souvent en un va-et-vient incessant entre les deux éléments, parfois antagonistes mais toujours complémentaires, de plusieurs « couples » [68], désignés parfois par des appellations particulières, par exemple sous le nom de « paradoxes » par Antibi [69] ou encore de « pulsations » par Guittard [70]; en voici un petit aperçu :

- raisonnement plausible et raisonnement démonstratif ; méthode inductive et méthode déductive
- analyse et synthèse
- esprit imaginatif et respect rigide de règles précises
- généraliser et savoir particulariser
- recours au concret et recherche de l’abstrait
- travail formaliste et travail sensualiste,
- vision procédurale (les mathématiques sont des outils) et vision conceptuelle (les mathématiques introduisent des concepts)
- étude de cas courants (voire triviaux) et de cas-limites
- …

L’omniprésence d’une telle dualité est inhérente à la nature même des mathématiques, ainsi que le précisent ces deux citations :

- « *Les mathématiques semblent jouer perpétuellement un ‘’double jeu’’, avec chacun ses règles. Celui qui se joue dans votre tête, avec ses montages logiques, ses rêves et ses inventions, et celui qui utilise les pièces du monde réel, avec sa complexité et ses contraintes parfois contradictoires.* » (Deledicq [71])
- « *Mathematics appears as a dialectic game between freedom and restrictions, invention and discovery ; between the liberty of initial choices and the confinement*

[67] A ce sujet, voir l’article intitulé « Les démonstrations : une vision génétique et spiralaire », par F. Buekenhout, *op. cit*.
[68] Cette bipolarité fait penser à celle entre le Yin et le Yang dans la philosophie taoïste de la Chine antique. Ce sont deux forces opposées qui se complètent dans une parfaite harmonie et qui permettent d’atteindre un état d’équilibre dans toute la nature, c’est-à-dire dans les règnes animal, végétal ou minéral.
[69] Voir le livre « *50 paradoxes dans l’enseignement* », par A. Antibi, Edition Math’Adore (n° d’éditeur : 10182471), 2011.
[70] Voir le livre « *La pulsation mathématique* », par R. Guittart, L’Harmattan, Paris, 1999.
[71] Deledicq A., « Que sont et à quoi servent les mathématiques », *Plot*, 104, 2033, pp. 2 – 7.

within the laws of a deliberately chosen system, between the free discovery of objects and the struggle of understanding their properties and significance. »[72] (Sierpinska[73]).

C'est assurément là que réside toute la richesse, mais également la difficulté, de l'apprentissage des mathématiques.

Annexe A : Différents types de syllogismes

Les raisonnements les plus élémentaires sont les syllogismes ; ils font intervenir deux énoncés, que nous noterons P et Q.
En admettant l'existence d'une relation entre P et Q et en émettant une supposition sur Q, nous pouvons en tirer une conclusion au sujet de P.
Plus précisément, nous considérons trois cas de relations possibles entre P et Q, à savoir « P implique Q », « Q implique P » et « P et Q sont incompatibles ». Par ailleurs, nous supposons que Q est soit « vraie », soit «plus plausible », soit « moins plausible », ou encore « fausse ». Au total, on peut croiser ces deux situations en un tableau dont les lignes se réfèrent aux trois relations potentielles entre P et Q, tandis que les quatre colonnes concernent les quatre « degrés de vérité » de Q, dans l'ordre indiqué ci-dessus ou dans l'ordre inverse ; on obtient de la sorte un tableau comprenant douze cas, répartis donc en trois lignes et quatre colonnes, et livrant une information au sujet de P.

Pour présenter de manière claire et condensée ces résultats, fixons quelques conventions d'écriture. Nous adoptons les suivantes, où X et Y désignent P ou Q selon les besoins :

On note	Pour
$X \Rightarrow Y$	X implique Y (ou Y est impliqué par X)
$X \mid Y$	X et Y sont incompatibles
X	X est vrai
$\neg X$	X est faux (ou $\neg X$ est faux)
X *pp*	X est plus plausible

[72] « Les mathématiques apparaissent comme un jeu dialectique entre la liberté et les restrictions, l'invention et la découverte; entre la liberté de choix initiaux et l'emprisonnement dans les lois d'un système délibérément choisi, entre la découverte gratuite d'objets et la lutte pour comprendre leurs propriétés et signification ».
[73] Sierpinska A., "*Understanding in Mathematics*", The Falmer Press, London, 1996.

X mp	*X* est moins plausible
X lpp	*X* est légèrement plus plausible
X lmp	*X* est légèrement moins plausible

On obtient alors le tableau que voici [74]

Raisonnement	Démonstratif	Démonstratif Atténué	Inductif atténué	Inductif
Examen de la conséquence Q	$P \Rightarrow Q$ $\neg Q$ – – – – – $\neg P$	$P \Rightarrow Q$ Q *mp* – – – – – – P *mp*	$P \Rightarrow Q$ Q *pp* – – – – – – P *lpp*	$P \Rightarrow Q$ Q – – – – – P *pp*
Examen de l'antécédent Q	$Q \Rightarrow P$ Q – – – – P	$Q \Rightarrow P$ Q *pp* – – – – – – P *pp*	$Q \Rightarrow P$ Q *mp* – – – – – – P *lmp*	$Q \Rightarrow P$ $\neg Q$ – – – – – – P *mp*
Examen d'énoncés incompatibles	$P \mid Q$ Q – – – – $\neg P$	$P \mid Q$ Q *pp* – – – – – – P *mp*	$P \mid Q$ Q *mp* – – – – – – P *lpp*	$P \mid Q$ $\neg Q$ – – – – – – P *pp*

En parcourant le tableau de gauche à droite, on constate que l'on va progressivement de « raisonnements démonstratifs » (dans la première colonne de gauche) vers des « raisonnements inductifs » (dans la colonne de droite) en passant successivement par des « raisonnements démonstratifs atténués » (dans la deuxième colonne à partir de la gauche) et par des « raisonnements inductifs atténués » (dans la deuxième colonne à partir de la droite) ; de plus, au sein d'une même ligne se trouve une « gradation » dans la plausibilité de *P* ; par ailleurs, seul le *modus ponens* classique garantit la vérité de l'énoncé *P*.

[74] Ce tableau est inspiré par l'ouvrage « *Les mathématiques et le raisonnement plausible* », par G. Polya, *op. cit.*, p. 169 ; l'auteur y explicite les différents cas possibles.

Annexe B : quelques éléments techniques de logique mathématique

a) Propositions fondamentales sur les énoncés

Dans le cadre d'une théorie mathématique donnée et quelles que soient les valeurs de vérité des énoncés *P*, *Q* , *R*, les énoncés suivants sont des propositions :

- $P \vee \neg P$: principe du tiers exclu
- $\neg(P \wedge \neg P)$: loi de non-contradiction
- $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$: loi de la double négation
- $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$, $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$: lois de De Morgan
- $P \wedge P \Leftrightarrow P$, $P \vee P \Leftrightarrow P$: idempotence
- $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P), (P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$: commutativité
- $\left[P \wedge (Q \wedge R)\right] \Leftrightarrow \left[(P \wedge Q) \wedge R\right], \left[P \vee (Q \vee R)\right] \Leftrightarrow \left[(P \vee Q) \vee R\right]$: associativité
- $\left[P \wedge (Q \vee R)\right] \Leftrightarrow \left[(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)\right], \left[P \vee \wedge (Q \wedge R)\right] \Leftrightarrow \left[(P \vee Q) \wedge (P \vee R)\right]$ règles de distributivité
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$: règle de contraposition
- $\left[P \wedge (P \Rightarrow Q)\right] \Rightarrow Q$: règle du *modus ponens* (ou principe du syllogisme)
- $\left[(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q\right] \Rightarrow \neg P$: règle du *modus tollens*
- $\left[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)\right] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$: transitivité de l'implication

c) Propositions fondamentales sur les prédicats

- $\neg\left[\forall x\ P(x)\right] \Leftrightarrow \exists x\ \neg P(x)$, $\neg\left[\exists x\ P(x)\right] \Leftrightarrow \forall x\ \neg P(x)$: règles de négation
- $\forall x\ \forall y\ P(x,y) \Leftrightarrow \forall y\ \forall x\ P(x,y)$, $\exists x\ \exists y\ P(x,y) \Leftrightarrow \exists y\ \exists x\ P(x,y)$
  $\exists x\ \forall y\ P(x,y) \Rightarrow \forall y\ \exists x\ P(x,y)$, $\forall x\ P(x) \Rightarrow P(x)$, $P(x) \Rightarrow \exists x\ P(x)$
  règles d'échange
- $\forall x\left[P(x) \wedge Q(x)\right] \Leftrightarrow \forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$, $\exists x\left[P(x) \vee Q(x)\right] \Leftrightarrow \exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$
  $\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x) \Rightarrow \forall x\left[P(x) \vee Q(x)\right]$, $\exists x\left[P(x) \wedge Q(x)\right] \Rightarrow \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$
  relations entre quantificateurs et connecteurs logiques.