Des triangles de Pascal généralisés aux coefficients binomiaux de mots finis

Travail en collaboration Julien Leroy et Michel Rigo

Manon Stipulanti Boursière FRIA

École des Jeunes Chercheurs en Informatique Mathématique
École Normale Supérieure de Lyon
23 Janvier 2017

Le triangle de Pascal classique

		k							
		0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	2	1	2	1	0	0	0	0	0
m	3	1	3	3	1	0	0	0	0
	4	1	4	6	4	1	0	0	0
	5	1	5	**10**	**10**	5	1	0	0
	6	1	6	15	**20**	15	6	1	0
	7	1	7	21	35	35	21	7	1

Coefficient binomial classique d'entiers :

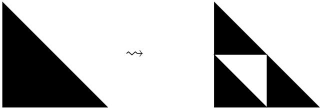
$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!\,k!}$$

Règle de Pascal :

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1}$$

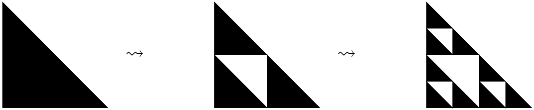
Le triangle de Sierpiński

Une façon de construire le triangle de Sierpiński :



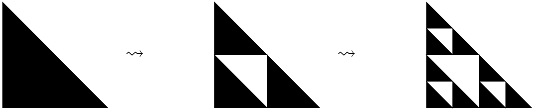
Le triangle de Sierpiński

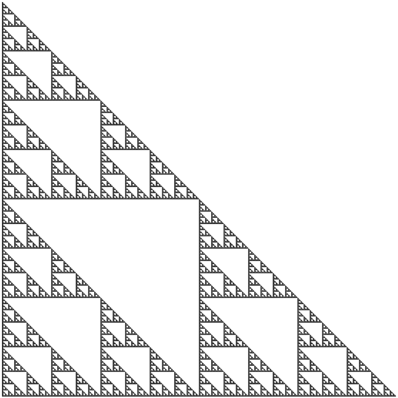
Une façon de construire le triangle de Sierpiński :



Le triangle de Sierpiński

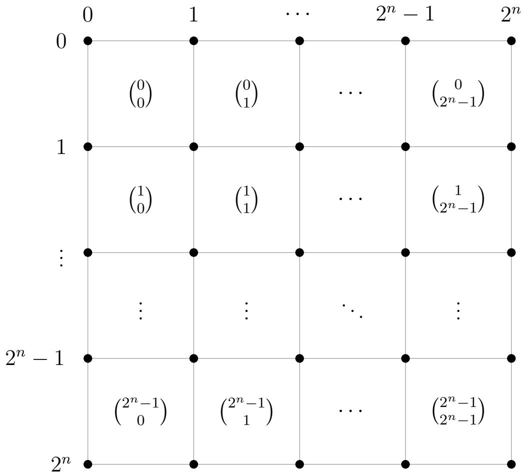
Une façon de construire le triangle de Sierpiński :





Lien entre ces deux objets

- Grille : intersection de $\mathbb{N}^2$ avec $[0, 2^n] \times [0, 2^n]$

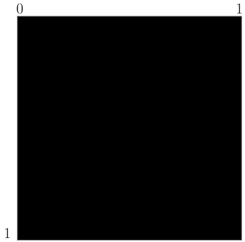


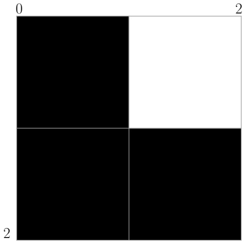
$\mathbb{N}^2 \cap [0, 2^n]^2$

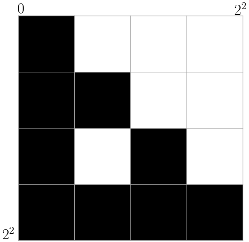
- Coloration de cette grille :
  Colorier les 2^n premières lignes et colonnes du triangle de Pascal
  $$\left(\binom{m}{k} \bmod 2\right)_{0\leq m,k<2^n}$$
  en
  - blanc si $\binom{m}{k} \equiv 0 \bmod 2$
  - noir si $\binom{m}{k} \equiv 1 \bmod 2$

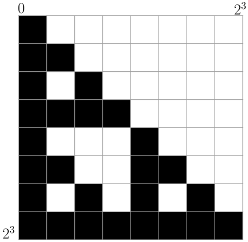
- Coloration de cette grille :
  Colorier les 2^n premières lignes et colonnes du triangle de Pascal
  $$\left(\binom{m}{k} \bmod 2\right)_{0\leq m,k<2^n}$$
  en
  - blanc si $\binom{m}{k} \equiv 0 \bmod 2$
  - noir si $\binom{m}{k} \equiv 1 \bmod 2$
- Renormalisation par une homothétie de rapport $1/2^n$
  $\rightsquigarrow$ suite de compacts de $[0,1]\times[0,1]$

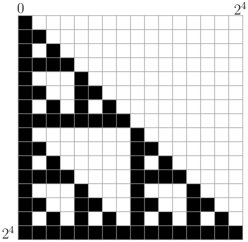
Les six premiers éléments de la suite

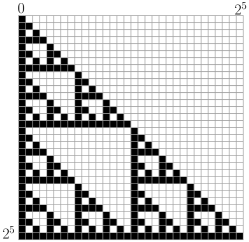




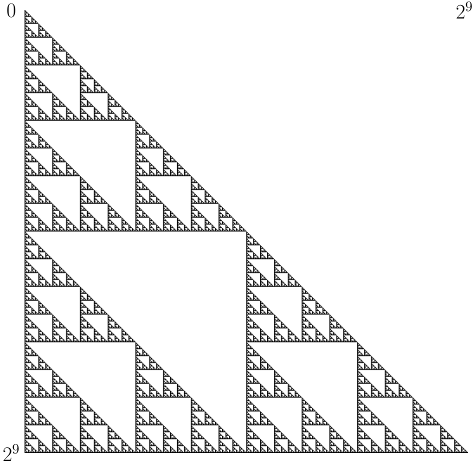




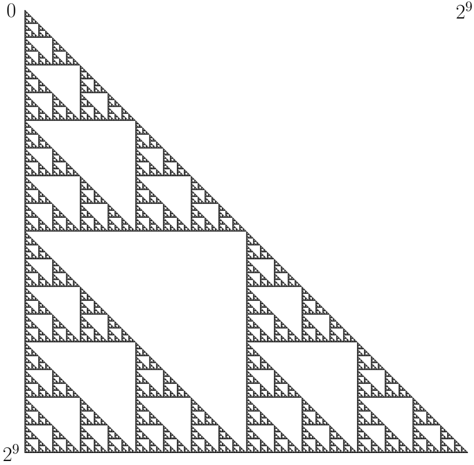




Le dixième élément de la suite



Le dixième élément de la suite



Fait

La suite de compacts converge vers le triangle de Sierpiński.

Une généralisation...

Idée : remplacer les entiers par des mots finis

Une généralisation...

Idée : remplacer les entiers par des mots finis

Définition : Un *mot fini* est une suite finie de lettres appartenant à un ensemble fini appelé *alphabet*.

Une généralisation...

Idée : remplacer les entiers par des mots finis

Définition : Un *mot fini* est une suite finie de lettres appartenant à un ensemble fini appelé *alphabet*.

Exemple : $u = 101001$ est un mot sur l'alphabet $\{0, 1\}$

Représentation gloutonne en base 2 :

n	$\mathrm{rep}_2(n)$	
0	ε	
1	1	$1 \cdot 2^0 = 1$
2	10	$1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2$
3	11	$1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3$
4	100	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4$
5	101	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5$
6	110	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 6$
7	111	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 7$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Coefficients binomiaux de mots finis

Définition

Soient u, v deux mots finis.
Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de u et v est le nombre de fois que le mot v apparaît comme sous-suite du mot u (i.e., comme un facteur "éclaté").

Définition

Soient u, v deux mots finis.
Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de u et v est le nombre de fois que le mot v apparaît comme sous-suite du mot u (i.e., comme un facteur "éclaté").

<u>Exemple</u> : $u = 101001$ $\qquad v = 101$

Définition

Soient u, v deux mots finis.
Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de u et v est le nombre de fois que le mot v apparaît comme sous-suite du mot u (i.e., comme un facteur "éclaté").

Exemple : $u = \mathbf{101}001$ $\quad v = 101 \quad$ 1 occurrence

Définition

Soient u, v deux mots finis.
Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de u et v est le nombre de fois que le mot v apparaît comme sous-suite du mot u (i.e., comme un facteur "éclaté").

Exemple : $u = \mathbf{10}1001$ $v = 101$ 2 occurrences

Définition

Soient u, v deux mots finis.
Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de u et v est le nombre de fois que le mot v apparaît comme sous-suite du mot u (i.e., comme un facteur "éclaté").

Exemple : $u = \mathbf{101001}$ $\quad v = 101 \quad$ 3 occurrences

Définition

Soient u, v deux mots finis.
Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de u et v est le nombre de fois que le mot v apparaît comme sous-suite du mot u (i.e., comme un facteur “éclaté”).

Exemple : $u = \mathbf{101001}$ $\quad v = 101 \quad$ 4 occurrences

Définition

Soient u, v deux mots finis.
Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de u et v est le nombre de fois que le mot v apparaît comme sous-suite du mot u (i.e., comme un facteur "éclaté").

Exemple : $u = 10\mathbf{1001}$ $v = 101$ 5 occurrences

Coefficients binomiaux de mots finis

Définition

Soient u, v deux mots finis.
Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de u et v est le nombre de fois que le mot v apparaît comme sous-suite du mot u (i.e., comme un facteur "éclaté").

Exemple : $u = 10\mathbf{1001}$ $\quad v = 101 \quad$ 6 occurrences

Définition

Soient u, v deux mots finis.
Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de u et v est le nombre de fois que le mot v apparaît comme sous-suite du mot u (i.e., comme un facteur “éclaté”).

Exemple : $u = 101001$ $\qquad v = 101$

$$\Rightarrow \binom{101001}{101} = 6$$

Remarque :
Généralisation naturelle de coefficients binomiaux d'entiers

Avec un alphabet d'une seule lettre $\{a\}$

$$\binom{a^m}{a^k} = \binom{\overbrace{a\cdots a}^{m \text{ fois}}}{\underbrace{a\cdots a}_{k \text{ fois}}} = \binom{m}{k} \quad \forall\, m,k \in \mathbb{N}$$

Le triangle de Pascal généralisé pour les représentations en base 2

					v				
		ε	1	10	11	100	101	110	111
	ε	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	10	1	1	1	0	0	0	0	0
u	11	1	**2**	**0**	1	0	0	0	0
	100	1	1	2	0	1	0	0	0
	101	1	2	1	1	0	1	0	0
	110	1	2	**2**	1	0	0	1	0
	111	1	3	0	3	0	0	0	1

Coefficient binomial de mots finis :

$$\binom{u}{v}$$

Règle :

$$\binom{ua}{vb} = \binom{u}{vb} + \delta_{a,b}\binom{u}{v}$$

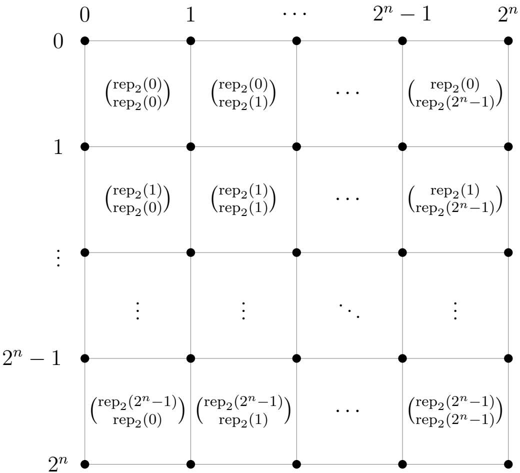
Le triangle de Pascal généralisé pour les représentations en base 2

		v							
		ε	**1**	10	**11**	100	101	110	**111**
	ε	**1**	0	0	0	0	0	0	0
	1	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0
	10	1	1	1	0	0	0	0	0
u	**11**	**1**	**2**	0	**1**	0	0	0	0
	100	1	1	2	0	1	0	0	0
	101	1	2	1	1	0	1	0	0
	110	1	2	2	1	0	0	1	0
	111	**1**	**3**	0	**3**	0	0	0	**1**

Le triangle de Pascal classique

Question : Après coloration et renormalisation, peut-on s'attendre à une convergence vers un analogue du triangle de Sierpiński ?

- Grille : intersection de $\mathbb{N}^2$ avec $[0, 2^n] \times [0, 2^n]$



$\mathbb{N}^2 \cap [0, 2^n]^2$

- Coloration de cette grille :
  Colorier les 2^n premières lignes et colonnes du triangle de Pascal généralisé

$$\left(\binom{\mathrm{rep}_2(m)}{\mathrm{rep}_2(k)} \bmod 2\right)_{0\leq m,k<2^n}$$

  en

  - blanc si $\binom{\mathrm{rep}_2(m)}{\mathrm{rep}_2(k)} \equiv 0 \bmod 2$
  - noir si $\binom{\mathrm{rep}_2(m)}{\mathrm{rep}_2(k)} \equiv 1 \bmod 2$

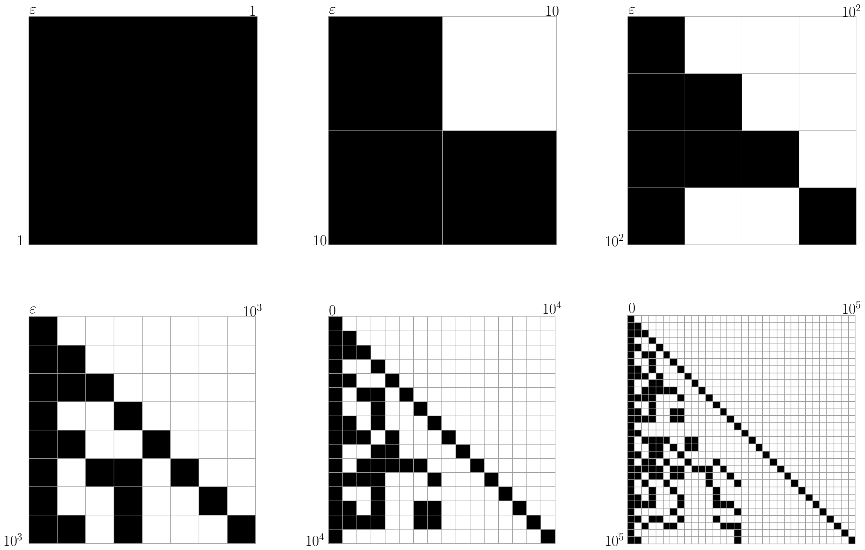
- Coloration de cette grille :
  Colorier les 2^n premières lignes et colonnes du triangle de Pascal généralisé

$$\left(\binom{\mathrm{rep}_2(m)}{\mathrm{rep}_2(k)} \bmod 2\right)_{0\le m,k<2^n}$$

  en

  - blanc si $\binom{\mathrm{rep}_2(m)}{\mathrm{rep}_2(k)} \equiv 0 \bmod 2$
  - noir si $\binom{\mathrm{rep}_2(m)}{\mathrm{rep}_2(k)} \equiv 1 \bmod 2$
- Renormalisation par une homothétie de rapport $1/2^n$
  $\rightsquigarrow$ suite de compacts de $[0,1] \times [0,1]$

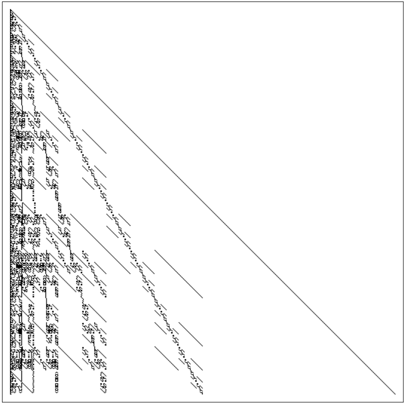
Les six premiers éléments de la suite

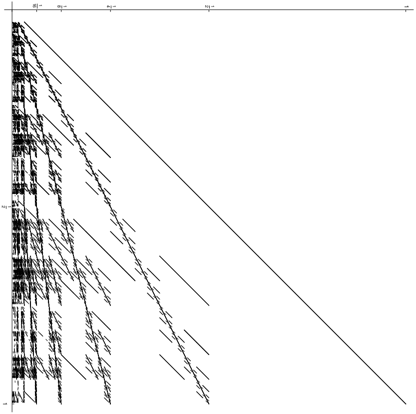


Résultat principal

Théorème [Leroy, Rigo, S., 2016]

La suite converge vers un object limite $\mathcal{L}$.





Fermeture topologique d'une union de segments décrits au moyen d'une propriété combinatoire simple

Simplicité : coloriage en fonction de la parité des coefficients binomiaux

Extension

Toujours vrai pour les coefficients binomiaux $\equiv r \bmod p$ avec

- représentations en base 2 des entiers
- p un nombre premier
- $r \in \{1, \ldots, p-1\}$

Exemple avec $p = 3$, $r = 2$

Gauche : carré noir $\Leftrightarrow$ coefficient binomial $\equiv 2 \bmod 3$
Droite : approximation de l'objet limite