Sur le théorème de Vaschy-Buckingham

J.F. Debongnie

3 juin 2016

1 Introduction

Si la nécessité de l'homogénéité des formules physiques était connue d'Euler et de Fourier [7], son utilisation en tant qu'outil n'a été développée que dans le troisième quart du XIX^e siècle, dans les travaux presque simultanés de Lord Rayleigh (première édition de son ouvrage *The Theory of Sound*, 1877-1878 [9], puis [8]) et de Bertrand en 1878 [1]. C'est semble-t-il Vaschy [12] qui, en 1892, a pour la première fois affirmé que toute relation entre grandeurs physiques peut être ramenée à une relation entre grandeurs sans dimension. La démonstration qu'il a donnée reste d'ailleurs un grand classique, même si elle peut susciter quelques réticences philosophiques. Mais c'est bien plus tard, en 1914, que Buckingham [3] a publié l'article qui a vraiment lancé l'analyse dimensionnelle, même si ses justifications étaient très critiquables. C'est lui, du reste, qui a popularisé la notation Π pour les grandeurs sans dimension.

Depuis lors, l'analyse dimensionnelle s'est révélée comme un outil puissant à la fois pour dégrossir l'analyse de problèmes physiques et pour limiter le nombre d'expériences à faire pour connaître un comportement physique. À ce propos, on ne peut que regretter que les numériciens, qui ne sont en somme que des expérimentateurs virtuels, semblent parfois ignorer les ressources de l'analyse dimensionnelle.

Dans la plupart des exposés actuels, le théorème de base, appelé théorème de Vaschy-Buckingham ou théorème des Π, est admis sans démonstration. Souvent même, il est exposé de manière incorrecte, c'est-à-dire sans tenir compte des cas de dégénérescence dans lesquels le nombre de grandeurs sans dimension est supérieur au nombre de variables diminué du nombre d'unités fondamentales.

Le présent travail se propose d'abord de bien préciser les notions de grandeur physique, de mesure et d'unité, qui sont la base de toute analyse de dimensions. Ensuite, on définit les grandeurs sans dimension, on montre comment les construire et on les dénombre. Le théorèmes des Π est alors exprimé comme la propriété de relations entre mesures de ne pas dépendre du système d'unités fondamentales. Un certain nombre de démonstrations de ce théorème sont exposées et critiquées. Parmi celles-ci, on trouvera une démonstration originale qui, si elle n'est pas la plus élégante, a du moins le mérite d'illustrer les relations nécessaires entre les dérivées d'une fonction de mesures insensible aux changements d'unités fondamentales.

2 Mesure d'une grandeur physique

Mesurer une grandeur physique x, c'est la comparer à une grandeur de même espèce $[x]$ choisie comme *unité*. Le résultat, appelé *mesure*, est le *nombre* $\hat{x}$ défini par

$$x = \hat{x}[x] \tag{1}$$

Soit par exemple un mobile ayant une vitesse de $v = 25\,\mathrm{m/s}$. L'unité est $[v] = \mathrm{m/s}$ et la mesure de la vitesse est

$$\hat{v} = \frac{v}{[v]} = \frac{v}{\mathrm{m/s}} = 25$$

3 Interdépendance des unités

Il existe le plus souvent des relations entre des grandeurs de types différents. Ainsi, si l'on donne aux longueurs le symbole L et au temps, le symbole T,

— une aire est du type L^2 ;

— une vitesse est du type L/T.

Ces relations se répercutent sur les unités. En général, il existe un certain nombre d'*unités fondamentales* $[u_1], \dots, [u_m]$ à partir desquelles les unités $[x_1], \dots, [x_n]$ des grandeurs physiques considérées $x_1, \dots, x_n$ $(n \geq m)$ peuvent être mises sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} [x_1] = k_1[u_1]^{p_{11}}[u_2]^{p_{21}} \dots [u_m]^{p_{m1}} \\ \dots \\ [x_n] = k_n[u_1]^{p_{1n}}[u_2]^{p_{2n}} \dots [u_m]^{p_{mn}} \end{array}\right. \tag{2}$$

où les k_i sont des coefficients correcteurs. On dit que les unités $[x_1], \dots, [x_n]$ sont *dérivées* des unités fondamentales $[u_1], \dots, [u_m]$. Lorsque dans les relations (2), les coefficients correcteurs sont *tous égaux à l'unité*, on dit que le système d'unités est *cohérent* [4]. Ainsi, si les unités de longueur et de temps sont le mètre et la seconde, on mesurera la vitesse en m/s dans un système cohérent. En revanche, si l'on choisit comme unité de vitesse le $\mathrm{km/h} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = \frac{1}{3{,}6}\,\mathrm{m/s}$, le système d'unités *n'est pas* cohérent.

Dans tout ce qui suit, nous envisagerons exclusivement *des systèmes d'unités cohérents.*

4 Grandeurs sans dimension

4.1 Définition

Étant donné n grandeurs physiques $x_1, \dots, x_n$ dont les unités $[x_1], \dots, [x_n]$ dérivent de m unités fondamentales $[u_1], \dots, [u_m]$, on appelle *grandeur sans dimension* ou encore, *nombre sans dimension*, tout produit de la forme

$$\Pi = x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n} \tag{3}$$

dont la dimension est l'unité, ce qui revient à dire que

$$[x_1]^{q_1} \dots [x_n]^{q_n} = 1 \tag{4}$$

Avant toute chose, observons que

$$\Pi = \hat{x}_1^{q_1} \dots \hat{x}_n^{q_n} \cdot ([x_1]^{q_1} \dots [x_n]^{q_n}) = \hat{x}_1^{q_1} \dots \hat{x}_n^{q_n} \tag{5}$$

c'est-à-dire qu'*une grandeur sans dimension peut indifféremment être considérée comme un produit de grandeurs physiques ou comme le même produit de leurs mesures.*

4.2 Construction de grandeurs sans dimension

Tenant compte des relations (2), la condition (4) se ramène à autant d'équations linéaires qu'il y a d'unités fondamentales, soit explicitement, au système

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & & & \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = 0 \tag{6}$$

que l'on peut encore écrire

$$\mathbf{Pq} = \mathbf{0} \tag{7}$$

Soit $r \leq m$ le rang de la matrice $\mathbf{P}$. Quitte à permuter l'ordre des grandeurs physiques $x_1, \dots, x_n$ et celui des unités fondamentales $[u_1], \dots, [u_m]$, on peut ramener le système (7) à la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P_{AA}} & \mathbf{P_{AB}} \\ \mathbf{P_{BA}} & \mathbf{P_{BB}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q_A} \\ \mathbf{q_B} \end{bmatrix} = 0 \tag{8}$$

où $\mathbf{P_{AA}}$ est la plus grande matrice carrée régulière que l'on puisse extraire de $\mathbf{P}$ [1]. Sa dimension est $r \times r$, r étant le *rang* de la matrice $\mathbf{P}$. Par conséquent, $\mathbf{P_{AB}}$ est de dimension $r \times (n - r)$, $\mathbf{P_{BA}}$, de dimension $(m - r) \times r$ et $\mathbf{P_{BB}}$, de dimension $(n - r) \times (m - r)$.

Les $(m - r)$ dernières lignes de $\mathbf{P}$ sont des combinaisons linéaires des r premières, ce qui peut s'écrire

$$\mathbf{P_{BA}} = \mathbf{LP_{AA}}, \quad \mathbf{P_{BB}} = \mathbf{LP_{AB}} \tag{9}$$

où $\mathbf{L}$ est une matrice de dimension $(m - r) \times r$.

On tire de la première *grosse ligne* du système (8)

$$\mathbf{q_A} = -\mathbf{P_{AA}^{-1} P_{AB} q_B} \tag{10}$$

ce qui résout le système, car avec cette solution, on a en vertu de (9)

$$\mathbf{P_{BA} q_A} + \mathbf{P_{BB} q_B} = -\mathbf{LP_{AA} P_{AA}^{-1} P_{AB} q_B} + \mathbf{LP_{AB} q_B} = \mathbf{0}$$

En conclusion, les solutions du système (8) dépendent des $(n - r)$ composantes indépendantes du vecteur $\mathbf{q_B}$, ce qui signifie que *le nombre* $\mathcal{N}(\Pi)$ *de grandeurs sans dimension indépendantes est égal au nombre* n *de grandeurs physiques diminué du rang* r *de la matrice* $\mathbf{P}$ [2] :

$$\mathcal{N}(\Pi) = n - r \tag{11}$$

1. Dans tout ce qui suit, nous supposerons implicitement que cette mise en ordre des colonnes et des lignes a déjà été faite.

2. Dans le plus grand nombre de problèmes pratiques, la matrice $\mathbf{P}$ est de rang maximal, ce qui donne $\mathcal{N}(\Pi) = n - m$. Mais contrairement à ce que semblent penser certains, *ce n'est pas une règle générale* et des cas de dégénérescence $(r < m)$ sont connus [5].

4.3 Forme générale des jeux d'exposants donnant des grandeurs sans dimension

Si l'on écrit, au-dessous de la relation(10) la relation évidente

$$\mathbf{q_B} = \mathbf{I}\mathbf{q_B}$$

où $\mathbf{I}$ représente la matrice unité de dimension $n-r$, on obtient

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q_A} \\ \mathbf{q_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{P_{AA}^{-1}}\mathbf{P_{AB}} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{q_B} = \mathbf{Q}\mathbf{q_B} \tag{12}$$

Le contenu de chaque colonne de la matrice

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\mathbf{P_{AA}^{-1}}\mathbf{P_{AB}} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{13}$$

est donc un jeu d'exposants donnant un nombre sans dimension indépendant. Nous adopterons la convention suivante : *le nombre sans dimension dont les exposants sont la k^e colonne de la matrice $\mathbf{Q}$ sera noté Π_k.* Les $(n-r)$ nombres sans dimension ont donc pour expression

$$\Pi_k = x_1^{Q_{1k}} \cdots x_n^{Q_{nk}} \tag{14}$$

ou, plus explicitement,

$$\Pi_k = x_1^{Q_{1k}} \cdots x_r^{Q_{rk}} \cdot x_{r+k} \tag{15}$$

5 Changement de grandeur des unités fondamentales

5.1 Principe

Supposons que l'on remplace les unités fondamentales $[u_j], j = 1, \ldots, m$ par des multiples $[u_j]^* = \lambda_j[u_j]$. La cohérence du nouveau système d'unités veut que les nouvelles unités dérivées $[x_i]^*$ soient données par $[x_i]^* = \gamma_i[x_i]$ avec, en vertu de (2)

$$\gamma_i = \lambda_1^{p_{1i}} \ldots \lambda_m^{p_{mi}} \quad i = 1, \ldots, n \tag{16}$$

soit, en passant aux logarithmes,

$$\ln \gamma_i = p_{1i} \ln \lambda_1 + \ldots + p_{mi} \ln \lambda_m \quad i = 1, \ldots, n \tag{17}$$

ce qui s'exprime encore sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \ln \gamma_1 \\ \vdots \\ \ln \gamma_n \end{bmatrix} = \mathbf{P^T} \begin{bmatrix} \ln \lambda_1 \\ \vdots \\ \ln \lambda_m \end{bmatrix} \tag{18}$$

Il est du reste clair que *les grandeurs physiques ne peuvent être modifiées par un changement du choix des unités de base.* Par conséquent, ces grandeurs auront une nouvelle mesure $\hat{x}_i^*$ donnée par la condition

$$x_i = \hat{x}_i[x_i] = \hat{x}_i^*[x_i]^* = \hat{x}_i^* \gamma_i [x_i]$$

ce qui impose

$$\hat{x}_i^* = \frac{\hat{x}_i}{\gamma_i} \tag{19}$$

5.2 Un lemme utile

Nous ferons plus loin usage du lemme suivant :

Lemme *Étant donné un système de grandeurs physiques $x_1, \ldots, x_n$ dépendant de m unités fondamentales, avec une matrice* $\mathbf{P}$ *de rang r, on peut choisir la grandeur des unités fondamentales de manière à rendre les r premières mesures $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_r$ égales à l'unité.*

Soit en effet un système d'unités fondamentales $[u_1], \ldots, [u_m]$ conduisant aux unités dérivées $[x_1], \ldots, [x_n]$. Dans ce système, les grandeurs $x_1, \ldots, x_n$ ont pour mesures $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$. Pour d'autres unités fondamentales $[u_j]^* = \lambda_j [u_j]$, les unités dérivées seront $[x_i]^* = \gamma_i [x_i]$ et les mesures, $\hat{x}_i^* = \frac{1}{\gamma_i}\hat{x}_i$. En d'autres termes, il nous faut obtenir $\gamma_i = \hat{x}_i$ pour $i = 1, \ldots, r$, ce qui, en vertu de (18), revient à résoudre :

a) Si $r = m$,

$$\begin{bmatrix} \ln \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \ln \hat{x}_r \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{AA}} \begin{bmatrix} \ln \lambda_1 \\ \vdots \\ \ln \lambda_r \end{bmatrix} \tag{20}$$

ce qui est toujours possible car P_{AA} est une matrice régulière.

b) Si $r < m$,

$$\begin{bmatrix} \ln \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \ln \hat{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{AA}} & \mathbf{P}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{BA}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln \lambda_1 \\ \vdots \\ \ln \lambda_r \\ \ln \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \ln \lambda_m \end{bmatrix} \tag{21}$$

Ici encore, c'est toujours possible,car en posant $\lambda_{r+1} = 1, \ldots, \lambda_m = 1$, on se ramène au système précédent.

6 Théorème de Vaschy-Buckingham

6.1 Introduction

Soit par exemple la relation qui donne la période τ des petites oscillations d'un pendule simple de longueur ℓ, à savoir

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{22}$$

En pratique, il n'est possible de faire des calculs qu'avec des mesures [3]. C'est donc tout naturellement et dans une certaine mesure, inconsciemment, que l'on remplace en fait la formule (22) par

$$\hat{\tau} = 2\pi\sqrt{\frac{\hat{\ell}}{\hat{g}}} \tag{23}$$

3. Une machine à calculer n'a pas de touche *mètre* ou *kilogramme* ou *seconde* !

Il se trouve que c'est légitime *dans un système d'unités cohérent*, car si L et T sont respectivement les unités de longueur et de temps, on a alors

$$[\tau] = \mathsf{T}, \quad [\ell] = \mathsf{L}, \quad [g] = \mathsf{L}/\mathsf{T}^2, \text{ sans coefficient correcteur}$$

donc

$$[\tau] = \sqrt{\frac{[\ell]}{[g]}} \tag{24}$$

si bien que les relations (22) et (23) sont équivalentes.

Mais à bien y regarder, on s'aperçoit que ce procédé ne fonctionne que parce que les deux membres de la relation (22) ont *la même unité*. C'est une nécessité physique : *on ne compare pas des grandeurs de nature différente.*

Plus généralement, on rencontre des relations entre des grandeurs physiques $x_1, \ldots, x_n$ de la forme

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha \tag{25}$$

où α est un nombre [4]. Dans les calculs, on écrira en fait

$$f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) = \alpha \tag{26}$$

ce qui ne sera légitime que si *la valeur de la fonction f ne dépend pas du choix des unités fondamentales*, c'est-à-dire que si l'on remplace les unités fondamentales $[u_j]$ par $[u_j]^* = \lambda_j [u_j]$, ce qui donne aux mesures $\hat{x}_i$ les nouvelles valeurs $\hat{x}_i^* = \hat{x}_i/\gamma_i$, avec les valeurs de γ_i définies en (16), on a

$$f(\hat{x}_1^*, \ldots, \hat{x}_n^*) \equiv f(\frac{\hat{x}_1}{\gamma_1}, \ldots, \frac{\hat{x}_n}{\gamma_n}) = f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) \tag{27}$$

Il va de soi que cette propriété n'a lieu que moyennant certaines conditions sur la structure de la fonction f. Ce sont ces conditions qui font l'objet du théorème de Vaschy-Buckingham.

6.2 Énoncé du théorème

Théorème (Vaschy-Buckingham) *Soit une fonction de mesures $f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ dépendant de $m \leq n$ unités fondamentales. On suppose que la matrice $\mathbf{P}$ définie en section 4 est de rang r. La condition nécessaire et suffisante pour que cette fonction ait une valeur indépendante du système d'unités fondamentales est qu'elle puisse s'exprimer sous forme d'une fonction des $(n - r)$ variables sans dimension $\Pi_1, \ldots \Pi_{n-r}$ définies en section 4, soit*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = F(\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-r}) \tag{28}$$

Cette condition est évidemment suffisante. Il faut donc démontrer sa nécessité. Nous allons examiner un certain nombre de démonstrations proposées.

4. Par exemple, pour le pendule, on a $\tau\sqrt{g/\ell} = 2\pi$.

7 Approches de Lord Rayleigh et Buckingham

7.1 Exposé

Lord Rayleigh [9], dès 1878, et plus tard, Buckingham [5] en 1914 [3], tiennent un raisonnement que l'on peut synthétiser comme suit :

Dans toute description d'un phénomène physique $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ de la forme

$$\sum M x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} = 0 \tag{29}$$

chacun des termes de la somme doit avoir la même dimension. En divisant l'équation par un de ses termes, on obtient une expression du type

$$\sum N x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} + 1 = 0 \tag{30}$$

où tous les termes doivent être de dimension 1. On pourra écrire plus brièvement

$$\sum N\Pi + 1 = 0 \tag{31}$$

Chacun des nombres sans dimension Π est nécessairement une combinaison des $\mathcal{N}$ nombres sans dimension indépendants $\Pi_1, \ldots, \Pi_{\mathcal{N}}$, ce qui ramène la relation (31) à la forme

$$\sum N\Pi_1^{c_1} \cdots \Pi_{\mathcal{N}}^{c_{\mathcal{N}}} + 1 = 0 \tag{32}$$

Dans ce raisonnement, dit Buckingham, il n'y a pas de restriction sur le nombre de termes [6]. En conséquence, dans le cas le plus général, la relation de base $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ se ramène à une expression de la forme

$$\psi(\Pi_1, \ldots, \Pi_{\mathcal{N}}) = 0 \tag{33}$$

7.2 Critique

Le raisonnement précédent est parfaitement correct dans le cas de fonctions f polynomiales. En revanche, la généralisation à des fonctions f quelconques est tout sauf rigoureuse. Du reste, Buckingham s'intéresse surtout à trouver le nombre de grandeurs sans dimension, qu'il trouve égal à $(n - m)$ dans nos notations, ce qui revient à ignorer les cas de dégénérescence où $r < m$.

8 Démonstration de Vaschy

8.1 Exposé

La démonstration originelle de Vaschy [12], qui date de 1892, supposait en fait que les m premières variables physiques avaient pour unité une des unités fondamentales. la démonstration que nous présentons ici élimine cette hypothèse inutile et tient également compte des cas de dégénérescence $(r < m)$, mais elle s'en tient exactement aux idées de Vaschy.

5. C'est à Buckingham qu'est attribuée la notation Π pour les nombres sans dimension, notation qui a fait telle école que l'on appelle souvent le théorème dont nous nous occupons « *théorème des* Π. »

6. Et on peut donc, dans un raisonnement quelque peu audacieux, imaginer des séries, ce qui recouvre en tout cas les fonctions analytiques (note de l'auteur).

Soit donc la fonction $f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ dont la valeur ne peut dépendre du choix des unités fondamentales. On notera que l'on peut écrire

$$\hat{x}_{r+1} = \frac{\Pi_1}{\hat{x}_1^{Q_{1\,1}} \cdots \hat{x}_r^{Q_{r\,1}}}, \ldots, \hat{x}_n = \frac{\Pi_{n-r}}{\hat{x}_1^{Q_{1\,(n-r)}} \cdots \hat{x}_r^{Q_{r\,(n-r)}}} \tag{34}$$

donc

$$f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) = f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_r, \frac{\Pi_1}{\hat{x}_1^{Q_{1\,1}} \cdots \hat{x}_r^{Q_{r\,1}}}, \ldots, \frac{\Pi_{n-r}}{\hat{x}_1^{Q_{1\,(n-r)}} \cdots \hat{x}_r^{Q_{r\,(n-r)}}}) \tag{35}$$

Or, en vertu du lemme de la section 5.2, il est possible de choisir les unités fondamentales de telle façon que $\hat{x}_1 = 1, \ldots, \hat{x}_r = 1$. Ce faisant, on obtient

$$f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) = f(1, \ldots, 1, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-r}) = F(\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-r}) \tag{36}$$

8.2 Critique

Cette démonstration est à la fois simple et séduisante. On la retrouve d'ailleurs pratiquement telle quelle dans le bel ouvrage de Sedov sur la similitude [11] et dans le cours d'hydraulique de Schlag [10].

Cependant, si l'on imagine une fonction f dépendant, outre des grandeurs physiques $x_1, \ldots, x_n$, d'une grandeur sans dimension θ variable dans le temps, comme l'angle de rotation de l'axe d'une machine, et si les grandeurs physiques $x_1, \ldots, x_r$ dépendent de θ, la démonstration de Vaschy suppose que l'on change la grandeur des unités fondamentales à chaque instant, ce qui est un peu choquant sur le plan philosophique.

9 Une démonstration originale

9.1 Exposé

Supposons la fonction f continument dérivable. Exprimons que la fonction f ne change pas quand on *divise* l'unité $[u_1]$ par λ. Introduisons la notation

$$f_1(\lambda, \hat{\mathbf{x}}) = f(\lambda^{p_{11}} \hat{x}_1, \ldots, \lambda^{p_{1n}} \hat{x}_n) \tag{37}$$

On veut donc que

$$f_1(\lambda, \hat{\mathbf{x}}) = f_1(1, \hat{\mathbf{x}}) \equiv f(\hat{\mathbf{x}}) \tag{38}$$

Dérivons cette relation par rapport à λ, on obtient

$$\sum_{i\,:\,p_{1i} \neq 0} p_{1i} \lambda^{p_{1i}-1} \hat{x}_i D_i f_1(\lambda, \hat{\mathbf{x}}) = 0 \tag{39}$$

et en particulier, pour $\lambda = 1$,

$$\sum_i p_{1i} \hat{x}_i D_i f_1(\lambda, \hat{\mathbf{x}}) = \sum_i p_{1i} \hat{x}_i D_i f = 0 \tag{40}$$

Le même raisonnement peut être tenu pour chacune des m unités fondamentales, ce qui conduit au système de la forme (7)

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 D_1 f \\ \vdots \\ \hat{x}_n D_n f \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{41}$$

On a vu en section 4 que la solution générale de ce système est

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 D_1 f \\ \vdots \\ \hat{x}_n D_n f \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \hat{x}_{r+1} D_{r+1} f \\ \vdots \\ \hat{x}_n D_n f \end{bmatrix} \tag{42}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} df &= \hat{x}_1 D_1 f \frac{d\hat{x}_1}{\hat{x}_1} + \ldots + \hat{x}_n D_n f \frac{d\hat{x}_n}{\hat{x}_n} \\ &= [\hat{x}_{r+1} D_{r+1} f \ldots \hat{x}_n D_n f] \mathbf{Q^T} \begin{bmatrix} \frac{d\hat{x}_1}{\hat{x}_1} \\ \vdots \\ \frac{d\hat{x}_n}{\hat{x}_n} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{43}$$

Mais il est facile de voir que

$$\mathbf{Q^T} \begin{bmatrix} \frac{d\hat{x}_1}{\hat{x}_1} \\ \vdots \\ \frac{d\hat{x}_n}{\hat{x}_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\Pi_1}{\Pi_1} \\ \vdots \\ \frac{d\Pi_{n-r}}{\Pi_{n-r}} \end{bmatrix} \tag{44}$$

Ainsi, on obtient

$$df = \hat{x}_{r+1} D_{r+1} f d(\ln \Pi_1) + \ldots + \hat{x}_n D_n f d(\ln \Pi_{n-r}) \tag{45}$$

ce qui montre que f ne dépend que des grandeurs sans dimension.

9.2 Critique

Cette démonstration suppose la fonction f continument dérivable, ce qui constitue une restriction. D'un autre côté, elle est constructive et elle illustre bien la relation qui doit exister entre les dérivées partielles de la fonction f.

10 Démonstration de Boyling

10.1 Exposé

À partir des variables $\xi_i = \ln \hat{x}_i$, Boyling [2], remarque que si l'on remplace $[u_j]$ par $[u_j]^* = \frac{[u_j]}{\lambda_j}$, on a

$$\hat{x}_i^* = \prod_j \lambda_j^{p_{j\,i}} \hat{x}_i \tag{46}$$

ce qui équivaut à

$$\xi_i^* = \xi_i + \sum_j p_{j\,i} \ln \lambda_j \tag{47}$$

Si l'on se place dans l'espace $\mathbb{R}^n$ des points $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, la relation(47) exprime que la fonction $\phi(\boldsymbol{\xi}) = f(e^{\xi_1}, \ldots, e^{\xi_n})$ ne peut varier si l'on ajoute à un point $\boldsymbol{\xi}$ un élément du sous-espace E sous-tendu par les vecteurs-lignes de la matrice $\mathbf{P}$. Donc, cette fonction ne dépend que du complément orthogonal $E_\perp$ de E, qui est défini par la condition

$$\mathbf{P}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \tag{48}$$

Or, nous avons vu en section 4 qu'une base de $E_\perp$ est donnée par les colonnes de la matrice $\mathbf{Q}$. Il est alors clair que tout élément $\boldsymbol{\xi} \in E_\perp$ est entièrement défini par ses projections sur cette base, c'est-à-dire par ses produits scalaires avec les colonne de la matrice $\mathbf{Q}$, où l'on reconnait $\frac{d\Pi_1}{\Pi_1}, \ldots, \frac{d\Pi_{n-r}}{\Pi_{n-r}}$.

10.2 Critique

C'est sans doute la démonstration la plus élégante que l'on puisse trouver. Mais il est vrai que son essence topologique peut sembler un peu abstraite au non-initié.

11 Conclusions

Nous avons donc passé en revue un certain nombre de démonstrations du théorème de Vaschy-Buckingham. Nous n'avons pas reproduit ici la démonstration de Langhaar [6] dont la démarche nous semble longue et rocailleuse.

On relèvera que les puissances entrant dans la définition des variables sans dimension impliquent que les mesures des grandeurs physiques soient toutes *positives*, ce qui peut paraître un peu restrictif. Mais dans les exemples de mesures négatives que l'on rencontre (températures en °C , potentiels), les phénomènes physiques ne font jamais intervenir qu'une *différence* de deux valeurs, et celle-ci peut toujours être comptée positivement.

Références

[1] J. Bertrand – « Sur l'homogénéité dans les formules de la physique », *Comptes rendus* **86** (1878), no. 15, p. 916–920.

[2] J. B. Boyling – « A short proof of the pi theorem in dimensional analysis », *ZAMP* **30** (1979), p. 531–533.

[3] E. Buckingham – « On physically similar systems. illustration of the use of dimensional equations », *Physical Review* **4** (1914), no. 4, p. 345–376.

[4] Bureau international des poids et des mesures et organisation intergouvernementale de la convention du mètre – *Le système international d'unités - The international system of units*, 8 éd., 2006.

[5] R. Comolet et J. Bonnin – *Mécanique expérimentale des fluides*, vol. 3, Masson, Paris, 1992.

[6] H. L. Langhaar – *Dimensional analysis and theory of models*, Wiley, New York, 1951.

[7] E. O. Macagno – « Historico-critical review of dimensional analysis », *Jl of the Franklin Institute* **299** (1971), no. 6, p. 391–402.

[8] J. W. S. Rayleigh – « On the question of the stability of fluids », *Philosophical Magazine* **34** (1892), p. 59–70.

[9] — , *The theory of sound*, vol. 1-2, Dover, New York, 1945.

[10] A. SCHLAG – *Hydraulique générale et mécanique des fluides*, Sciences et lettres, 1950.

[11] L. SEDOV – *Similitude et dimensions en mécanique*, Mir, Moscou, 1977.

[12] A. VASCHY – « Sur les lois de similitude en physique », *Annales télégraphiques* **19** (1892), p. 25–28.