Une généralisation du triangle de Pascal et la suite A007306

Travail en collaboration avec Julien Leroy et Michel Rigo

Manon Stipulanti [1]

Séminaire Compréhensible

25 mars 2016

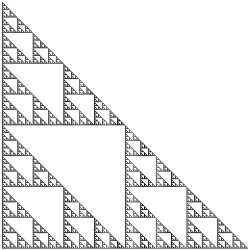
1. Supportée par une bourse FRIA.

Table des matières

Table des matières

Triangle de Pascal et triangle de Sierpiński

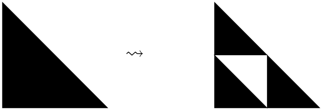
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1



Coefficients binomiaux classiques :

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!\,k!}$$

Construction du triangle de Sierpiński :



Définition : Un *mot fini* est une suite finie de lettres appartenant à un ensemble fini appelé *alphabet*.

Coefficient binomial de mots

Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de deux mots finis u et v est le nombre de fois que le mot v apparaît dans u en tant que sous-suite.

Exemple : $u = 101001 = u_1 u_2 \cdots u_6$ et $v = 101$

$$\binom{101001}{101} =$$

Au commencement... le mot

Définition : Un *mot fini* est une suite finie de lettres appartenant à un ensemble fini appelé *alphabet*.

Coefficient binomial de mots

Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de deux mots finis u et v est le nombre de fois que le mot v apparaît dans u en tant que sous-suite.

Exemple : $u = 101001 = u_1 u_2 \cdots u_6$ et $v = 101$

$$\binom{101001}{101} = 6$$

car

$$u_1u_2u_3 = u_1u_2u_6 = u_1u_4u_6 = u_1u_5u_6 = u_3u_4u_6 = u_3u_5u_6 = 101$$

Remarque : Généralisation des coefficients binomiaux d'entiers : si l'alphabet contient une lettre $\{a\}$

$$\binom{a^m}{a^k} = \binom{m}{k} \quad \forall\, m, k \in \mathbb{N}$$

Idée : S'intéresser au triangle de Pascal et au triangle de Sierpiński en considérant les coefficients binomiaux de mots
$\rightsquigarrow$ Sur quel alphabet ? Quels mots ?

Remarque : Généralisation des coefficients binomiaux d'entiers : si l'alphabet contient une lettre $\{a\}$

$$\binom{a^m}{a^k} = \binom{m}{k} \quad \forall\, m, k \in \mathbb{N}$$

Idée : S'intéresser au triangle de Pascal et au triangle de Sierpiński en considérant les coefficients binomiaux de mots
$\rightsquigarrow$ Sur quel alphabet ? Quels mots ?

Définitions :

- $\mathrm{rep}_2(n)$: représentation gloutonne de $n \in \mathbb{N}_0$ en base 2 qui commence par 1
- $\mathrm{rep}_2(0) := \varepsilon$ où ε est le mot vide
- $L_n = (\{\varepsilon\} \cup 1\{0,1\}^*) \cap \{0,1\}^{\leq n}\ \forall n \geq 0$
  $\# L_n = 2^n\ \forall n \geq 0$

$\rightsquigarrow$ Sur quel alphabet ? $\{0,1\}$
$\rightsquigarrow$ Quels mots ? Les représentations en base 2 triées selon l'ordre généalogique (par longueur, puis selon l'ordre du dictionnaire)

Définitions :

- $\text{rep}_2(n)$: représentation gloutonne de $n \in \mathbb{N}_0$ en base 2 qui commence par 1
- $\text{rep}_2(0) := \varepsilon$ où ε est le mot vide
- $L_n = (\{\varepsilon\} \cup 1\{0,1\}^*) \cap \{0,1\}^{\leq n}\ \forall n \geq 0$
  $\#L_n = 2^n\ \forall n \geq 0$

$\rightsquigarrow$ Sur quel alphabet ? $\{0,1\}$
$\rightsquigarrow$ Quels mots ? Les représentations en base 2 triées selon l'ordre généalogique (par longueur, puis selon l'ordre du dictionnaire)

Premières valeurs du triangle de Pascal généralisé

$u \backslash v$	ε	1	10	11	100	101	110	111
ε	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
10	1	1	1	0	0	0	0	0
11	1	2	0	1	0	0	0	0
100	1	1	2	0	1	0	0	0
101	1	2	1	1	0	1	0	0
110	1	2	2	1	0	0	1	0
111	1	3	0	3	0	0	0	1

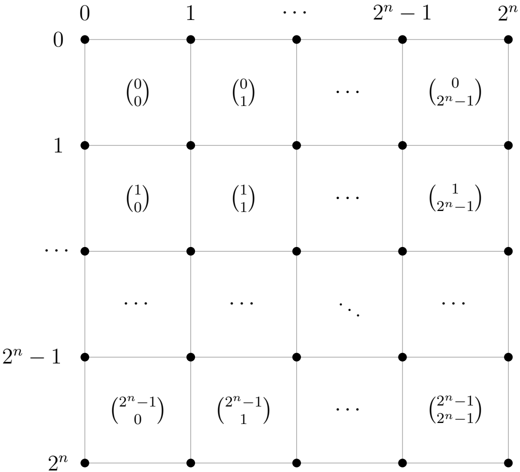
En orange : le triangle de Pascal classique

Premières valeurs du triangle de Pascal généralisé

u \ v	ε	1	10	11	100	101	110	111
ε	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
10	1	1	1	0	0	0	0	0
11	1	2	0	1	0	0	0	0
100	1	1	2	0	1	0	0	0
101	1	2	1	1	0	1	0	0
110	1	2	2	1	0	0	1	0
111	1	3	0	3	0	0	0	1

En orange : le triangle de Pascal classique

- Grille : intersection de $\mathbb{N}^2$ avec la région $[0, 2^n] \times [0, 2^n]$



$\mathbb{N}^2 \cap [0, 2^n]^2$

- Colorier la grille : les 2^n premières lignes et colonnes du triangle de Pascal classique

$$\left(\binom{m}{k} \bmod 2\right)_{0\le m,k<2^n}$$

  - blanc si $\binom{m}{k} \equiv 0 \bmod 2$
  - noir si $\binom{m}{k} \equiv 1 \bmod 2$

Renormaliser par une homothétie de rapport $1/2^n$
$\rightsquigarrow$ une suite de $[0,1] \times [0,1]$

- Colorier la grille : les 2^n premières lignes et colonnes du triangle de Pascal classique

$$\left(\binom{m}{k} \bmod 2\right)_{0\leq m,k<2^n}$$

  - blanc si $\binom{m}{k} \equiv 0 \bmod 2$
  - noir si $\binom{m}{k} \equiv 1 \bmod 2$

Renormaliser par une homothétie de rapport $1/2^n$

$\rightsquigarrow$ une suite de $[0,1] \times [0,1]$

- Colorier la grille : les 2^n premières lignes et colonnes du triangle de Pascal classique

$$\left(\binom{m}{k} \bmod 2\right)_{0\leq m,k<2^n}$$

  - blanc si $\binom{m}{k} \equiv 0 \bmod 2$
  - noir si $\binom{m}{k} \equiv 1 \bmod 2$

Renormaliser par une homothétie de rapport $1/2^n$

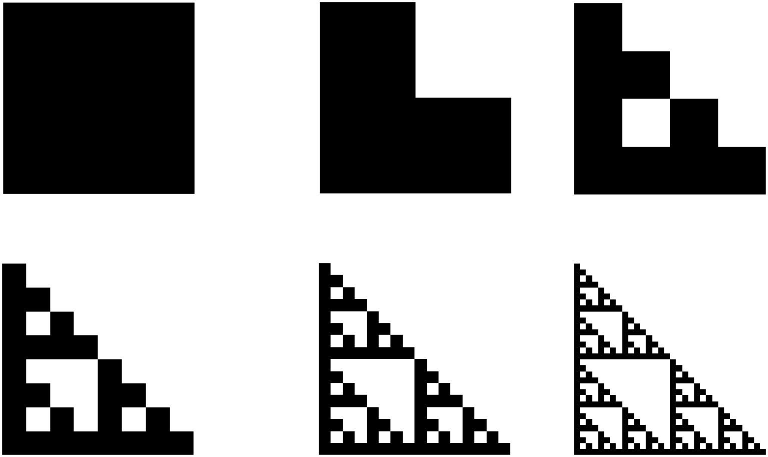
$\rightsquigarrow$ une suite de $[0,1]\times[0,1]$

- Colorier la grille : les 2^n premières lignes et colonnes du triangle de Pascal classique

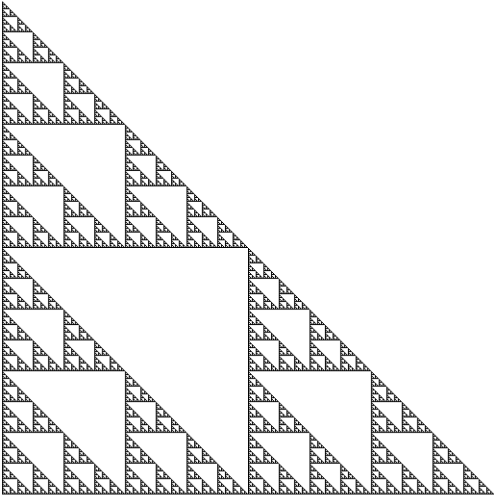
$$\left(\binom{m}{k} \bmod 2\right)_{0\le m,k<2^n}$$

  - blanc si $\binom{m}{k} \equiv 0 \bmod 2$
  - noir si $\binom{m}{k} \equiv 1 \bmod 2$

Renormaliser par une homothétie de rapport $1/2^n$
$\rightsquigarrow$ une suite de $[0,1] \times [0,1]$



L'élément 9 de la suite



F. von Haeseler, H. O. Peitgen, G. Skordev (1992)

Cette suite converge, selon la distance de Hausdorff, vers le triangle de Sierpiński (lorsque n tend vers l'infini).

Définitions :

- ϵ-*épaissi* d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^2$

$$[S]_\epsilon := \bigcup_{x \in S} B(x, \epsilon)$$

- $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), d_h)$ espace des compacts non vides de $\mathbb{R}^2$ muni de la *distance de Hausdorff* d_h

$$d_h(S, S') = \min\{\epsilon \in \mathbb{R}^+ \mid S \subset [S']_\epsilon \quad \text{et} \quad S' \subset [S]_\epsilon\}$$

Espace complet

F. von Haeseler, H. O. Peitgen, G. Skordev (1992)

Cette suite converge, selon la distance de Hausdorff, vers le triangle de Sierpiński (lorsque n tend vers l'infini).

Définitions :

- ϵ-*épaissi* d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^2$

$$[S]_\epsilon := \bigcup_{x \in S} B(x, \epsilon)$$

- $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), d_h)$ espace des compacts non vides de $\mathbb{R}^2$ muni de la *distance de Hausdorff* d_h

$$d_h(S, S') = \min\{\epsilon \in \mathbb{R}^+ \mid S \subset [S']_\epsilon \quad \text{et} \quad S' \subset [S]_\epsilon\}$$

Espace complet

F. von Haeseler, H. O. Peitgen, G. Skordev (1992)

Cette suite converge, selon la distance de Hausdorff, vers le triangle de Sierpiński (lorsque n tend vers l'infini).

Définitions :

- ϵ-*épaissi* d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^2$

$$[S]_\epsilon := \bigcup_{x \in S} B(x, \epsilon)$$

- $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), d_h)$ espace des compacts non vides de $\mathbb{R}^2$ muni de la *distance de Hausdorff* d_h

$$d_h(S, S') = \min\{\epsilon \in \mathbb{R}^+ \mid S \subset [S']_\epsilon \quad \text{et} \quad S' \subset [S]_\epsilon\}$$

Espace complet

Questions :

- Après coloriage et renormalisation du triangle de Pascal généralisé, peut-on espérer avoir une convergence vers un objet limite similaire au triangle de Sierpiński ?
- Peut-on décrire cet objet limite ?

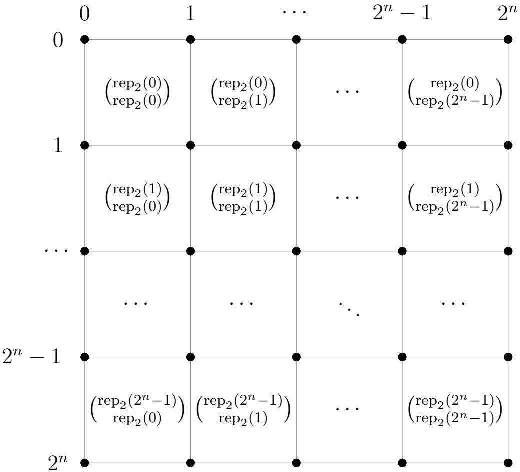
Table des matières

Posons

$$L = \{\varepsilon\} \cup 1\{0,1\}^* = \{\varepsilon, 1, 10, 11, 100, 101, \dots\}.$$

- L est ordonné généalogiquement

- Grille : intersection de $\mathbb{N}^2$ avec la région $[0, 2^n] \times [0, 2^n]$



$\mathbb{N}^2 \cap [0, 2^n]^2$

- Colorier la grille : les 2^n premières lignes et colonnes du triangle de Pascal généralisé

$$\left(\binom{\mathrm{rep}_2(m)}{\mathrm{rep}_2(k)} \bmod 2\right)_{0\leq m,k<2^n}$$

$\rightsquigarrow$ Définition de $(T_n)_{n\geq 0}$:

$T_n \subset [0, 2^n] \times [0, 2^n]$: compact (union finie de carrés unitaires)

Renormaliser par une homothétie de rapport $1/2^n$

$\rightsquigarrow$ Définition de $(U_n)_{n\geq 0}$ dans $[0,1]\times[0,1]$:

$U_n := \frac{T_n}{2^n}$ compact

Représentations graphiques

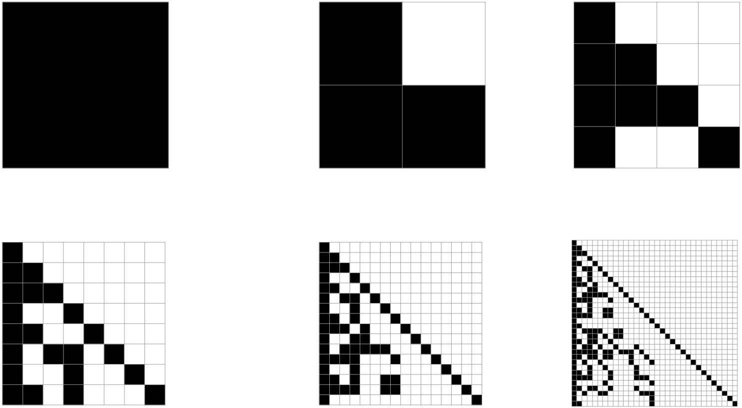
- Colorier la grille : les 2^n premières lignes et colonnes du triangle de Pascal généralisé

$$\left(\binom{\mathrm{rep}_2(m)}{\mathrm{rep}_2(k)} \bmod 2\right)_{0\le m,k<2^n}$$

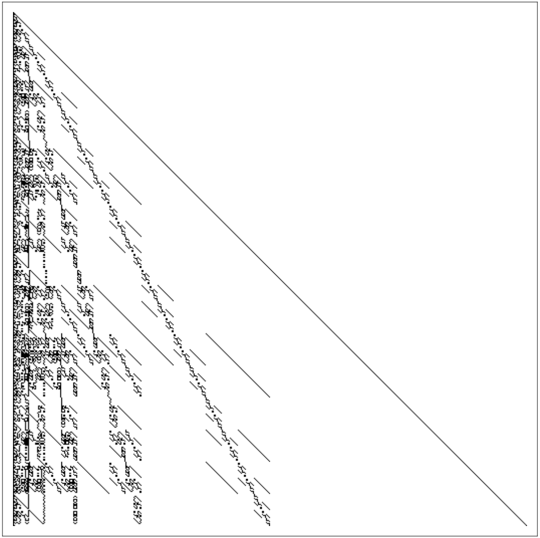
$\rightsquigarrow$ Définition de $(T_n)_{n\geq 0}$:
$T_n \subset [0,2^n]\times[0,2^n]$: compact (union finie de carrés unitaires)

Renormaliser par une homothétie de rapport $1/2^n$
$\rightsquigarrow$ Définition de $(U_n)_{n\geq 0}$ dans $[0,1]\times[0,1]$:
$U_n := \frac{T_n}{2^n}$ compact

Les ensembles U_0 à U_5

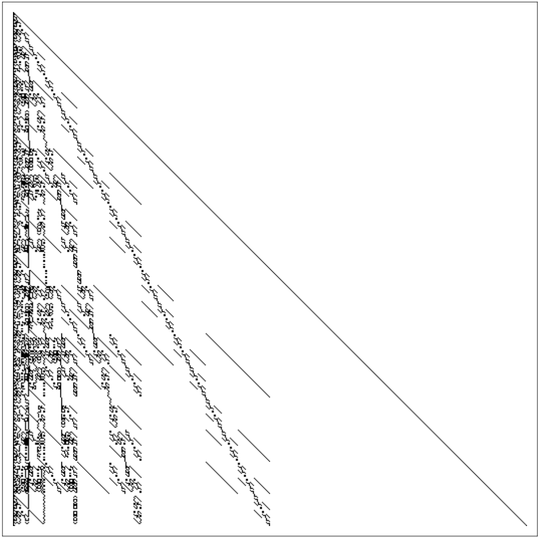


L'ensemble U_9



Observation : Segments de différentes pentes $1, 2, 4, 8, \cdots$

L'ensemble U_9



Observation : Segments de différentes pentes $1, 2, 4, 8, \cdots$

La condition $(\star)$

Soit $(u,v) \in L \times L$. Le couple (u,v) satisfait la condition $(\star)$ si $(u,v) \neq (\varepsilon,\varepsilon)$,

$$\binom{u}{v} \equiv 1 \bmod 2,\ \binom{u}{v0} = 0 \text{ et } \binom{u}{v1} = 0.$$

Lemme : Si $(u,v) \in L \times L$ satisfait $(\star)$, alors $(u0,v0)$ et $(u1,v1)$ satisfont aussi $(\star)$.

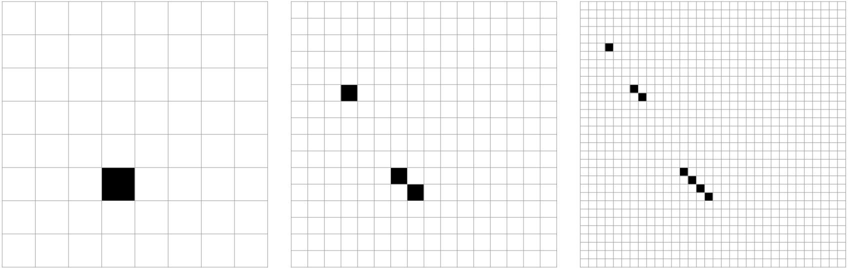
La condition $(\star)$

Soit $(u, v) \in L \times L$. Le couple (u, v) satisfait la condition $(\star)$ si $(u, v) \neq (\varepsilon, \varepsilon)$,

$$\binom{u}{v} \equiv 1 \bmod 2, \ \binom{u}{v0} = 0 \text{ et } \binom{u}{v1} = 0.$$

<u>Lemme</u> : Si $(u, v) \in L \times L$ satisfait $(\star)$, alors $(u0, v0)$ et $(u1, v1)$ satisfont aussi $(\star)$.

Conséquence du lemme



Convergence vers la diagonale du premier carré :

- La région carrée de taille $1/8$ noircie dans $U_3 \rightsquigarrow (101, 11)$ qui satisfait $(\star)$
- Deux régions carrées de taille $1/16$ dans U_4
- Quatre régions carrée de taille $1/32$ dans U_5

Chaque couple satisfait $(\star)$ par le lemme précédent.

Définition de $\mathcal{A}_0$

Définition : Soit (u, v) in $L \times L$ tel que $|u| \geq |v| \geq 1$
Segment $S_{u,v} \subset [0, 1] \times [1/2, 1]$

- de pente 1
- de longueur $\sqrt{2} \cdot 2^{-|u|}$
- d'extrémités

$$A_{u,v} := (0.0^{|u|-|v|}v, 0.u) \text{ et } B_{u,v} := A_{u,v} + (2^{-|u|}, 2^{-|u|})$$

Définition :

$$\mathcal{A}_0 := \overline{\bigcup_{\substack{(u,v) \\ \text{satisfaisant}(\star)}} S_{u,v}} \subset [0, 1] \times [1/2, 1]$$

$\rightsquigarrow$ Compact (fermeture d'une union dénombrable de segments)

Définition de $\mathcal{A}_0$

Définition : Soit (u, v) in $L \times L$ tel que $|u| \geq |v| \geq 1$
Segment $S_{u,v} \subset [0,1] \times [1/2, 1]$

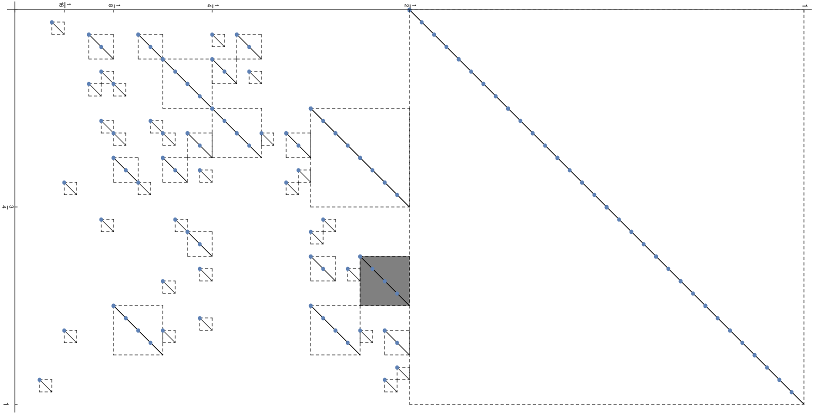
- de pente 1
- de longueur $\sqrt{2} \cdot 2^{-|u|}$
- d'extrémités

$$A_{u,v} := (0.0^{|u|-|v|}v, 0.u) \text{ et } B_{u,v} := A_{u,v} + (2^{-|u|}, 2^{-|u|})$$

Définition :

$$\mathcal{A}_0 := \overline{\bigcup_{\substack{(u,v) \\ \text{satisfaisant}(\star)}} S_{u,v}} \subset [0,1] \times [1/2, 1]$$

$\rightsquigarrow$ Compact (fermeture d'une union dénombrable de segments)



Point : couple (u, v) satisfaisant $(\star)$ avec $|u| \leq 6$

Représentation de tous les segments $S_{u,v}$ correspondant

Définitions :

- c homothétie de centre $(0,0)$ et de rapport $1/2$
- $h : (x,y) \mapsto (x, 2y)$
- $$\mathcal{A}_n := \bigcup_{\substack{0\leq i\leq n \\ 0\leq j\leq i}} h^j(c^i(\mathcal{A}_0))$$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}_n$ compact (modification de $\mathcal{A}_0$ via c et h)

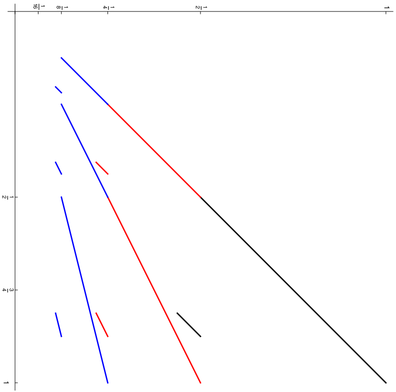
Définitions :

- c homothétie de centre $(0,0)$ et de rapport $1/2$
- $h : (x,y) \mapsto (x, 2y)$
- $$\mathcal{A}_n := \bigcup_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq i}} h^j(c^i(\mathcal{A}_0))$$

$\rightsquigarrow \mathcal{A}_n$ compact (modification de $\mathcal{A}_0$ via c et h)

Un sous-ensemble de $\mathcal{A}_2$

- En noir : deux segments d'origine dans $\mathcal{A}_0$
- En rouge : une application de c éventuellement suivie d'une application de h
- En bleu : deux applications de c suivies par au plus deux applications de h



Lemme : La suite $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy.

Définition :

$$\underbrace{\begin{array}{c}(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0} \text{ de Cauchy} \\ (\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), d_h) \text{ espace métrique complet}\end{array}}$$

$\Rightarrow$ la limite de $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ est un compact bien défini noté $\mathcal{L}$

Lemme : La suite $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy.

Définition :

$$\underbrace{\begin{array}{c}(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0} \text{ de Cauchy} \\ (\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), d_h) \text{ espace métrique complet}\end{array}}$$

$\Rightarrow$ la limite de $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ est un compact bien défini noté $\mathcal{L}$

Une approximation de l'objet limite $\mathcal{L}$ obtenue avec des mots de longueur ≤ 8 et au maximum 4 applications des fonctions c et h

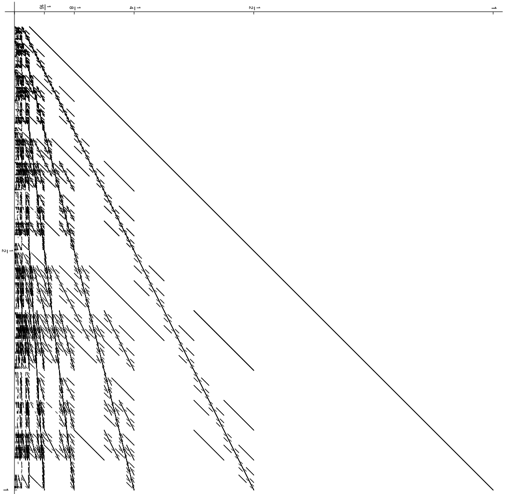
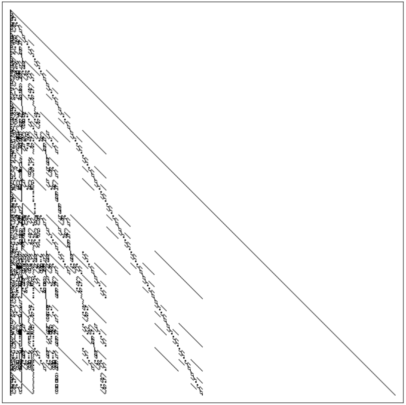


Table des matières

Théorème

La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\mathcal{L}$.



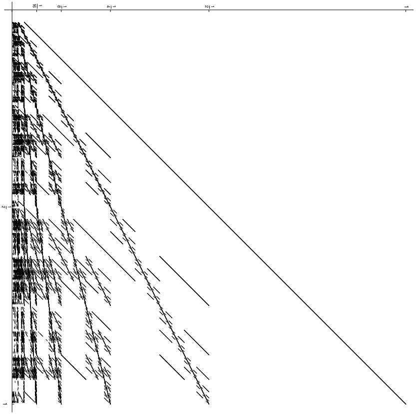


Table des matières

Uniquement des coefficients binomiaux impairs

Extension à un contexte plus général :

$$p \text{ un nombre premier fixé}$$
$$r \in \{1, \ldots, p-1\}$$

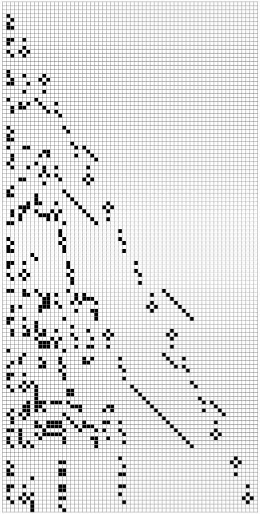
$$T_n \rightsquigarrow T_{n,r} := \bigcup \left\{ (\mathrm{val}_2(v), \mathrm{val}_2(u)) + Q \mid u, v \in L_n, \binom{u}{v} \equiv r \bmod p \right\} \subset [0, 2^n] \times [0, 2^n]$$

$$U_n \rightsquigarrow U_{n,r} := \frac{T_{n,r}}{2^n}$$

$\rightsquigarrow$ Adaptation des raisonnements, constructions et résultats

À gauche : $U_{7,2}$ (coefficients binomiaux congrus à 2 modulo 3)

À droite : une approximation de l'objet limite $\mathcal{L}$ correspondant



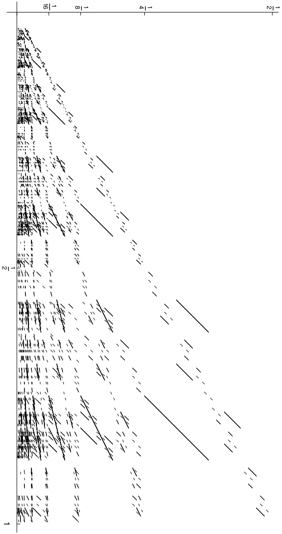


Table des matières

Rappel : Triangle de Pascal généralisé

		v							
		ε	1	10	11	100	101	110	111
	ε	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	10	1	1	1	0	0	0	0	0
u	11	1	2	0	1	0	0	0	0
	100	1	1	2	0	1	0	0	0
	101	1	2	1	1	0	1	0	0
	110	1	2	2	1	0	0	1	0
	111	1	3	0	3	0	0	0	1

Définition de la suite $(S(n))_{n\geq 0}$

Définition : Pour tout $n \geq 1$

$S(n) :=$ nombre de naturels strictement positifs
dans la $n^{\text{ème}}$ ligne du triangle de Pascal généralisé
$S(0) := 1$

Premiers termes de $(S(n))_{n\geq 0}$:

$$1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 4, 5, 7, 8, 7, 7, 8, 7, 5,$$
$$6, 9, 11, 10, 11, 13, 12, 9, 9, 12, 13, 11, 10, \ldots$$

Pour tout $n \geq 1$,

$$S(n) = \#\left\{ v \in L \mid \binom{\mathrm{rep}_2(n-1)}{v} > 0 \right\}$$

Définition de la suite $(S(n))_{n\geq 0}$

<u>Définition</u> : Pour tout $n \geq 1$

$$S(n) := \text{ nombre de naturels strictement positifs}$$
$$\text{dans la } n^{\text{ème}} \text{ ligne du triangle de Pascal généralisé}$$
$$S(0) := 1$$

Premiers termes de $(S(n))_{n\geq 0}$:

$$1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 4, 5, 7, 8, 7, 7, 8, 7, 5,$$
$$6, 9, 11, 10, 11, 13, 12, 9, 9, 12, 13, 11, 10, \ldots$$

Pour tout $n \geq 1$,

$$S(n) = \# \left\{ v \in L \mid \binom{\operatorname{rep}_2(n-1)}{v} > 0 \right\}$$

Définition de la suite $(S(n))_{n\geq 0}$

<u>Définition</u> : Pour tout $n \geq 1$

$S(n) :=$ nombre de naturels strictement positifs
dans la $n^{\text{ème}}$ ligne du triangle de Pascal généralisé
$S(0) := 1$

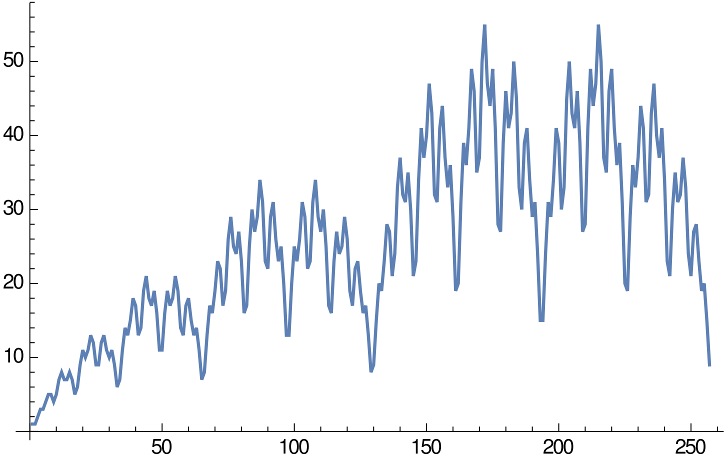
Premiers termes de $(S(n))_{n\geq 0}$:

$$1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 4, 5, 7, 8, 7, 7, 8, 7, 5,$$
$$6, 9, 11, 10, 11, 13, 12, 9, 9, 12, 13, 11, 10, \ldots$$

Pour tout $n \geq 1$,

$$S(n) = \# \left\{ v \in L \mid \binom{\mathrm{rep}_2(n-1)}{v} > 0 \right\}$$

La suite $(S(n))_{n\geq 0}$ dans l'intervalle $[0, 256]$



Proposition : Pour tout $\ell \geq 1$ et $1 \leq r \leq 2^\ell$ $(S(n))_{n\geq 0}$ satisfait

$$S(0) = S(1) = 1$$

$$S(2) = 2$$

et

$$S(2^\ell + r) = \begin{cases} S(2^{\ell-1} + r) + S(r), & \text{si } 1 \leq r \leq 2^{\ell-1} \\ S(2^{\ell+1} - r + 1) & \text{si } 2^{\ell-1} + 1 \leq r \leq 2^\ell \end{cases}$$

En particulier, $(S(n))_{n\geq 0}$ est la suite `A007306` de l'Encyclopédie en ligne des suites entières.

Définitions : $s = (s(n))_{n\geq 0}$ une suite

- Le 2-*noyau* de s est l'ensemble

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_2(s) &= \{(s(2^i n + j))_{n\geq 0} |\ i \geq 0 \text{ et } 0 \leq j < 2^i\} \\ &= \{(s(n))_{n\geq 0}, (s(2n))_{n\geq 0}, (s(2n+1))_{n\geq 0}, (s(4n))_{n\geq 0}, \\ &\quad (s(4n+1))_{n\geq 0}, (s(4n+2))_{n\geq 0}, (s(4n+3))_{n\geq 0}, \ldots\}\end{aligned}$$

- s est 2-*automatique* si son 2-noyau est fini
- s est 2-*régulière* s'il existe un nombre fini de suites

$$(t_1(n))_{n\geq 0}, \ldots, (t_\ell(n))_{n\geq 0} \in \mathcal{K}_2(s)$$

telles que toute suite de $\mathcal{K}_2(s)$ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des suites $t_1, \cdots, t_\ell$

Définitions : $s = (s(n))_{n\geq 0}$ une suite

- Le 2-*noyau* de s est l'ensemble

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_2(s) &= \{(s(2^i n + j))_{n\geq 0} \mid i \geq 0 \text{ et } 0 \leq j < 2^i\} \\ &= \{(s(n))_{n\geq 0}, (s(2n))_{n\geq 0}, (s(2n+1))_{n\geq 0}, (s(4n))_{n\geq 0}, \\ &\quad (s(4n+1))_{n\geq 0}, (s(4n+2))_{n\geq 0}, (s(4n+3))_{n\geq 0}, \ldots\}\end{aligned}$$

- s est 2-*automatique* si son 2-noyau est fini
- s est 2-*régulière* s'il existe un nombre fini de suites

$$(t_1(n))_{n\geq 0}, \ldots, (t_\ell(n))_{n\geq 0} \in \mathcal{K}_2(s)$$

telles que toute suite de $\mathcal{K}_2(s)$ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des suites $t_1, \cdots, t_\ell$

Définitions : $s = (s(n))_{n\geq 0}$ une suite

- Le 2-*noyau* de s est l'ensemble

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_2(s) &= \{(s(2^i n + j))_{n\geq 0} \mid i \geq 0 \text{ et } 0 \leq j < 2^i\} \\ &= \{(s(n))_{n\geq 0}, (s(2n))_{n\geq 0}, (s(2n+1))_{n\geq 0}, (s(4n))_{n\geq 0}, \\ &\quad (s(4n+1))_{n\geq 0}, (s(4n+2))_{n\geq 0}, (s(4n+3))_{n\geq 0}, \ldots\}\end{aligned}$$

- s est 2-*automatique* si son 2-noyau est fini
- s est 2-*régulière* s'il existe un nombre fini de suites

$$(t_1(n))_{n\geq 0}, \ldots, (t_\ell(n))_{n\geq 0} \in \mathcal{K}_2(s)$$

telles que toute suite de $\mathcal{K}_2(s)$ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des suites $t_1, \cdots, t_\ell$

Proposition : $(S(n))_{n\geq 0}$ satisfait

$$\begin{aligned} S(4n) &= -S(n+1) + S(2n) + S(2n+1) \\ S(4n+1) &= -S(n) + S(2n) + S(2n+1) \\ S(4n+2) &= 4S(n+1) - S(2n+2) \\ S(4n+3) &= 4S(n+1) - S(2n+1) \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$

En particulier, $(S(n))_{n\geq 0}$ est 2-régulière.

Proposition : $(S(n))_{n\geq 0}$ satisfait

$$\begin{aligned}
S(4n) &= -S(n+1) + S(2n) + S(2n+1) \\
S(4n+1) &= -S(n) + S(2n) + S(2n+1) \\
S(4n+2) &= 4S(n+1) - S(2n+2) \\
S(4n+3) &= 4S(n+1) - S(2n+1)
\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$

En particulier, $(S(n))_{n\geq 0}$ est 2-régulière.

Définition : $s = (s(n))_{n\geq 0}$ est 2-*synchronisé* si le langage

$$\{\mathrm{rep}_2(n, s(n)) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

est accepté par un automate fini, i.e. est *régulier*.

A. Carpi, C. Maggi (2001)

- Une suite 2-automatique est 2-synchronisée.
- Une suite 2-synchronisée est 2-régulière.

Proposition : La suite $(S(n))_{n\geq 0}$ n'est pas 2-synchronisée.
En particulier, elle n'est pas non plus 2-automatique.

Définition : $s = (s(n))_{n\geq 0}$ est 2-*synchronisé* si le langage

$$\{\mathrm{rep}_2(n, s(n)) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

est accepté par un automate fini, i.e. est *régulier*.

A. Carpi, C. Maggi (2001)

- Une suite 2-automatique est 2-synchronisée.
- Une suite 2-synchronisée est 2-régulière.

Proposition : La suite $(S(n))_{n\geq 0}$ n'est pas 2-synchronisée.
En particulier, elle n'est pas non plus 2-automatique.

Définition : $s = (s(n))_{n\geq 0}$ est 2-*synchronisé* si le langage

$$\{\mathrm{rep}_2(n, s(n)) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

est accepté par un automate fini, i.e. est *régulier*.

A. Carpi, C. Maggi (2001)

- Une suite 2-automatique est 2-synchronisée.
- Une suite 2-synchronisée est 2-régulière.

Proposition : La suite $(S(n))_{n\geq 0}$ n'est pas 2-synchronisée.
En particulier, elle n'est pas non plus 2-automatique.

Encore à faire...

Extension aux

- Langages des représentations dans une autre base que la base 2
- Langage de Fibonacci (interdiction de deux 1 consécutifs)
- Langage de Tribonacci (interdiction de trois 1 consécutifs)
- Langage de m-bonacci (interdiction de m 1 consécutifs)
- ...

Table des matières

Bibliographie

- J.-P. Allouche, V. Berthé, Triangle de Pascal, complexité et automates, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **4** (1997), 1–23.
- J.-P. Allouche, J. Shallit, *Automatic sequences. Theory, applications, generalizations*, Cambridge University Press, Cambridge (2003).
- B. Adamczewski, J. Bell, An analogue of Cobham's theorem for fractals, *Trans. Amer. Math. Soc.* **363** (2011), no. 8, 4421–4442.
- A. Barbé, F. von Haeseler, Limit sets of automatic sequences, *Adv. Math.* **175** (2003), 169–196.
- J. Berstel, M. Crochemore, J.-É. Pin, Thue-Morse sequence and p-adic topology for the free monoid, *Discrete Math.* **76** (1989), no. 2, 89–94.
- A. Carpi, V. D'Alonzo, On the repetitivity index of infinite words, *International Journal of Algebra and Computation* **19** (2009), 145–158.
- A. Carpi, V. D'Alonzo, On factors of synchronized sequences, *Theoretical Computer Science* **411** (2010), 3932–3937.

Bibliographie

- A Carpi, C. Maggi, On synchronized sequences and their separators, *RAIRO Theoretical Informatics and Applications* **35** (2001), 513–524.
- É. Charlier, J. Leroy, M. Rigo, An analogue of Cobham's theorem for graph directed iterated function systems, *Adv. Math.* **280** (2015), 86–120.
- H. Delange, Sur la fonction sommatoire de la fonction "somme des chiffres", *Enseignement Math.* **21** (1975), no. 1, 31–47.
- S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*, vol. B, Academic Press, New York, (1976).
- K. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, New York, (1985).
- N. Fine, Binomial coefficients modulo a prime, *American Mathematical Monthly* **54** (1947), 589–592.
- F. von Haeseler, H.-O. Peitgen, G. Skordev, Pascal's triangle, dynamical systems and attractors, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **12** (1992), 479–486.

Bibliographie

- M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, (1997).
- É. Lucas, Théorie des fonctions numériques simplement périodiques, *American Journal of Mathematics* **1** (1878), 197–240.
- R.D. Mauldin, S. Williams, Hausdorff dimension in graph directed constructions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **309** (1989), 811–829.
- J.-É. Pin, P. V. Silva, A noncommutative extension of Mahler's theorem on interpolation series, *European J. Combin.* **36** (2014), 564–578.
- I. Stewart, Four encounters with Sierpinski's gasket, *Math. Intelligencer* **17** (1995), 52–64.

Merci de votre attention !