This page intentionally left blank.

Séance du 29 mars 1862.

MATHÉMATIQUES. — M. Catalan a fait dans cette séance la communication suivante :

D'après le Code civil (art. 757) « le droit de l'enfant naturel est d'un tiers de la portion héréditaire qu'il aurait eue s'il eût été légitime. »

Soient : l le nombre des enfants légitimes ; n le nombre des enfants naturels ; $X_{l,n}$ la part d'un enfant légitime ; $Y_{l,n}$ la part d'un enfant naturel.

On a d'abord, en prenant pour unité la somme à partager entre les $l+n$ enfants :

$$l\,X_{l,n} + n\,Y_{l,n} = 1. \qquad (1)$$

D'un autre côté, conformément à la prescription ci-dessus :

$$Y_{l,n} = \tfrac{1}{3} X_{l+1,n-1}. \qquad (2)$$

De ces deux relations, on conclut aisément la formule suivante, connue depuis longtemps :

$$X_{l,n} = \frac{1}{l} - \frac{n}{3l(l+1)} + \frac{n(n-1)}{3^2 l(l+1)(l+1)} - \ldots \pm \frac{(n-1)\ldots 3.2.1.}{3^n l(l+1)\ldots(l+n)} \qquad (3)$$

La complication de cette formule est peut-être ce qui empêche les jurisconsultes d'obéir, sinon à l'esprit, du moins au texte de la loi, quand il s'agit pour eux d'effectuer un partage entre enfants légitimes et enfants naturels. Mais on peut la remplacer par une autre expression, beaucoup plus commode.

On a en effet

$$\frac{1}{l(l+1)(l+2)\ldots(l+p)} = \frac{1}{1.2.3\ldots p}\int_0^1 (1-\theta)^p \theta^{l-1} d\theta;$$

donc

$$X_{l,n} = \int_0^1 \theta^{l-1} d\theta \left[1 - \frac{1}{3}\frac{n}{1}(1-\theta) + \frac{1}{3^2}\frac{n(n-1)}{1.2}(1-\theta)^2 - \ldots\right.$$

$$\pm \frac{1}{3^n}(1-\theta)^s \Big]$$

$$= \frac{1}{3^n}\int_0^1 \theta^{l-1}(2-\theta)^n d\theta;$$

d'où enfin

$$X_{l,n} = \frac{1}{3^n}\left[2^n \frac{1}{l} + \frac{n}{1} 2^{n-1} \frac{1}{l+1} + \frac{n(n-1)}{1.2} 2^{n-2} \frac{1}{l+2} + \dots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{l+n} \right] \qquad (4)$$

Il est visible que, pour former la quantité entre parenthèses, il suffit de développer $(2+1)^n$, et de diviser par $l, l+1, l+2, \dots l+n$ les termes du développement. Du reste, il est facile de vérifier, par un procédé purement algébrique, l'équivalence des deux expressions de $X_{l,n}$.

Cette équivalence étant démontrée, il en résulte que l'on a:

$$\frac{1}{l} - \frac{n}{l(l+1)}x + \frac{n(n-1)}{l(l+1)(l+2)}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{l(l+1)(l+2)(l+2)}x^3 + \dots$$
$$= (1-x)^n \left[\frac{1}{l} + \frac{n}{1}\frac{1}{l+1}\left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\frac{1}{l+2}\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \right.$$
$$\left. \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\frac{1}{l+2}\left(\frac{x}{1-x}\right)^3 + \dots\dots \right], \qquad (5)$$

même quand les deux membres, au lieu d'être composés d'un nombre fini de termes, deviennent des séries *convergentes*.

Par exemple :

$$1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$$
$$= 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right);$$

ce qui est exact.

Remarque. Les relations(1), (2), (3), (4) supposent $l \gtreqless 1$. S'il s'agissait de partager l'héritage entre n enfants, tous naturels, la part de chacun serait

$$Y=\frac{1}{3}-\frac{n-1}{1}\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{(n-1)(n-1)}{1.2}\,\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3-\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1.\;2.\;3.}\,\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4+\ldots\ldots\pm\frac{1}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n;$$

ou, par la formule (4) :

$$Y=\frac{1}{3^n}\left[2^{n-1}+\frac{n-1}{1}2^{n-2}.\frac{1}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.\;2.}.\,2^{n-3}\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right],$$

ou enfin :

$$Y=\frac{1}{n}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$

Dans ce cas, la somme de toutes les parts ne reproduirait pas l'héritage. Dans la réalité, les choses ne se passent pas ainsi : lorsqu'il n'y a pas de descendant légitime, le droit de l'enfant naturel est de la moitié de la portion héréditaire qu'il aurait eue s'il eût été légitime, et *la somme des parts des enfants naturels peut surpasser l'héritage.*

Séance du 12 *avril* 1862.

PHYSIQUE. *Recherches sur la solidification des liquides refroidis au-dessous de leur point de fusion.* —Voici l'analyse d'un travail présenté par M. Ed. Desains, dans cette séance.

Ce travail est divisé en deux parties : dans la première, dit l'auteur, je démontre par l'expérience qu'il faut donner à un poids d'eau liquide, pour l'échauffer de u° à t°, la même quantité de chaleur, soit que dans ce passage l'eau se gèle d'abord et se fonde ensuite, soit au contraire qu'elle se réchauffe sans cesser d'être liquide. Dans la seconde, j'applique ce principe à plusieurs questions relatives à la surfusion, c'est-à-dire à l'état d'un liquide refroidi au-dessous de son point de congélation.

Pour démontrer le principe, je me sers d'un petit tube de verre, fermé à la lampe, contenant dans son intérieur de l'eau que l'on y a fait bouillir avant de le fermer, et un thermomètre