

Ch. HANOCQ

Ingénieur civil  
Professeur émérite de l'Université de Liège

# MÉCANIQUE DES FLUIDES

appliquée à

## l'Étude des Coques et des Ailes

UNIVERSITÉ DE LIÈGE  
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES ET MATHÉMATIQUES  
1, CHEMIN DES CHEVREUILS, BÂT B52/4  
B-4000 LIÈGE

Université de Liège  
BST - Sciences Appliquées et Mathématiques  
1, Chemin des Chevreaux; Bât B52/4  
B-4000 LIEGE

Fasc. 1

LIÈGE  
IMPRIMERIE H. VAILLANT-CARMANNE, S. A.  
4, PLACE SAINT-MICHEL, 4  
1954

A = 7754

*A mes anciens et chers élèves  
du cours sur les Turbo-machines.*

**Université de Liège**  
BST - Sciences Appliquées et Mathématiques  
1, Chemin des Chevreuils; Bât B52/4  
B-4000 LIEGE

Un amas de matériaux ne constitue pas un édifice.  
H. POINCARÉ.

## AVANT-PROPOS

Nous saurions gré au lecteur qui, ayant pris connaissance de ce mémoire et poussé la curiosité jusqu'à utiliser sa documentation personnelle pour procéder à de nouvelles vérifications, voudrait nous faire part de son sentiment à cet égard.

Nous tenons à souligner à ce propos, que les documents utilisés par nous, ont été mis en diagrammes et en tableaux il y a dix ou douze ans, bien avant que nous n'ayons créé l'outil affiné dont nous disposons aujourd'hui pour opérer une vaste synthèse des éléments connus sur cette question.

Notre mérite est d'avoir persévéré malgré quelques succès passagers, malgré aussi le doute qui planait pour nous, *tout à l'origine*, sur la rigueur de la méthode.

Notre succès est venu de n'avoir négligé aucun point expérimental, encore moins d'en avoir déplacé un quelconque.

Une fois dissipée l'appréhension qui nous assaillait quant à la *portée générale du théorème de la quantité de mouvement appliqué au flux d'épaisseur constante à trajectoires concentriques*, il nous a semblé que le lecteur spécialisé, nous serait reconnaissant d'avoir poursuivi cette recherche jusqu'au bout, le mettant à même d'avoir non seulement une vision nette des facteurs qui interviennent dans le phénomène de la déviation, mais d'atteindre à la connaissance chiffrée de celui-ci, au point que les essais au tunnel ou au bassin des carènes tendent à n'avoir d'autre raison d'être que la détermination des corrections nécessitées par les « interactions ».

Nous voudrions nous défendre, pour le surplus, d'avoir cherché à vulgariser un sujet qui ne le demandait pas. Ce reproche nous paraîtrait fondé, si, par la voie mathématique pure, il avait été possible de donner une vue d'ensemble aussi nette de la question. On conviendra que, jusqu'à présent, il n'en a pas été tout à fait ainsi.

La 6<sup>e</sup> Partie que nous avons consacrée à la transformation des formules qui donnent la portance et la traînée dans la région de la vitesse du son, montre jusqu'à quel point peut être poussée l'analyse du phénomène connu sous le nom de *mur du son*, grâce à la méthode que nous venons d'exposer.

La 4<sup>e</sup> Partie que nous avons introduite dans ce mémoire, tend à renforcer encore la confiance qu'on peut lui accorder.

Comme le frottement joue dans le cas de l'étude des carènes, un rôle important, nous avons dû commencer cet exposé, par un rappel de nos études antérieures, l'une sur les pertes de charge dans les tuyaux lisses et rugueux de 1922, l'autre sur le coefficient de résistance propre aux disques en rotation de 1928.

La vue d'ensemble tirée de l'analyse des résultats expérimentaux sur les carènes, ne le cède en rien à celle que nous avons pu apporter dans l'étude du problème de la sustentation, et de la résistance à l'avancement des ailes et des coques.

Nous voulons croire que nous trouverons là une excuse à l'aspect un peu disparate de cette présentation qui va de l'étude des ailes à l'étude des carènes pour revenir à l'étude des ailes et des coques en régime critique.

## PREMIÈRE PARTIE

### ÉTUDE DES PERTES DUES A LA DÉVIATION DANS LE DÉPLACEMENT DES CORPS SANS PORTANCE

#### INTRODUCTION

Abstraction faite de l'influence de la paroi, il existe, pour une masse fluide qui contourne un obstacle tel le cylindre de la figure 1, une *résistance propre* dont on peut déterminer la valeur d'une façon mathématique, en faisant appel au théorème de la quantité de mouvement, ainsi que nous allons l'établir dans cette première partie de notre étude.

Supposons que le cylindre ait une envergure infinie de façon à ramener le déplacement d'un élément, à un mouvement plan. Supposons

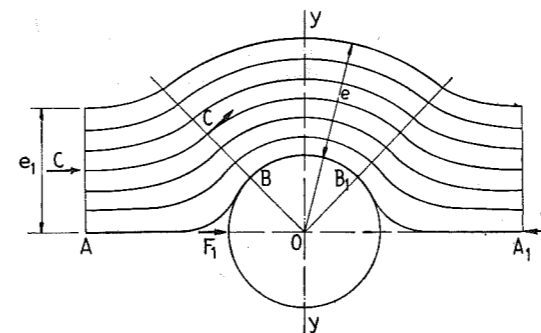


Fig. 1.

également que le flux qui contourne l'obstacle ait une épaisseur  $2e_1$ , et que tous les éléments soient animés de la même vitesse  $c$  à l'entrée; de A à B les filets seront incurvés vers le haut; en B la courbure changera et les filets enveloppant l'obstacle prendront au point  $B_1$ , nouveau point d'inflexion, une courbure vers le haut.

Ce cylindre supportera une poussée que nous désignerons par  $F_1$ , rien que pour la face avant, abstraction faite de l'action du frottement sur la paroi.

En l'occurrence, étant donné la faible étendue des surfaces en contact avec le flux, cette action du frottement est *pratiquement négligeable*, si bien que l'on peut admettre que tout se passe dans la masse, comme si l'on avait affaire à un phénomène d'écoulement sans frottement <sup>(1)</sup> :

(1) Si une telle affirmation ne paraissait pas cadrer avec ce qui est généralement admis, les résultats de l'analyse qui va suivre, se chargeront d'établir le bien-fondé de cette manière de voir.

la vitesse qui était supposée égale à  $c$  pour tous les éléments à l'entrée, se retrouvera égale à  $c$  au point d'inflexion B, où la *courbure des trajectoires est nulle*.

En d'autres termes, tout se passera entre A et B, comme si le fluide était parfait; et nous

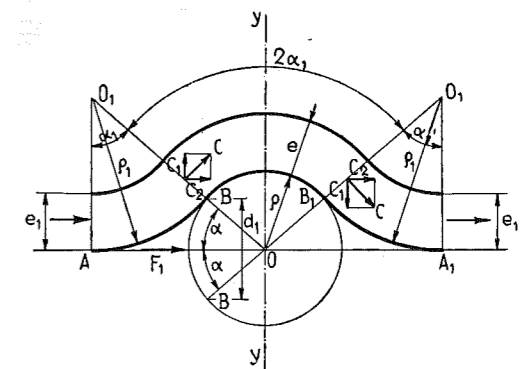


Fig. 2.

allons montrer que dans ce cas, on ne commet pas d'erreur en substituant aux filets réels des filets concentriques (fig. 2).

#### CHAPITRE I

##### CAS DU FLUX D'ÉPAISSEUR CONSTANTE

Nous verrons par la suite, que pour un obstacle plongé dans un flux d'épaisseur illimitée de vitesse  $c$ , tout se passe, au point de vue de la poussée  $F_1$ , comme si cet obstacle était contourné par un flux d'épaisseur finie  $2e_1$  dont tous les éléments seraient déviés du même angle  $\alpha$  (fig. 2).

De là l'intérêt que peut présenter l'analyse du cas simple, d'un flux d'épaisseur constante  $2e_1$  que nous allons aborder.

##### § 1. — Cas de la plaque plane frappée perpendiculairement

Abordons la question en examinant ce qui se passe dans le cas le plus simple qui puisse se concevoir, celui d'un plan frappé perpendiculairement par un jet d'épaisseur  $2e$  (fig. 3).

En vertu du théorème de la quantité de mouvement, la force  $F$  appliquée à la plaque, pour une profondeur du jet égale à  $L$ , a pour valeur :

$$F = Mc$$

$M$  étant la masse déviée par seconde, le long de l'envergure  $L$ ,  $c$  étant la vitesse du flux.

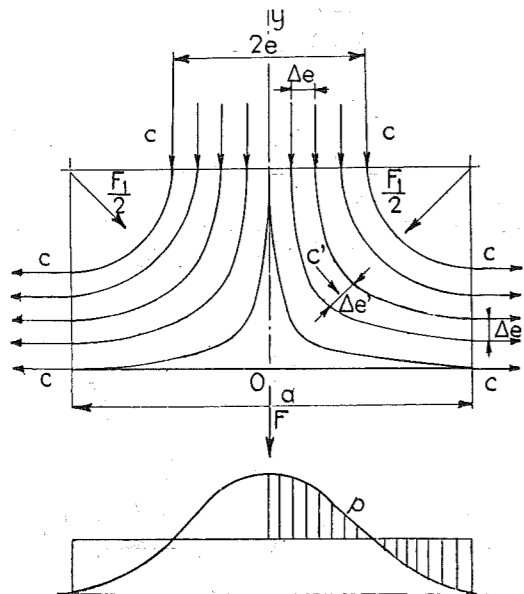


Fig. 3.

Pour un élément d'épaisseur  $\Delta e$  :

$$\Delta F = mc$$

$m$  étant la masse élémentaire qui s'écoule par seconde sous l'épaisseur  $\Delta e$ . Tous les filets comme on le voit, jouent le même rôle, au point de vue de la poussée quelle que soit la courbure prise

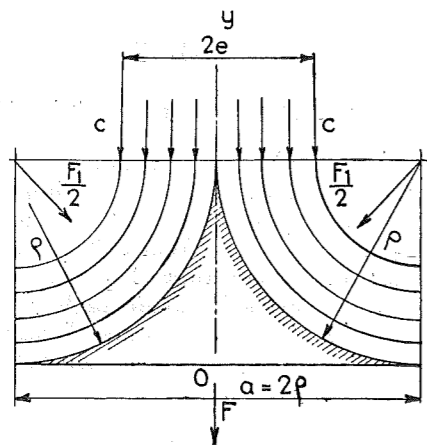


Fig. 4.

par chacun d'eux; cela revient à dire que la résultante  $F$  resterait la même si tous les filets traçaient des trajectoires concentriques, laissant une zone morte sous le filet le plus intérieur, tangent au plan (fig. 4).

Or le long du filet intérieur règne une pression effective qu'il est facile d'évaluer :

$$p = \frac{\delta e}{g \rho} c^2 \quad (1)$$

La valeur de  $F$  a donc pour expression :

$$F = 2 p L \rho = 2 \frac{\delta}{g} e L c^2 \quad (2)$$

Elle peut se mettre sous deux formes :

$$F = Mc \quad (3)$$

ou :

$$F = \left( \frac{\delta}{g} S c^2 \right) C \quad (4)$$

avec :

$$C = \frac{2e}{a} \quad (5)$$

Toutes deux sont indépendantes du rayon  $\rho$ . Ainsi, si la distribution des pressions sur la surface ne nous intéresse pas, si seule l'évaluation de l'effort  $F$  est en cause, nous pourrions substituer un flux fictif au flux réel, flux fictif constitué par un ensemble de filets concentriques d'épaisseur totale  $2e$ .

### § 2. — Cas du dièdre

Utilisons cette propriété pour établir la valeur de  $2 F_1$  dans le cas du flux dévié par deux plaques formant entre elles un angle  $2\alpha_1$  la bissectrice

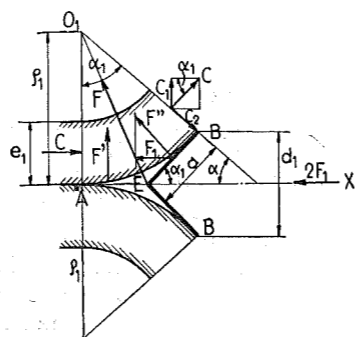


Fig. 5.

du dièdre ainsi formé, coïncidant avec la direction du flux (fig. 5). Nous pourrions substituer au flux réel, un flux fictif formé d'éléments concentriques, d'épaisseur  $e_1$  de rayon  $\rho_1$ .

Pour calculer la réaction  $F$  pour chacun des deux demi-flux, nous partirons de la pression  $p$

(1) Pour l'établissement de cette relation, voir Deuxième Partie, § 1.

dans la zone morte (formule 1) et nous considérerons  $F$  comme la résultante de deux forces  $F'$  et  $F''$  appliquées l'une à la surface fictive  $AE$ , l'autre appliquée à la surface réelle  $EB$ ; la première est équilibrée par la force née du demi-flux opposé; la seconde appliquée à la paroi d'étendue  $aL$ , donnera lieu à une composante  $F_1$  égale à :

$$F_1 = (aL) \sin \alpha_1 \times p = (aL) \frac{\delta e_1}{g \rho_1} c^2 \sin \alpha_1 \quad (6)$$

Si nous désignons par  $d_1$  la distance des deux points de tangence  $B$ , il viendra :

$$\frac{d_1}{2} = a \sin \alpha_1$$

et partant la réaction totale  $2 F_1$  pourra s'écrire :

$$2 F_1 = (d_1 \times L) \frac{\delta}{g} c^2 \frac{e_1}{\rho_1} = \left( S \frac{\delta}{g} c^2 \right) \times C \quad (7)$$

avec :

$$C = \frac{e_1}{\rho_1} \quad (8)$$

$S$  désigne la section au maître-couple du dièdre formant l'obstacle,  $C$  le coefficient de résistance qui caractérise l'obstacle.

La réaction est donc connue, dès que l'on est en mesure de fixer la valeur de  $\frac{e_1}{\rho_1}$ , ou si l'on veut, de déterminer le rayon de l'arc d'approche  $\rho_1$  tangent au plan, puisque  $e_1$  est une donnée.

Ainsi la réaction n'est pas nulle, même si nous raisonnons sur un fluide parfait.

L'existence de cette réaction n'implique, en effet, aucune perte puisque la vitesse de sortie  $c$  reste égale à la vitesse d'entrée.

Où réside, en apparence, la contradiction ?

C'est que, dans l'hypothèse où le dièdre serait remorqué dans un flux parfait au repos, la même image du phénomène pourrait encore apparaître par la pensée, tout au moins, comme satisfaisante, bien que sa nature en serait profondément modifiée : la vitesse  $c$  deviendrait une vitesse relative; seule la composante  $c_1$  apparaîtrait comme une vitesse réelle.

Le travail  $\mathfrak{E}$  dépensé pour remorquer l'obstacle pourrait se calculer en écrivant :

$$\mathfrak{E} = 2 F_1 \times c$$

ou d'une façon plus explicite, en utilisant la relation (7) :

$$\mathfrak{E} = \left( e_1 L \frac{\delta}{g} c \right) c^2 \frac{d_1}{\rho_1} = \frac{M}{2} c^2 \frac{d_1}{\rho_1}$$

Remplaçant  $c$  par la valeur  $c_1/\sin \alpha_1$ , il viendra :

$$\mathfrak{E} = \frac{M c_1^2 d_1}{2 \rho_1 \sin^2 \alpha_1} = \frac{M c_1^2}{2} \quad (9)$$

le facteur  $\frac{d_1}{\rho_1 \sin^2 \alpha_1}$  étant égal à 1 quand il s'agit d'angles  $\alpha_1$  faibles.

Ainsi l'énergie dépensée par seconde pour remorquer l'obstacle est égale à l'énergie apparue  $\frac{M c_1^2}{2}$  par seconde dans le fluide au repos.

Cette énergie est perdue dans la masse par les tourbillons qui y prennent naissance, même s'il s'agit d'un fluide se comportant, par ailleurs, comme un fluide parfait.

En d'autres termes, l'image que nous nous étions faite du phénomène ne peut subsister au-delà de la section  $BB$  (fig. 5), lorsqu'on la transpose du mouvement absolu au mouvement relatif.

La théorie hydrodynamique basée sur la notion du fluide parfait, ne peut évidemment introduire l'hypothèse du fluide parfait « qui tourbillonne », et c'est de là que vient son impuissance.

### § 3. — Cas du cylindre

La figure 6 correspond au cas du cylindre, dans l'hypothèse du flux fictif constitué d'éléments concentriques que nous pourrions substituer sans faire d'erreur au point de vue de la détermination

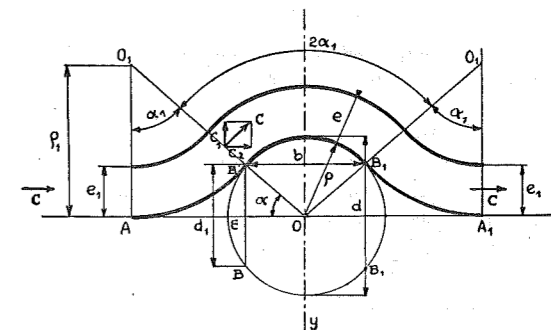


Fig. 6.

de la résistance  $2 F_1$ , au flux réel de même épaisseur  $2 e_1$  (fig. 1).

Pour autant que le flux ne décolle pas en  $B$ , on peut dire qu'il prendra la forme incurvée vers le bas, enveloppant l'arc  $BB_1$ , pour reprendre en  $B_1$  l'incurvation vers le haut et sortir en  $A$  avec la direction d'entrée.

En l'absence de toute perte (nous supposons les pertes par frottement négligeables), nous retrouverons nécessairement à la sortie, la vitesse d'entrée.

Ceci n'implique nullement une poussée nulle, car sur l'arc  $B_1 A_1$  de sortie, règne une dépression égale en valeur absolue, à la surpression avant.

Si nous imaginons à présent le cylindre remorqué avec une vitesse  $c$ , dans un fluide au repos, nous ne pourrions plus retrouver la même

image, même avec un fluide parfait; d'après ce que nous venons d'exposer au paragraphe précédent, la composante  $c_1$  sera perdue par tourbillonnement, et la vitesse relative redeviendra égale à  $c$ , l'ensemble de la masse fluide étant supposée au repos.

Revenant au cas de l'écoulement réel, tel qu'il se présente au tunnel, nous verrons au contraire au chapitre II que la composante  $c_1$  disparaît par tourbillonnement, en B, et que la composante  $c_2$  se maintient le long de l'arc  $BB_1$ , mais dans le régime turbulent seulement.

Dans le régime laminaire, il n'en est pas de même: la composante  $c_1$  ne disparaît pas et à peu de chose près, l'image fournie par la figure 6 correspond au cas concret de l'écoulement enveloppant parfait: la vitesse à la sortie est très voisine de la vitesse d'entrée et les mesures font apparaître une réaction totale  $2F_1$  égale au double de la réaction provoquée par la déviation d'entrée. A vrai dire, quand on y réfléchit, il ne pourrait en être autrement puisque toute apparition de tourbillons au point B aurait eu pour conséquence la destruction du régime laminaire que nous supposons, à priori, exister depuis l'entrée jusqu'à la sortie. Mais cette remarque fait comprendre aussi pourquoi il est impossible de transposer cette image au cas de l'obstacle remorqué, puisque en B, avec l'obstacle remorqué, la seule vitesse réelle est égale à  $c_1$  et elle ne peut que disparaître par tourbillonnements.

En d'autres termes, le régime laminaire observé au tunnel, ne pourrait jamais être reproduit dans le cas de l'obstacle remorqué.

Cette analyse du phénomène physique accompagnant l'écoulement du flux le long du cylindre étant cette fois complète, nous pourrions établir la valeur de  $2F_1$ , provenant de la seule déviation d'entrée, comme nous l'avions fait pour le dièdre.

Dans la zone morte règne la pression  $p$ :

$$p = \frac{\delta}{g} \frac{e_1}{\rho_1} c^2 \quad (11)$$

et la poussée  $2F_1$  est égale à:

$$2F_1 = (d_1 \times L) \frac{\delta}{g} \frac{e_1}{\rho_1} c^2 \quad (12)$$

ou:

$$2F_1 = \left( S \frac{\delta}{g} c^2 \right) \times C \quad (13)$$

avec:

$$C = \frac{d_1 e_1}{d \rho_1} \quad (14)$$

Nous ne reprendrons pas le calcul du travail  $\mathcal{E}$  qui conduit à la même formule qu'au paragraphe précédent, et nécessairement, à la même conclusion.

#### § 4. — Cas de la sphère

Le phénomène dû à la déviation du flux par la sphère apparaît plus compliqué; nous l'avons schématisé par la figure 7. On pourrait croire qu'il défie toute analyse; heureusement qu'en vertu du théorème de la quantité de mouvement appliqué entre l'entrée et le premier point d'inflexion, il suffit de connaître l'état du fluide en B pour pouvoir déterminer  $2F_1$ .

La figure 7 montre, pour une tranche d'angle au centre  $d\omega$ , comment l'élément d'entrée de

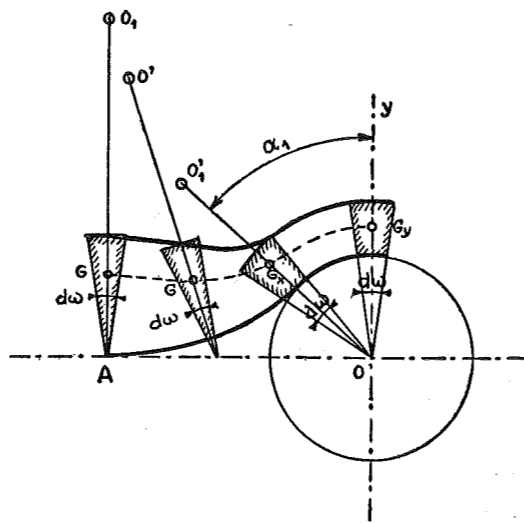


Fig. 7.

section triangulaire se déforme pour prendre en  $G_x$  la section trapézoïdale, section qui se maintiendra jusqu'en  $G_y$ , à une petite différence près.

En écrivant l'équation de continuité, nous pourrions déterminer  $e$  en fonction de  $e_1$  et de  $\alpha$ :

$$\frac{1}{2} e_1 \times e_1 d\omega = \left( \rho + \frac{e}{2} \right) \sin \alpha e d\omega$$

la vitesse  $c$  restant égale à la vitesse d'entrée, au point d'inflexion.

D'où:

$$e^2 + 2\rho e - \frac{e_1^2}{\sin \alpha} = 0 \quad (15)$$

Cela conduit à:

$$e = 0,34 \rho \text{ en } G_x \text{ pour } \alpha = 42^\circ,$$

$$e = 0,24 \rho \text{ en } G_y \text{ pour } \alpha = 90^\circ.$$

$e_1$  étant pris égal à  $0,73 \rho$  (1),  $\rho$  étant le rayon de la sphère.

(1) Nous justifierons ce facteur 0,73 par la suite § 6.

Comme on le voit, la trajectoire du centre de gravité n'est pas concentrique et la courbure est plus faible que  $\left( \rho + \frac{e}{2} \right)$  à partir de  $G_x$ .

Il est possible toutefois de se rendre compte par un calcul approché que cela n'implique qu'une différence de l'ordre de 1<sup>o</sup> ou 2<sup>o</sup> sur la position du point d'inflexion.

Si nous désignons par  $\rho_x$  le rayon de courbure au point d'inflexion, qui ne peut plus être égal à  $\rho_1$ , nous pourrions calculer  $p$ , que nous désignerons ici par  $p_r$ , puis  $2F_1$ :

$$p_r = \frac{\delta}{g} \frac{0,34 \rho}{\rho_x} c^2$$

$$2F_1 = \left( \frac{\pi d^2}{4} \frac{\delta}{g} c^2 \right) \times \frac{0,34 \rho}{\rho_x} \left( \frac{d_1}{d} \right)^2$$

La valeur de  $C$  pour la sphère que nous désignerons par  $C_r$ , aura donc pour valeur:

$$C_r = 0,34 \left( \frac{d_1}{d} \right)^2 \times \frac{\rho}{\rho_x} = 0,152 \frac{\rho}{\rho_x} \quad (16)$$

si on adopte le rapport  $\left( \frac{d_1}{d} \right) = \frac{2}{3}$ , dont nous justifions la valeur plus loin.

Le rapport  $\frac{\rho}{\rho_x}$  restant indéterminé, nous nous bornerons à établir, par la suite, le rapport qui existe nécessairement entre  $C_r$  et  $C$ , par la voie expérimentale.

Pour cela, nous pouvons déduire  $2F_1$  en fonction de  $p_r$  pour la sphère, en fonction de  $p$  pour le cylindre.

Le rapport  $\frac{C_r}{C}$  aura pour valeur le rapport de ces deux quantités, quand on introduit la condition:

$$(d \times L) = \left( \frac{\pi d^2}{4} \right)$$

c'est-à-dire l'égalité des sections au maître-couple.

On trouve ainsi:

$$\frac{C_r}{C} = \left( \frac{d_1}{d} \right) \frac{p_r}{p} \quad (17)$$

Nous verrons que l'on peut déduire des mesures des pressions relevées sur un méridien de la sphère (voir chap. III)  $\frac{p_r}{p} = 0,76$ .

#### § 5. — Cas du flux frappant obliquement une surface plane

Analysons d'abord le phénomène qui se produit lorsqu'on oriente un jet d'épaisseur  $e$  sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  sur la direction du jet (fig. 8).

Celui-ci doit se diviser en deux flux l'un d'épaisseur  $e'$ , l'autre d'épaisseur  $e''$ , orientés en sens opposés, et cela de telle façon que la pression qui règne dans la zone morte B, corresponde

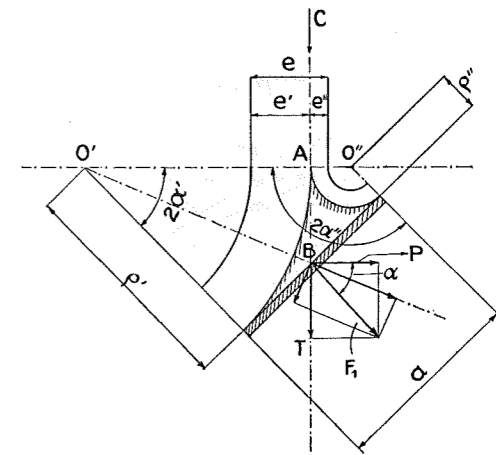


Fig. 8.

à la fois à la pression le long du filet intérieur orienté vers le bas, et à celle qui s'établit le long du filet intérieur orienté vers le haut, ce qui implique:

$$\frac{e'}{\rho'} = \frac{e''}{\rho''} = k_1' \quad (19)$$

En tenant compte de cette relation, nous pourrions calculer  $a$  et  $F_1$ :

$$\frac{e' + e''}{e'} = \frac{e}{e'} = \frac{\rho' + \rho''}{\rho'} = \frac{a}{\sin \alpha \rho'} \quad (20)$$

$$F_1 = aL \frac{\delta}{g} \frac{e'}{\rho'} c^2 = Le \frac{\delta}{g} c^2 \sin \alpha$$

ce qui conduit à la valeur de la composante  $P$  perpendiculaire à la direction du flux:

$$P = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta}{g} S c^2 \right) \frac{e}{a} \sin 2\alpha = \frac{1}{2} M c \sin 2\alpha \quad (21)$$

$S$  étant la surface du plan,  $M$  la masse déviée par seconde.

Cette dernière relation vraie pour les valeurs de  $\alpha$  supérieures à  $20^\circ$ , ne correspond pas aux valeurs observées pour les angles inférieurs à  $20^\circ$ .

En effet, à partir d'un angle tel que  $20^\circ$ , le phénomène change d'aspect: l'importance du flux d'épaisseur  $e''$  devient de plus en plus faible à mesure que  $\alpha$  diminue, au point qu'il arrive un moment où le rebroussement à l'entrée disparaît.

Les choses se passent alors comme il est indiqué figure 9, si l'on ne considère que l'épaisseur

$e_1$  du flux longeant le plan par la face orientée vers le bas.

Dans l'hypothèse où le flux aurait une épaisseur totale  $e = e_1 + e_2$ , le flux longeant la face opposée s'incurverait et se mettrait en dépression pour suivre celle-ci dans toute son étendue.

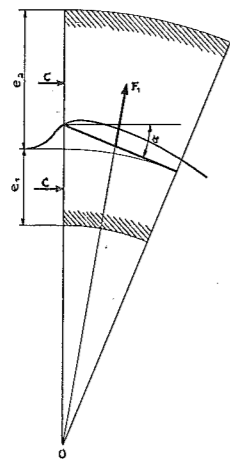


Fig. 9.

Pour nous débarrasser de la perturbation créée à l'entrée et dont nous apprécierons, dans la suite, la valeur <sup>(1)</sup>, nous supposons que le plan a été remplacé par une plaque courbe dont la tangente au bord d'entrée serait orientée dans la direction du flux (fig. 10).

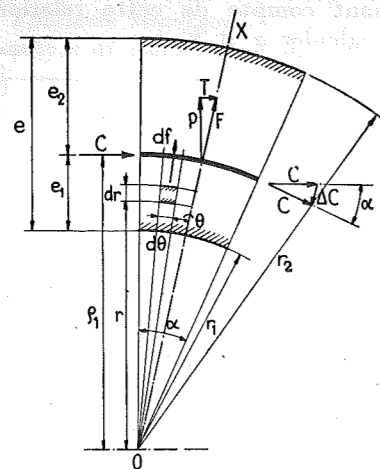


Fig. 10.

Utilisant, comme nous l'avons fait jusqu'ici, la notion du flux à filets concentriques qui conduit aux mêmes résultats au point de vue des réactions, que le flux réel, nous pourrions écrire, en nous référant au triangle des vitesses

<sup>(1)</sup> Voir le Chapitre IV consacré au maître-souple apparent.

à la sortie, fixant la variation  $\Delta C$  de la vitesse entre la sortie et l'entrée :

$$F = \left[ \frac{\delta}{g} (L \times e) c \right] \Delta c = \left[ \frac{\delta}{g} (L \times e) c \right] 2 c \sin \frac{\alpha}{2}$$

et :

$$P = F \cos \frac{\alpha}{2} = \left( \frac{\delta}{g} S c^2 \right) \frac{e}{a} 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

soit :

$$P = \left( \frac{\delta}{g} S c^2 \right) c_z \quad (20)$$

et :

$$T = \left( \frac{\delta}{g} S c^2 \right) c_x \quad (21)$$

avec :

$$c_z = k' \sin \alpha \quad (22)$$

$$c_x = 2 k' \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (23)$$

$k'$  étant mis pour :

$$k' = \frac{e}{a} \quad (24)$$

Lorsqu'on opère au tunnel avec une masse d'air pratiquement illimitée par rapport à la profondeur  $a$ , la continuité exige qu'un redressement à l'arrière se produise, dont les effets sont les suivants :

1) Redressement à l'arrière à partir de l'angle  $(\beta + \gamma)$  (fig. 11), l'angle de déviation depuis l'entrée jusqu'à la sortie, étant de ce fait ramené de  $\alpha$  à  $(\beta + \gamma)$ .

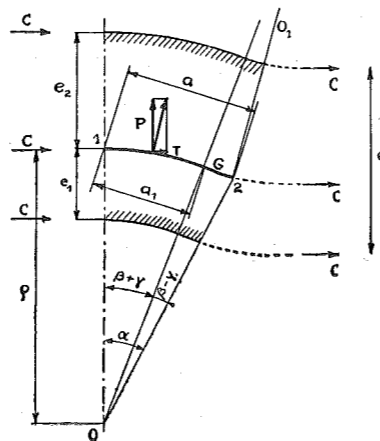


Fig. 11.

2) Action du flux redressé sur l'arc  $(\beta - \gamma)$ , qui, opposée à l'action  $F$ , réduit la valeur de  $P$  et la valeur de  $T$ , composantes de  $F$ , de telle façon que :

$$\left. \begin{aligned} c_z &= k' F(z) \sin \alpha \\ c_x &= 2 k' F(x) \sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right\} (25)$$

Les facteurs  $F(z)$  et  $F(x)$  sont des fonctions qui prennent une valeur constante pour un tracé déterminé de la « colonne vertébrale 1 G2 de l'aile ». Pour une aile à une seule courbure, quel que soit le tracé du profil, les expériences au tunnel montrent de façon indiscutable que :

$$k' = \pi \frac{k}{k + 0,8} \quad \text{et} \quad F(z) = 0,75$$

le facteur  $k$  représentant le rapport de l'envergure  $L$  à la profondeur  $a$  :

$$k = \frac{L}{a}$$

Pour une envergure infinie :

$$k' = \frac{e}{a} = \pi$$

Non seulement les formules établies en partant de la notion du flux à filets concentriques, se vérifient de la façon la plus formelle, mais tout se passe comme si l'épaisseur du flux était limitée à  $e$ ,  $\frac{e}{a}$  prenant la valeur  $\pi$  pour l'envergure infinie. De là, l'intérêt du procédé que nous avons employé jusqu'ici en examinant le cas d'un obstacle frappé par un flux d'épaisseur constante.

§ 6. — Conclusions

De la confrontation des résultats calculés aux résultats observés au tunnel, pour une vingtaine de profils choisis au hasard dans les catalogues des principaux laboratoires du monde, il résulte de la façon la plus certaine <sup>(1)</sup> que pour l'envergure infinie :

$$\frac{e}{a} = \frac{e}{\rho a} = \pi \quad (26)$$

Lorsque les angles de déviation  $(\beta + \gamma)$  dépassent  $21^\circ$ , nous avons vu que cette relation (26) doit être remplacée par la relation (19) :

$$\frac{e'}{\rho'} = k_1'$$

Pour calculer  $k_1'$ , nous avons simplement à appliquer la relation (26) en y introduisant  $\alpha = 2\pi \frac{21}{360}$  et en admettant que l'épaisseur du

<sup>(1)</sup> Voir l'étude publiée en 1947, dans l'ouvrage édité par Georges Thone, éditeur, et intitulé « Hommage de la Faculté des Sciences appliquées à l'Association des Ingénieurs sortis de l'Ecole de Liège », à l'occasion de son centenaire et dont nous reproduisons l'essentiel dans la Cinquième Partie.

flux qui suit la face concave est égale à  $\frac{1}{3}\pi$  (fig. 9) :

$$k_1' = \frac{e''}{\rho''} = \frac{1}{3}\pi \times 2\pi \frac{21}{360} = 0,365 \quad (27)$$

Ainsi sous le bénéfice de cette relation :

$$e_1 = \frac{1}{2} e_2 = \frac{1}{3} e \quad (28)$$

que nous admettons comme établie expérimentalement, nous allons être en mesure de fixer le rayon de l'arc d'approche utilisé dans les paragraphes précédents :

$$\frac{e_1}{\rho_1} = 0,365 \quad (29)$$

Le fait qu'au moyen de cette relation dont nous venons d'indiquer la source, tous les résultats calculés sont conformes aux résultats observés, nous permet de regarder comme une relation générale, la valeur (29).

CHAPITRE II

VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DES VALEURS DE C

POUR LE CYLINDRE ET POUR LA SPHÈRE

Nous voudrions nous attarder à l'étude expérimentale du coefficient de résistance  $C$  pour le cylindre et pour la sphère; nous y trouverons non seulement une confirmation irrécusable de la valeur de la méthode utilisée ici pour établir la relation théorique (14) :

$$C = \frac{d_1}{d} \frac{e_1}{\rho_1}$$

mais nous serons en mesure de faire apparaître le phénomène de la déviation sous son vrai jour, non seulement pour la face avant mais pour la face arrière. Nous montrerons que la superposition des deux images que l'on se fait, l'une se rapportant à l'obstacle immobile dans un flux de vitesse  $c$ , l'autre à l'obstacle remorqué avec une vitesse  $c$  dans un flux au repos, ne peuvent coïncider complètement.

§ 1. — Cas du cylindre en régime turbulent

Utilisons d'abord à cette fin, le résultat des mesures de pression effectuées sur un méridien de la sphère, en régime turbulent.

Nous avons reproduit (fig. 12), en trait fort, la courbe expérimentale tracée en fonction de  $\alpha$ , de la pression relevée sur un méridien de la sphère, les points en blanc correspondant aux valeurs observées.

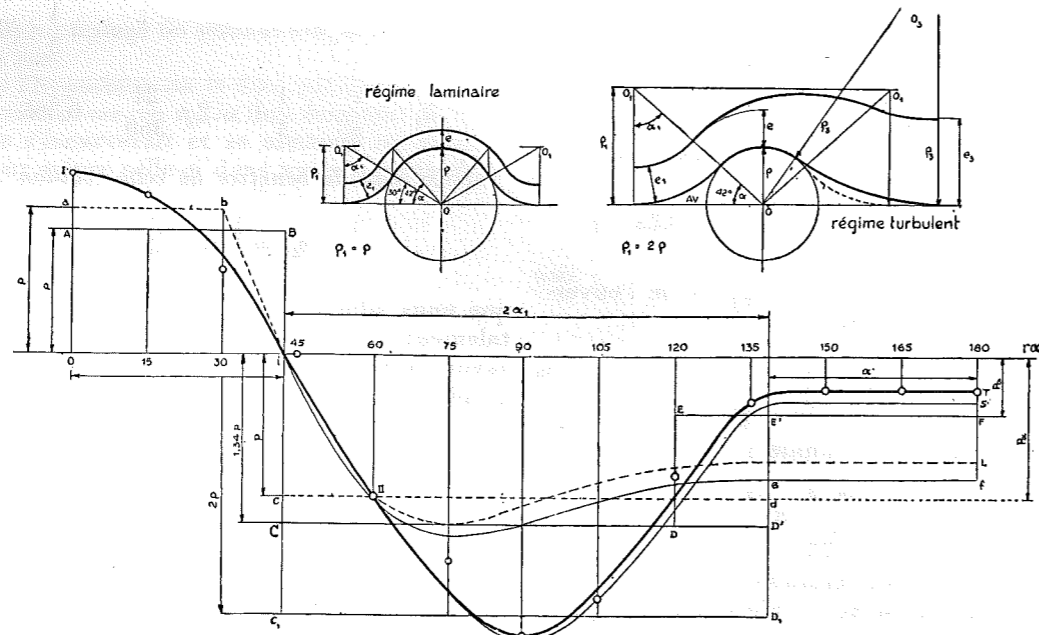


Fig. 12.

Nous avons effectué ce tracé en tenant compte de la manière la plus correcte de tous les points.

Cette courbe coupe l'axe des abscisses pour l'angle de 42°, elle passe par un maximum pour l'angle de 90° et tombe ensuite à une valeur constante très faible, à partir de 135°.

La courbe en trait faible qui s'écarte peu de la première, et dans la partie arrière seulement, représente selon nous, la courbe qui serait observée si l'on pouvait faire abstraction de tout frottement sur la calotte sphérique définie par les angles 42° et 135°.

La courbe en trait pointillé à partir de l'angle 42°, est relative au régime laminaire, la première partie se confondant avec la courbe du régime turbulent. A partir du point II, cette courbe s'écarte totalement de celle-ci et aboutit en L, au lieu d'aboutir en r.

Nous montrerons plus loin pourquoi il doit en être ainsi.

Les documents que nous possédons montrent que le diagramme de la figure 12 vaut pour le cylindre comme pour la sphère. Pour la partie allant de l'entrée au point d'inflexion, il en est rigoureusement ainsi. Si pour l'arrière, il existe certains relevés qui paraissent légèrement en contradiction avec cette hypothèse, nous ferons observer que les mesures faites au tunnel sur le cylindre peuvent être entachées d'erreurs systématiques du fait que celui-ci n'est jamais d'envergure infinie, alors que celles effectuées sur la sphère échappent à toute suspicion à cet égard.

On peut ajouter qu'une certaine instabilité de régime règne dans la zone comprise entre les deux points d'inflexion, et que pour rendre la

comparaison valable, il faudrait que les relevés aient été faits sur la sphère et sur le cylindre, strictement dans les mêmes conditions, avec le même flux, au même tunnel.

Utilisant les documents expérimentaux ainsi présentés, nous allons transposer la courbe du mouvement turbulent de la figure 12 dans un diagramme où les abscisses ne seront plus représentées par  $\alpha$  mais pour  $\sin \alpha$  (fig. 13) et nous allons regarder cette courbe comme valable pour le cylindre.

L'aire limitée par la courbe Ii, divisée par la valeur de l'abscisse  $Oi$ , donnera la valeur de  $p$ , tirée des formules (11) et (12), puisque (voir fig. 2) :

$$p = \frac{F_1}{L \frac{d_1}{2}} = \int_0^\alpha p \cos \alpha d\alpha = \int_0^\alpha p d(\sin \alpha); \quad (30)$$

nous pourrons en déduire, en appliquant la formule (11) :

$$\frac{e_1}{\rho_1} = \frac{p}{\delta/g c^2}$$

puis la valeur de :

$$C_{AV} = \frac{d_1}{d} \times \frac{p}{\delta/g c^2} \quad (31)$$

La valeur de  $C_{AV}$  indiquée par les expérimentateurs est égale à 0,250. En utilisant le rapport  $\frac{e_1}{\rho_1} = 0,365$  justifié au paragraphe précédent,

nous obtenons directement par le calcul, en appliquant la formule (14) :

$$C_{AV} = 0,365 \times \frac{2}{3} = 0,245 \quad (32)$$

Cette identité des deux valeurs, observée et calculée, montre ce que l'on peut tirer de la méthode exposée ici, car les « coïncidences » de cette nature vont se multiplier.

Nous concluons donc que le passage du régime laminaire au régime turbulent est caractérisé par :

$$\rho_1 = 2 \rho,$$

alors que la relation établie théoriquement :

$$\rho_1 = \rho,$$

reste valable pour le régime laminaire.

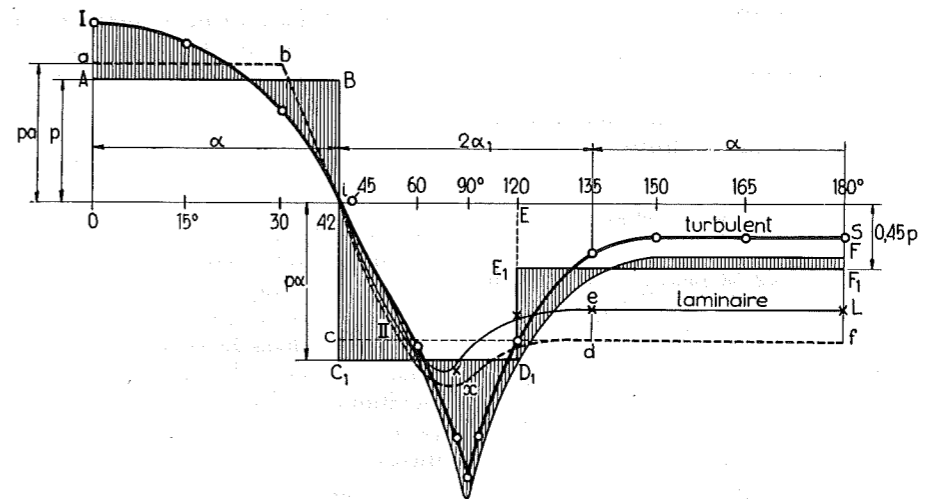


Fig. 13.

Nous avons trouvé expérimentalement que le point d'inflexion se présentait pour l'angle de 42°.

En admettant que pour le régime turbulent, la loi de continuité soit donnée par la relation (26), nous pourrions écrire :

$$\rho_1 \alpha_1 = \rho \times 2 \alpha_1$$

soit :

$$\rho_1 = 2 \rho.$$

Cette relation conduit dans le cas du cylindre à :

$$\rho_1 = (\rho_1 + \rho) \sin \alpha = 1,5 \rho_1 \sin \alpha \quad (33)$$

soit :

$$\sin \alpha = 0,666 \text{ et } \alpha = 42^\circ.$$

Cette correspondance des deux valeurs n'a été obtenue toutefois qu'en considérant la relation (26) comme s'appliquant au cas du cylindre pour lequel l'angle  $\alpha$  de déviation dépasse pourtant 20°. Disons que nous admettons ce fait, et ce sera le seul, comme une constatation expérimentale.

Pour l'écoulement laminaire, au contraire, les relevés expérimentaux ne pourraient s'expliquer sans tenir compte de la relation (19).

Poursuivons l'analyse des faits observés au-delà du premier point d'inflexion, et tout d'abord entre les deux points d'inflexion.

La dépression théorique  $p$ , si la vitesse  $c$  se maintient, sera le double en valeur absolue de la surpression avant, puisque  $e = e_1$  et  $\rho_1 = 2 \rho$ ,

$$p = \frac{\delta}{g \rho} e c^2 = 2 \left( \frac{\delta}{g \rho_1} e_1 c^2 \right) \quad (34)$$

En réalité, par suite de la disparition de la composante  $c_1$  par tourbillons en B (fig. 6), la vitesse  $c$  est ramenée à la composante  $c_2$  :

$$c_2 = c \cos \alpha_1 = c \sin \alpha = 0,666 c.$$

Pour rester dans nos possibilités d'analyse, imaginons que la vitesse  $c_2$  apparaisse, avec sa valeur ci-dessus, dès le point B et se maintienne constante le long de l'arc  $BB_1$  : la pression réelle  $p_\alpha$  pourra s'évaluer par la relation :

$$-p_\alpha = \frac{\delta}{g \rho} e_2 c_2^2 = \frac{\delta}{g} c^2 0,666^2 \frac{e_1}{\rho} = 1,33 \frac{\delta}{g} c^2 \frac{e_1}{\rho_1} \quad (35)$$

puisque la continuité exige :

$$e_2 c_2 = e_1 c.$$



Cela conduit à :

$$p_\alpha = -1,33 p \quad (36)$$

La dépression théorique le long de l'arc  $BB_1$ , est donc représentée, sur la figure 13, par la droite  $C_1D_1$ .

Théoriquement, la droite  $C_1D_1$  devrait se prolonger tout le long de l'arc  $2\alpha_1$ ; mais l'arc de fuite ne peut plus être égal à l'arc d'approche puisque la continuité exige que (fig. 12, au-dessus)

$$e_3 = e_2 = \frac{1}{0,666} e_1 = 1,5 e_1 \quad (37)$$

Pour l'arc de fuite, nous devons donc utiliser le rayon  $\rho_3$  (fig. 12, dessin de droite) :

$$\rho_3 = \frac{e_3}{0,365} = \frac{1,5 e_1}{0,365} = 1,5 \rho_1$$

Nous en déduisons que la pression le long de cet arc est égale à :

$$p_3 = \frac{\delta}{g} c_3^2 \frac{e_3}{\rho_3} = \frac{\delta}{g} c_2^2 \frac{e_1}{\rho_1} \frac{1}{0,666^2} = 0,45 p \quad (38)$$

étant donné que  $\frac{e_3}{\rho_3} = \frac{e_1}{\rho_1}$  et que  $c_3 = c_2 = 0,666 c$ .

Nous pourrions également calculer  $\alpha_3$ , puisque :

$$\rho_3 = (\rho + \rho_3) \cos \alpha_3 = 1,5 \rho_1.$$

Comme  $\rho$  est égal à  $\frac{1}{2} \rho_1$ ,  $\cos \alpha_3 = \frac{1,5}{2} = 0,75$  soit  $\alpha_3 = 41^\circ$ .

Que peut-on déduire du diagramme expérimental à cet égard ? En utilisant la courbe expérimentale en trait fort de la figure 13, corrigée pour tenir compte des pertes par frottement sur l'arc  $BB_1$  (courbe en trait faible), on pourra calculer la pression moyenne en déterminant le rectangle équivalent à l'aire limitée par la courbe expérimentale s'étendant de  $i$  à  $E$ . On verra ainsi que le rectangle  $iC_1D_1E_1E$  vaut l'aire comprise entre les points d'abscisse  $i$  et  $E$  de la courbe expérimentale, et que  $p_\alpha$  ainsi trouvé, est bien égal à la valeur calculée ci-dessus,  $1,33 p$ .

Pour ce qui concerne l'angle calculé  $\alpha_3$ , on voit sur la figure 13 qu'il n'atteint que  $30^\circ$  et non  $41^\circ$ , puisque :

$$(90^\circ + \alpha_3) = 131,$$

et que le point d'abscisse  $E$  correspond à  $120^\circ$ .

Il ne faut pas s'attendre évidemment à une véritable superposition de toutes les valeurs calculées et observées, étant donné que le tracé de la courbe expérimentale a dû être corrigé pour tenir compte du terme frottement.

Si nous traçons, à présent, la droite  $E_1F_1$  horizontale définissant le rectangle équivalent

pour l'arc de sortie, nous voyons qu'elle se superpose d'une façon plus que satisfaisante avec celle calculée (relation 38)

$$p_\alpha = 0,45 p.$$

Cette coïncidence ne s'est produite toutefois que parce que nous avons admis qu'au second point d'inflexion, la composante  $c_2$  (fig. 2) n'était pas absorbée par les tourbillons, comme cela s'était produit au premier point d'inflexion.

Cela est parfaitement possible dans le cas de l'écoulement le long de l'obstacle au repos : l'énergie perdue par kilog de fluide écoulé, est représentée par :

$$\frac{1}{2g} (c^2 - c_3^2) = \frac{1}{2g} c_1^2 \quad (40)$$

c'est-à-dire égale à celle qui est dissipée par tourbillons au premier point d'inflexion.

En est-il toujours ainsi ? Nous ne pourrions le dire, mais ce qui est certain, c'est que dans le cas de l'obstacle remorqué, il ne peut en être ainsi : la perte de la composante verticale est inévitable, ce qui conduit à la conclusion : qu'il ne peut y avoir superposition des deux images :

a) Celle représentant le corps au repos enveloppé du flux de vitesse  $c$ .

b) L'autre représentant le corps remorqué avec une vitesse  $c$ , dans un flux au repos.

Nous avons été amené à aller plus loin dans cette affirmation, en faisant cette remarque que la vitesse relative le long de l'arc  $BB_1$ , dans le cas du corps remorqué, reste évidemment égale à  $c$  puisqu'il s'agit ici de la vitesse relative, malgré la disparition de l'énergie apparue et perdue par tourbillons au point  $B$ .

Dans ces conditions, pour l'obstacle remorqué, le point  $B_1$  est le symétrique de  $B$ , par rapport à la verticale  $OY$ , et la perte d'énergie à l'arrière, est strictement égale à la perte d'énergie à l'avant.

Le lecteur ne s'étonnera pas si nous lui disons que nous avons eu quelque peine à nous arrêter à ces conclusions qui paraissent en contradiction avec ce qui est admis généralement. Pour nous, elles apparaissent, à présent, tout à fait évidentes.

## § 2. — Etude de la sphère en régime turbulent

Tout ce que nous venons de dire, se rapporte au cylindre; les conclusions restent-elles les mêmes pour la sphère ?

Pour le montrer, nous avons transposé la courbe de la figure 12, en partant en abscisse, non plus  $\sin \alpha$  mais  $\sin^2 \alpha$  (fig. 14).

En effet, si nous voulons que les aires délimitées par la courbe expérimentale donnent les

valeurs de  $p$ , il faut que nous tenions compte ici de la relation :

$$P = \frac{dF_1}{\frac{1}{2} \left(\frac{d_1}{2}\right) \left(\frac{d_1}{2}\right) d\omega} = \int_0^\alpha 2 p \cos \alpha \sin \alpha d\alpha = \int_0^\alpha p d(\sin^2 \alpha) \quad (40)$$

La figure 14 donne les résultats de cette transposition et fait voir les mêmes concordances

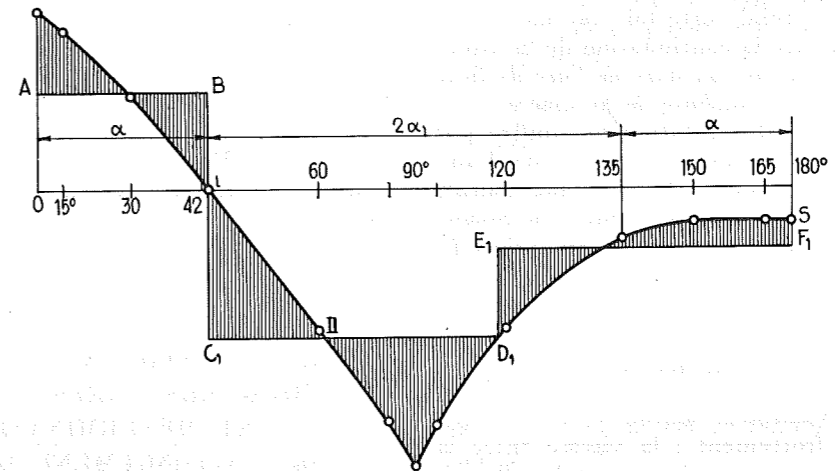


Fig. 14.

entre les valeurs observées et calculées que pour le cylindre, et cela pour les trois secteurs  $AB$ ,  $C_1D_1$ ,  $E_1F_1$ .

L'angle correspondant au deuxième point d'inflexion est approximativement le même.

La valeur de  $C_{AV}$  indiquée par les expérimentateurs pour la sphère, est égale à 0,120. Or, si nous faisons le rapport des ordonnées moyennes pour le cylindre et pour la sphère, en se limitant à la partie avant, on trouve 0,76.

Comme nous avons établi (formule 17) le rapport :

$$\frac{C_r}{C} = \left(\frac{d_1}{d}\right) \times \frac{Pr}{P}, \quad (41)$$

on peut voir que la valeur de  $C_r$  ressort à :

$$C_r = 0,244 \times \frac{2}{3} \times 0,76 = 0,123.$$

Nous pourrions multiplier les concordances, en comparant les coefficients partiels de traînée mesurés et calculés, en partant des résultats mis en diagramme pour la sphère et pour le cylindre.

## § 3. — Cas du cylindre en régime laminaire

Examinons les relevés opérés en régime laminaire et cherchons à donner une explication physique de l'allure radicalement différente des

courbes de pression  $p$ , relevées dans les deux régimes.

Reprenons le tracé de l'arc d'approche, en tenant compte cette fois de la relation de continuité (19) qui impose ici l'égalité de  $\rho_1$  et de  $\rho$  :

$$\rho_1 = \rho.$$

Le point de tangence de l'arc d'approche correspondra donc à  $30^\circ$ , puisque :

$$\rho_1 = (\rho_1 + \rho) \sin \alpha = 2 \rho_1 \sin \alpha \quad (42)$$

Comme le point de nulle pression observé, est à  $42^\circ$  dans un cas comme dans l'autre, il faut qu'entre  $30$  et  $42^\circ$  (fig. 12, au-dessus), le point d'inflexion se déplace de filet à filet, si bien que le diagramme théorique de  $p$  n'est plus donné (fig. 13) par une droite  $AB$ , mais par une horizontale  $ab$ , suivie d'une droite plongeante  $bi$ ; la surface de l'aire comprise entre  $abi$  et celle comprise entre  $ABi$ , doivent être égales, puisque la courbe expérimentale de  $p$  est la même pour le régime laminaire que pour le régime turbulent, jusqu'au premier point d'inflexion. Cela conduit à une ordonnée  $oa$  égale à  $1,22 p$ .

Avec cette interprétation, il n'existe plus de contradiction, il suffit d'admettre que dans le régime laminaire la loi de continuité est donnée par la relation (19) avec un coefficient  $k_1'$  égal à 0,445 (et non 0,365 puisque les pressions  $p$  moyennes sur l'axe de  $30^\circ$  sont dans le rapport des ordonnées  $\frac{Oa}{OA} = 1,22$ ). Nous traduirons ce

fait expérimental en disant que quand on passe du régime laminaire au régime turbulent, l'épaisseur  $e_1$  du flux influencé passe de  $0,445 \rho$  à  $0,730 \rho$ .

Cette vue qui pourrait paraître arbitraire, trouve sa confirmation dans le fait que sur l'arc compris entre les deux points d'inflexion, on retrouve (fig. 13), pour pression moyenne, la droite  $cd$  dont l'ordonnée  $ic$  est égale à  $oa$ .

En effet, la courbe  $iIIxL$  qui relie les points expérimentaux marqués par une croix, doit être remplacée par une courbe telle que  $iIIxdf$ , le frottement ayant eu pour conséquence de réduire la vitesse d'écoulement le long de la calotte sphérique délimitée par les points d'inflexion, et partant de réduire la dépression; en d'autres termes, si le frottement n'avait pas existé la courbe relevée expérimentalement aurait été plus haute, la différence des ordonnées  $of$  et  $oL$  mesurant la perte de pression due au frottement.

La droite  $df$  qui donne la dépression sur l'arc de fuite et qui s'étend cette fois sur un arc de  $(180^\circ-135^\circ)$  doit être la continuation de la droite  $cd$  puisque le rayon de courbure de l'arc de fuite est égal au rayon de courbure de la sphère.

Pour que cette interprétation ne souffre pas de contradiction, il faut toutefois que l'aire comprise entre la courbe  $IIxd$  et l'horizontale  $II'd$  soit égale à l'aire comprise entre la courbe en trait faible pointillée  $iII$  et l'horizontale  $cII$ ; et c'est ce que l'on constate d'une manière très satisfaisante.

#### § 4. — Conclusions

Ainsi dans l'écoulement laminaire, il n'y a que des pertes par frottement : la vitesse entre la sortie et l'entrée ne varie qu'en raison de celles-ci. En fait, la dépression arrière est très voisine de la surpression avant, si bien que la traînée totale est pratiquement le double de la traînée résultant de la face avant.

Dans l'écoulement turbulent, au contraire, les pertes par frottement sont négligeables vis-à-vis des pertes par tourbillons, si bien que la dépression arrière n'est que les  $\frac{3}{10}$  de la surpression avant.

Le passage du régime laminaire au régime turbulent correspond à une modification de l'arc d'approche qui passe brusquement de :

$$\rho_1 = \rho \text{ à } \rho_1 = 2\rho,$$

tandis que l'épaisseur du flux influencée passe elle de :

$$e_1 = 0,445\rho \text{ à } e_1 = 0,730\rho$$

Lorsqu'il s'agit de l'obstacle remorqué :

1) Le régime laminaire ne peut exister; dans ce cas, en effet, l'énergie apparue au premier point d'inflexion B, doit nécessairement disparaître par tourbillons et le fait de cette disparition par tourbillons supprime la possibilité du régime laminaire.

2) Dans le régime turbulent, la composante  $c_1$  de la vitesse au premier point d'inflexion disparaît par tourbillons, comme dans le cas de l'obstacle au repos : les deux images du phénomène

sont superposables en ce point B; il n'en est plus de même au second point d'inflexion  $B_1$  puisque la vitesse  $c$  qui est cette fois une vitesse relative, est la même qu'en B,  $B_1$  étant symétrique de B, par rapport à OY (fig. 2).

Comme nous l'avons déjà souligné, il ne peut y avoir identité entre les résultats obtenus au tunnel et les résultats que l'on obtiendrait si l'on opérait expérimentalement en remorquant l'obstacle.

Toutefois, si le carénage du cylindre est bien réalisé et si l'allongement est aux environs de l'allongement optimum, la différence entre ces résultats est relativement très faible, comme on pourra s'en rendre compte par l'exposé du chapitre suivant.

Le carénage a pour effet de réduire la composante  $c_1$  et d'autant plus que l'allongement, c'est-à-dire le rapport de la longueur à l'épaisseur, est plus grand.

### CHAPITRE III

#### ÉTUDE DU COEFFICIENT DE RÉSISTANCE C POUR LES CORPS CARÉNÉS ET DÉTERMINATION DE L'ALLONGEMENT OPTIMUM

##### § 1. — Cas du cylindre

Si nous carénons le cylindre comme il est indiqué figure 15, la traînée de profil sera considérablement réduite par rapport à celle du cylindre enveloppé.

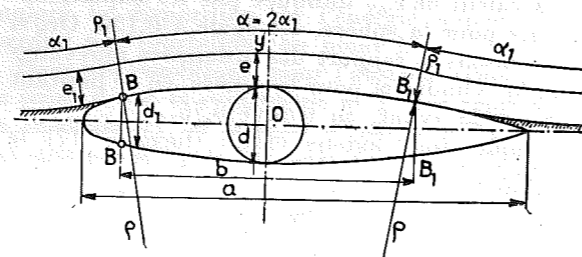


Fig. 15.

Pour déterminer le coefficient de traînée totale C, il faudra tenir compte des frottements.

Étudions d'abord le premier terme dû à la déviation.

Comment déterminer  $d_1$ ? En appliquant la condition de continuité, comme nous l'avons fait pour l'étude du cylindre; nous écrirons :

$$\rho_1 \alpha_1 = \rho \times 2 \alpha_1$$

soit :

$$\rho_1 = 2\rho.$$

L'arc d'approche étant déterminé, la valeur de  $d_1$  s'en suivra, car il est facile d'établir qu'à l'égalité  $\rho_1 = 2\rho$ , correspond la relation :

$$d_1 = \frac{2}{3}d \quad (44)$$

Lorsqu'on envisage le cas de l'obstacle remarqué, nous avons vu que l'on devait admettre une symétrie du phénomène avant et arrière, ce qui revient à dire qu'il suffira de doubler l'effort calculé pour la face avant, pour obtenir la résistance totale due à l'obstacle.

Pour le cas de l'obstacle immobile, nous pouvons dire qu'il n'y aura qu'une erreur négligeable en procédant ainsi, tout au moins aux environs de l'allongement optimum.

Dans ces conditions, nous pourrions écrire :

$$T_1 = 2(d_1 \times L) \frac{\delta}{g} c^2 \frac{e_1}{\rho_1} \quad (45)$$

pour l'effort total de déviation, et

$$T_2 = 2k(bL) \delta c^2 \quad (46)$$

pour l'effort de frottement,  $k$  étant le coefficient de proportionnalité dont nous donnerons la valeur dans la Troisième Partie.

La valeur de l'effort total, en fonction de la section S au maître-couple, peut donc s'écrire :

$$T = \left(\frac{\delta}{g} Sc^2\right) \left[2\left(\frac{d_1}{d}\right) \frac{e_1}{\rho_1} + 2gk\left(\frac{b}{d}\right)\right] \quad (47)$$

Cet effort total apparaît donc comme déterminé en fonction de deux coefficients  $C_1$  et  $C_2$  :

$$C_1 = \frac{4}{3} \frac{e_1}{\rho_1} \quad (48)$$

$$C_2 = 2gk \frac{b}{d} \quad (49)$$

Calculons ces valeurs en fonction de l'allongement  $\frac{1}{m}$  :

$$\frac{1}{m} = \frac{a}{d} = \frac{bx}{d} \quad (50)$$

en désignant par  $x$  le rapport de la longueur totale  $a$  à la longueur de la corde  $b$ .

Nous verrons que ce coefficient peut varier de 1,3 à 2,00, pour les tracés destinés à fournir des ailes travaillant loin de la vitesse du son; pour des vitesses voisines de la vitesse du son, nous verrons que  $x$  doit rester aussi faible que possible, pratiquement 1,3 à 1,4.

Comme on peut établir que :

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{3} \frac{d}{b^2} \quad (51)$$

et que  $e_1$  est donné par la relation (24) :

$$e_1 = 0,365 \rho_1 = 0,365 \times 2\rho.$$

$2\rho$  étant représenté ici par  $d$ , soit :

$$e_1 = 0,365 d \quad (52)$$

il viendra :

$$C = \frac{8}{9} \times 0,365 (mx)^2 + 2k_1'' \frac{1}{mx} \quad (53)$$

$2gk$  étant remplacé par  $2k_1''$  pour tenir compte des notations utilisées dans la Troisième Partie.

Cette valeur passe par un minimum pour l'allongement :

$$\left(\frac{1}{mx}\right)_1 = \sqrt[3]{\frac{2 \times 8/9 \times 0,365}{2k_1''}} = 6,15 \quad (54)$$

si l'on adopte pour  $2k_1''$  la valeur 0,00278 qui correspond pour les surfaces lisses, à un coefficient de Reynolds <sup>(1)</sup> :

$$Re = 2 \times 10^6 \quad (56)$$

Nous avons tracé (fig. 16), le diagramme des valeurs calculées de C pour les valeurs de  $\frac{1}{m}$  allant jusqu'à la valeur minimum 8 en admettant  $x = 1,30$ .

Nous avons indiqué en abscisses, les échelles convenant à  $x = 1,70$  et  $x = 2,00$ .

Si nous voulons prolonger la courbe au-delà de  $\frac{1}{m} = 8$ , nous devons observer qu'à partir de ce

minimum, l'épaisseur du flux dévié  $e_1$  n'est plus commandée par l'épaisseur au maître-couple de l'obstacle, représenté ici par  $d$  (relation 52), mais grandit proportionnellement à la profondeur  $b$ , c'est-à-dire suivant la loi générale :

$$\frac{e_1}{\rho_1 \alpha_1} = \frac{e_1}{2\rho \alpha} = \frac{e_1}{b} = \frac{e_1 d}{d b} = 0,365 (mx)_1 = 0,06 \quad (57)$$

Ainsi à partir de  $\frac{1}{m} = 8$  ( $x$  étant pris égal à 1,3)

$$e_1 = 0,06 b = 0,06 \frac{a}{x} \quad (57)$$

c'est-à-dire que  $e_1$  grandit comme  $b$ .

La seconde partie de la courbe I de la figure 16 a été tracée en utilisant cette relation qui donne à C la valeur :

$$C = \frac{8}{9} \times 0,365 (mx)_1 mx + \frac{2k_1''}{mx} \quad (58)$$

<sup>(1)</sup> Pour des vitesses de l'ordre de 30 m.sec, avec  $L = 1,00$  m;  $\delta = 1,22$ ;  $\mu_a = 1,85 \times 10^{-4}$  (système C.G.S.)

$$Re = 10 \frac{1,22 \times 30 \times 1,0}{1,85 \times 10^{-4}} = 2 \times 10^6.$$

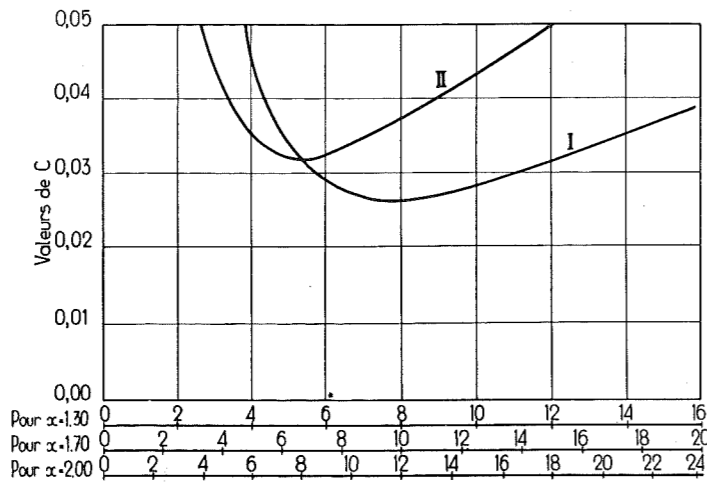


Fig. 16.

**Remarque I.** — La valeur de  $(mx)_1$  dépend de  $2k''_1$  qui lui est fonction du coefficient de Reynolds et du coefficient de rugosité. De ce fait, le coefficient de résistance C ne dépend pas seulement de  $R_e$  par le second terme, mais dans une certaine mesure par le premier terme : l'épaisseur de la couche influencée grandit avec la rugosité, ce qui est conforme à ce que l'on connaît.

**Remarque II.** — La valeur de  $e_1$  donnée par la relation (57) pour l'allongement optimum (qui est réalisé sensiblement pour la valeur  $2\alpha_1 = 20^\circ$ ) (fig. 15) peut à la suite d'une perturbation profonde dans la couche influencée, passer à la valeur :

$$e_1 = 0,365 \rho_1 = \frac{0,730 \times \rho \alpha}{\alpha} = \frac{0,730}{20 \frac{2\pi}{360}} \times \rho \alpha$$

soit :

$$e_1 = 2,09 \frac{a}{x} \quad (59)$$

Dans ces conditions, la relation (58) peut se déduire directement de l'équation (47) :

$$C = \frac{4}{3} \times 2,09 \frac{a}{x} \frac{1}{\rho_1} + 2k''_1 \left(\frac{b}{d}\right)$$

En utilisant l'équation (51), il vient avec les notations adoptées :

$$C = \frac{8}{9} \times 2,09 mx + 2k''_1 \frac{1}{mx} \quad (60)$$

Nous verrons dans la Deuxième Partie qu'aux environs du mur du son, la valeur de C est donnée par cette relation (60). Le terme correspondant à la résistance de frottement étant resté le même, le terme relatif à la déviation devient prépondérant et l'on peut conclure que

l'aile la plus mince est l'aile la meilleure aux environs du mur du son.

### § 2. — Cas de la sphère

En suivant la même méthode, nous pourrions trouver le coefficient de traînée pour les solides de révolution :

$$C_r = \frac{16}{27} \times 0,76 \times 0,365 (mx)^2 + 2 \frac{2k''_1}{mx} \quad (61)$$

pour la partie descendante de la courbe II,

$$C_r = \frac{16}{27} \times 0,76 \times 0,365 (mx)_1 (mx) + 2 \frac{2k''_1}{mx} \quad (62)$$

pour la partie montante de la courbe II (fig. 16).

Le coefficient 0,76 a été introduit pour tenir compte du facteur de réduction mis en évidence dans la formule (41),  $(mx)_1$  représentant la valeur correspondant à l'allongement optimum.

## CHAPITRE IV

### COEFFICIENT DE RÉSISTANCE $C_a$ DU AU MAÎTRE-COUPLE APPARENT

#### § 1. — Détermination de $\gamma/\beta$

Nous limiterons la recherche au cas simple de l'aile courbe à une seule courbure, bien qu'il soit possible de traiter le cas plus général d'un profil parabolique.

Lorsque l'aile se présente avec un angle d'attaque nul, comme c'est le cas figure 17, l'angle que fait la corde avec la direction du flux  $c$ , est généralement désigné par  $\gamma$ .

Pour cette position de nulle portance, une résistance supplémentaire apparaît, due au

maître-couple apparent, dont la section a pour valeur  $L \times h$ .

Tout le calcul qui va suivre est basé sur la valeur expérimentale  $\gamma/\beta = \frac{1}{2}$ ; cette valeur ressort pour nous des expériences de Riabouchinsky et d'Eiffel sur des plaques minces, de

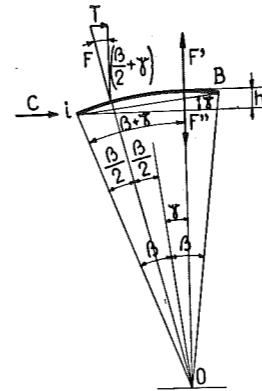


Fig. 17.

Naca sur un profil caréné; nous montrerons pour le surplus, à la fin de ce paragraphe, en écrivant les conditions d'équilibre de l'aile, qu'il en est bien ainsi.

Nous avons porté en abscisse, figure 18, les valeurs de  $\beta$  et en ordonnées les rapports  $\frac{\gamma}{\beta}$ . Les points blancs se rapportent aux plaques minces

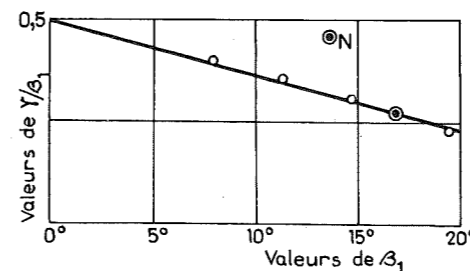


Fig. 18.

de Riabouchinsky dont les angles  $2\beta$  sont respectivement de  $16^\circ, 22\frac{1}{2}^\circ, 29^\circ, 38^\circ$  pour les rapports  $\frac{f}{a}$  de la flèche à la profondeur  $a$ , de  $\frac{1}{30}, \frac{1}{20}, \frac{1}{16}, \frac{1}{12}$ .

Le point noir entouré d'un cercle se rapporte à l'essai d'Eiffel.

Comme on le voit, la courbe passant par l'ensemble des points est une droite qui, prolongée jusqu'à l'axe des ordonnées, conduit à la valeur limite  $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{2}$ . C'est la valeur qui correspond à l'abscisse  $\beta = 0$ , c'est-à-dire  $f/a = \infty$  qui définit le plan.

Ceci veut dire :

1° que les formules établies pour les plaques courbes vaudront à la limite pour le plan, à la condition d'y faire  $\gamma/\beta = \frac{1}{2}$ .

2° qu'en l'absence de toute perturbation à l'entrée comme c'est nécessairement le cas pour le plan mince dans la position de nulle portance, la valeur de  $\frac{\gamma}{\beta}$  reste constamment égale à  $\frac{1}{2}$ .

Cette dernière conclusion s'appuie en outre sur le fait que le point de Naca pour un profil à simple courbure caréné, se trouve pratiquement sur la droite horizontale passant par l'ordonnée  $\frac{1}{2}$  et aussi sur cet autre fait qu'en appliquant aux forces en jeu, l'égalité des moments, on établit que  $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{2}$  comme nous le verrons plus loin.

Le dessin de la figure 17 a donc été exécuté dans l'hypothèse  $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{2}$ . La valeur de  $h$ , hauteur au maître-couple, apparaît comme égale à :

$$h = \rho [1 - \cos(\beta + \gamma)] = 2\rho \sin^2 \frac{\beta + \gamma}{2} \quad (63)$$

Si nous voulons connaître les pressions qui règnent sur les deux faces de l'aile, nous suivrons la méthode que nous avons appliquée pour l'étude du maître-couple. Nous tracerons l'arc d'approche en adoptant  $\rho_1 = 2\rho$ , le centre  $O_1$  étant situé sur la perpendiculaire à la direction générale du flux  $XX$  parallèle à la vitesse  $c$  (fig. 19).

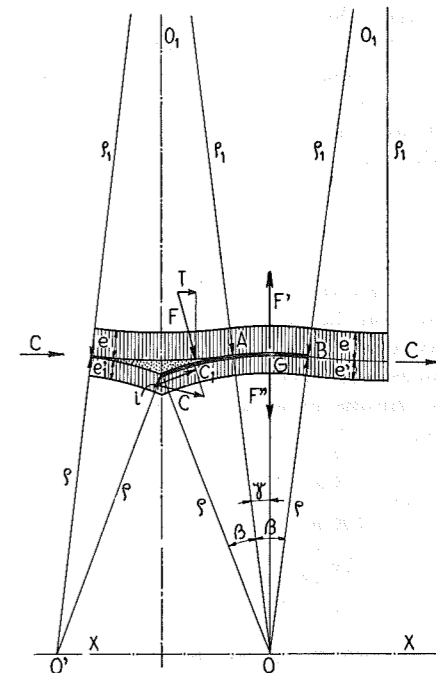


Fig. 19.

Le point de contact se présentera en A, puisque  $\gamma = \frac{1}{2}\beta$ ; en effet, on peut écrire avec une approximation suffisante :

$$\rho_1 \frac{\beta}{2} = \rho_1 \gamma = \rho \beta.$$

L'arc AB ne donnera lieu, puisque OG devient un axe de symétrie, à aucune réaction horizontale et la traînée T aura pour valeur :

$$T = F \sin \left( \frac{\beta}{2} + \gamma \right) \quad (64)$$

La valeur du coefficient de traînée  $C_a$  pourra s'en déduire, dès que F sera connu.

Pour connaître F, il nous faudra déterminer non seulement  $\frac{e_1}{\rho_1}$ , mais  $\frac{e'}{\rho}$ , le rapport de l'épaisseur du flux longeant la face inférieure de l'aile, au rayon  $\rho$  qui caractérise celle-ci.

Le flux inférieur est commandé par deux conditions :

$$\begin{aligned} e_1' &= \frac{1}{2} e_1 \\ p &= \frac{\delta}{g} c^2 \frac{e_1}{\rho_1} = \frac{\delta}{g} c^2 \frac{e_1'}{\rho} \end{aligned} \quad (65)$$

cette dernière exprimant l'égalité des pressions correspondant à la zone morte, en désignant par  $\rho'$  le rayon de courbure du flux inférieur à l'entrée. Il se déduit immédiatement des deux équations que  $\rho'$  doit être égal à  $\rho$ .

Le centre de l'arc d'approche inférieur, de rayon  $\rho$ , doit être choisi pour que l'arc passe par  $i$ , car la zone morte doit être fermée en  $i$ .

Pour ce qui concerne l'épaisseur du flux longeant la face inférieure, elle est fixée par la condition de continuité :

$$e_1' c = e' c_1 \quad (66)$$

La dépression qui va régner sous la face inférieure sera la différence entre la dépression  $p$  qui existe sur la face supérieure jusqu'en B, et qui va avoir pour effet de faire « coller » la veine, et la pression créée par la force centrifuge agissant sur les éléments du flux animés d'une vitesse  $c_1$  :

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\delta}{g} \frac{e}{\rho} c^2 - \frac{\delta}{g} \frac{e'}{\rho} c_1^2 = \\ &= \frac{\delta}{g} \frac{e}{\rho} c^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \cos 2(\beta + \gamma) \right] \end{aligned} \quad (67)$$

puisque la vitesse  $c_1$  est égale à :

$$c_1 = c \cos 2(\beta + \gamma) \quad (68)$$

On peut transformer  $\cos 2(\beta + \gamma)$  en :

$$\cos 2(\beta + \gamma) = \cos^2(\beta + \gamma) - \sin^2(\beta + \gamma)$$

et remplacer  $\cos^2(\beta + \gamma)$  par :

$$\cos^2(\beta + \gamma) = \left[ 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta + \gamma}{2} \right]^2 \quad (69)$$

Calculons  $\cos 2(\beta + \gamma)$  pour la plus grande valeur de  $\beta$  que l'on puisse envisager : celle qui est réalisée pour l'angle maximum possible  $(\beta + \gamma) = 21^\circ$ .

$$\cos 2(\beta + \gamma) = 0,737 \quad (70)$$

ce qui donne à  $p_x$  la valeur :

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\delta}{g} \frac{e}{\rho} c^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} 0,737 \right] = \\ &= 0,631 p = 1,26 \frac{\delta}{g} \frac{e_1}{\rho_1} c^2 \end{aligned} \quad (71)$$

Cette valeur de  $p_x$  étant connue, il va être possible d'écrire l'équation des moments par rapport à  $i$  :

$$\begin{aligned} (\rho \beta) \frac{\delta}{g} c^2 \left( \frac{e_1}{\rho_1} + 1,26 \frac{e_1}{\rho_1} \right) \times \frac{\rho \beta}{2} &= \\ = (\rho \beta) \frac{\delta}{g} c^2 \left( \frac{e}{\rho} - 1,26 \frac{e_1}{\rho_1} \right) (\beta + \gamma) \rho \end{aligned} \quad (72)$$

Observant que  $\frac{e}{\rho} = 2 \frac{e_1}{\rho_1}$ , on peut tirer de là  $\frac{\gamma}{\beta}$  :

$$\frac{\gamma}{\beta} = 0,525 \approx \frac{1}{2} \quad (73)$$

valeur que l'on peut considérer comme égale à  $\frac{1}{2}$

si l'on tient compte de ce que nous avons remplacé les valeurs des sinus par les valeurs des arcs correspondants.

## § 2. — Détermination du coefficient de résistance $C_a$

En possession de  $p_x$ , nous pouvons calculer F :

$$\begin{aligned} F &= \left[ \frac{\delta}{g} L(\rho \beta) \right] c^2 \left( \frac{e_1}{\rho_1} + 1,26 \frac{e_1}{\rho_1} \right) = \\ &= \frac{\delta}{g} (L \times h) c^2 \times \rho \frac{\beta}{h} \times 2,26 \frac{e_1}{\rho_1} \end{aligned} \quad (74)$$

En multipliant F par  $\sin \left( \frac{\beta}{2} + \gamma \right)$ , nous obtenons la valeur de la traînée T et partant le coefficient de résistance  $C_a$  :

$$C_a = \frac{\rho \beta}{h} \sin \left( \frac{\beta}{2} + \gamma \right) \times 2,26 \frac{e_1}{\rho_1} \quad (75)$$

Si la turbulence est faible à l'entrée,  $e_1$  pourra se calculer en fonction de  $h$ , épaisseur au maître-couple apparent, en écrivant :

$$e_1 = 0,365 h \quad (76)$$

comme nous avons écrit auparavant, pour le maître-couple réel  $e_1 = 0,365 d$  ( $d$  étant l'équivalent de  $\varepsilon$  l'épaisseur au maître-couple).

Dès que des troubles se produiront à l'entrée,  $e_1$  pourra grandir et passer à la limite :

$$e_1 = 0,365 \rho_1 \quad (77)$$

La valeur de  $C_a$  s'écrit donc lorsque la relation (76) peut être appliquée :

$$\begin{aligned} C_a &= \frac{1}{2} \times 2,26 \times 0,365 \beta^2 = \\ &= 0,413 \beta^2 = 1,31 m_1^2 \end{aligned} \quad (78)$$

en désignant par  $\frac{1}{m_1}$  l'allongement apparent :

$$\frac{1}{m_1} = \frac{a}{h} = \frac{2 \rho \beta}{2 \rho \left( \frac{\beta + \gamma}{2} \right)^2} = \frac{16}{9} \frac{1}{\beta} \quad (79)$$

Avec la relation (77) :

$$\begin{aligned} C_a &= \frac{1}{2} \frac{1}{m_1} \beta \left( \frac{\beta}{2} + \gamma \right) \times 2,26 \times 0,365 = \\ &= 0,41 \beta^2 \frac{1}{m_1} = 1,30 m_1 \end{aligned} \quad (80)$$

Pour la valeur la plus grande de  $\beta$  qui puisse être envisagée,  $\beta = 0,244$  radient :

$$\frac{1}{m_1} = 7,3$$

Valeur minimum  $C_a = 0,0245$ .

Valeur limite  $C_a = 0,180$ .

c'est-à-dire une valeur 7,3 fois plus grande.

## § 3. — Vérification expérimentale

Les diagrammes que nous présentons dans les figures reproduites de 20 à 29, se rapportent à

des profils expérimentés au tunnel :

du Laboratoire de Rhodes St Genèse (Rh);

du Laboratoire de Naca ( $N_a$ );

du Laboratoire de Riabouchinsky (R) pour les plaques minces à une seule courbure.

Le tableau I fait connaître les valeurs caractéristiques de ces profils et de quelques autres non représentés, notamment les valeurs de  $\gamma$ ,  $(\beta_1 + \beta_2)$ ,

$$\beta_1, \beta_1 + \gamma, \frac{1}{m} = \frac{a}{\varepsilon}.$$

Nous avons indiqué dans les colonnes 8, 9 et

10 les valeurs correspondantes de  $\sin \frac{\beta_1 + \gamma}{2}$ ,

$$\sin \beta_1 \text{ et } \sin^2 \frac{\beta_1 + \gamma}{2}.$$

Tableau I

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N°	Désignation	$\frac{1}{m} = \frac{a}{\varepsilon}$	$\beta_1$	$\beta_1 + \beta_2$	$\gamma$	$\beta_1 + \gamma$	$\sin \beta_1$	$\sin \frac{\beta_1 + \gamma}{2}$	$\sin^2 \frac{\beta_1 + \gamma}{2}$	$\frac{1}{m_1}$
1	Rh 16	8,30	10,5	14,5	3,0	13,5	0,182	0,1175	0,0138	13,4
2	26	10,00	10,0	15,2	3,5	13,5	0,173	0,1175	0,0138	12,5
3	28	12,50	8,0	12,0	2,8	10,8	0,139	0,0941	0,0090	15,6
4	30	10,00	9,5	14,0	3,2	12,7	0,165	0,1103	0,0121	13,6
5	32	8,30	12,5	18,0	4,0	16,5	0,216	0,1435	0,0216	10,0
6	34	7,10	14,0	20,0	4,6	18,6	0,242	0,1616	0,0261	9,3
7	36	6,25	16,0	23,5	5,3	21,3	0,276	0,1886	0,0342	8,0
8	$N_{00}$ 6	16,70	6,0	$\infty$	—	9,0	—	—	—	17,0
9	18	5,50	6,0	$\infty$	—	9,0	—	—	—	17,0
10	$N_{24}$ 6	16,70	5,75	9,5	2,0	7,75	0,100	0,068	0,0046	21,70
11	18	5,50	5,75	9,5	1,8	7,55	0,100	0,068	0,0046	21,70
12	$N_{65}$ 6	16,70	13,50	27,0	6,2	19,70	0,233	0,171	0,0291	8,05
13	18	5,50	13,50	27,0	5,5	19,00	0,233	0,163	0,0266	8,80
14	Rh 2	7,15	12,50	20,0	4,7	17,20	0,216	0,149	0,0222	9,75
15	19	8,30	15,00	25,0	6,2	21,20	0,259	0,184	0,0340	7,76
16	20	8,30	18,00	29,5	8,1	26,10	0,317	0,225	0,0506	6,27
17	Riab 1/12	$\infty$	19,00	38,0	4,0	23,0	0,325	0,199	0,0390	8,35
18	1/16	$\infty$	14,50	29,0	4,5	19,0	0,250	0,163	0,0266	9,40
19	1/20	$\infty$	11,75	22,5	4,2	15,9	0,205	0,137	0,0188	10,60
20	1/30	$\infty$	8,00	16,0	4,0	12,0	0,139	0,097	0,0094	14,20

RHODE N° 26

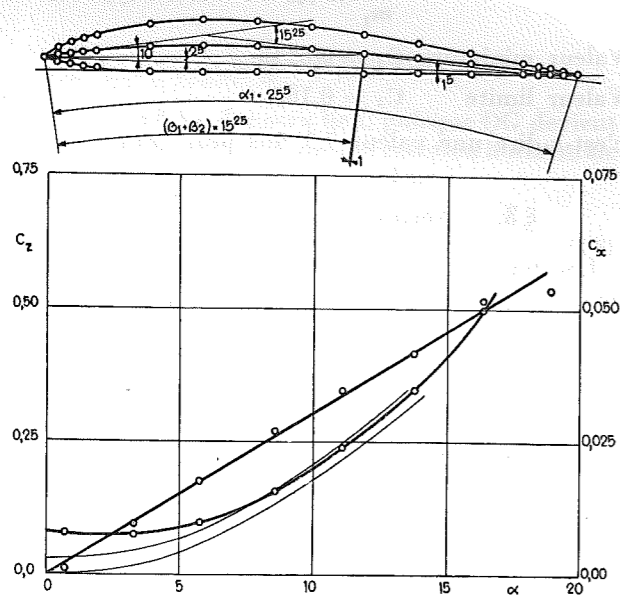


Fig. 20.

RHODE N° 28

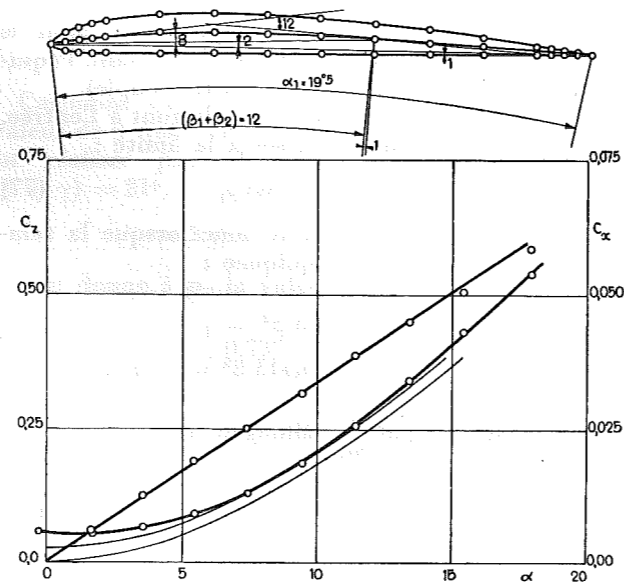


Fig. 21.

RHODE N° 36

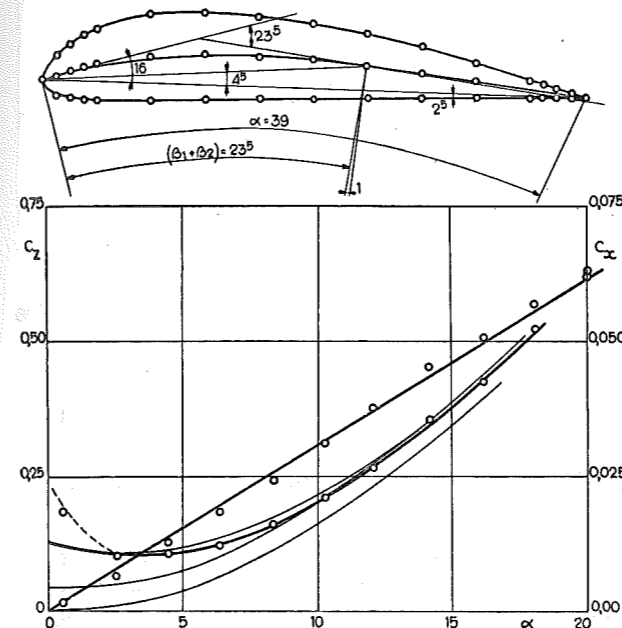


Fig. 24.

NACA N° 00

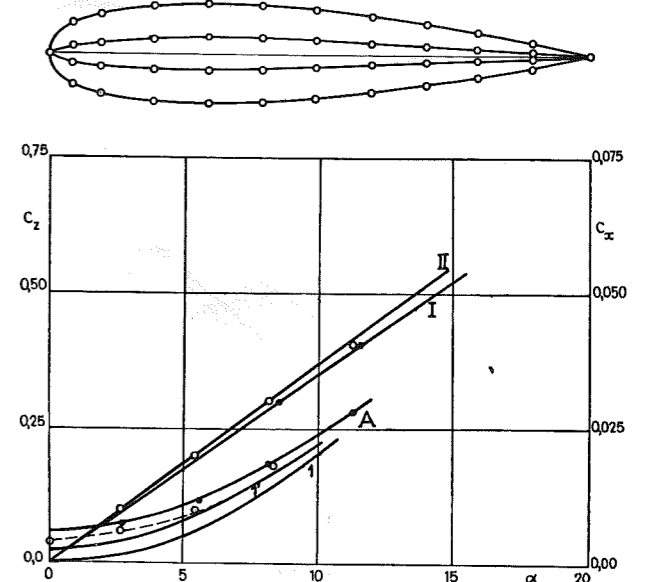


Fig. 25.

RHODE N° 32

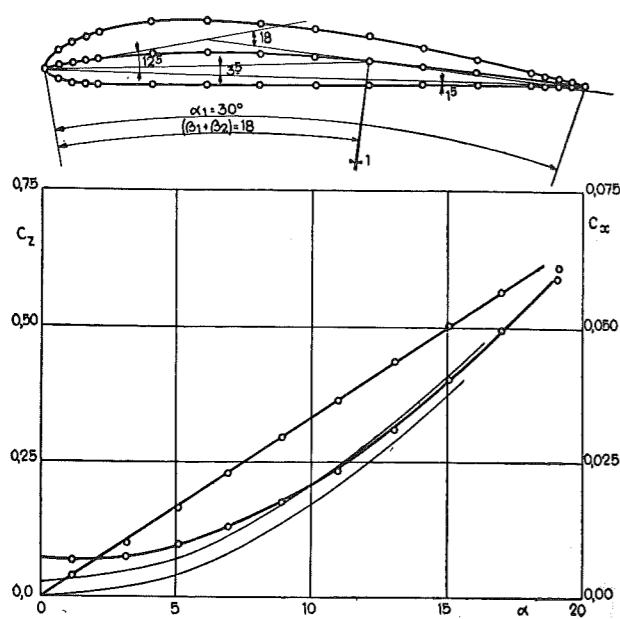


Fig. 22.

RHODE N° 34

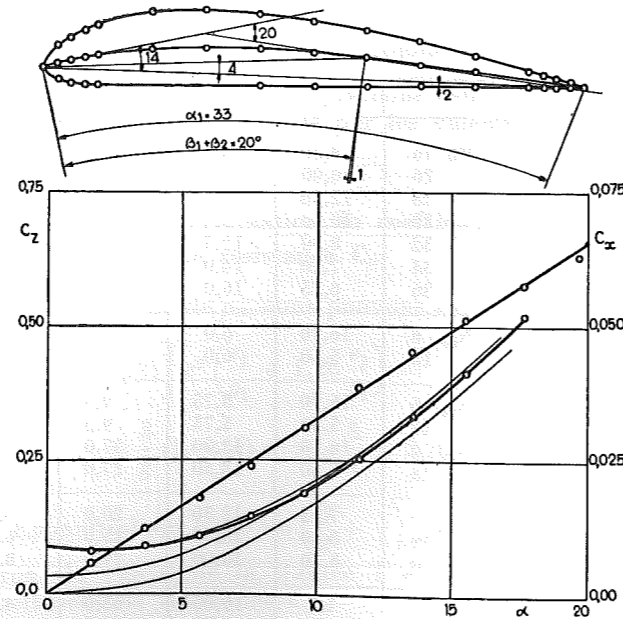


Fig. 23.

NACA N° 24

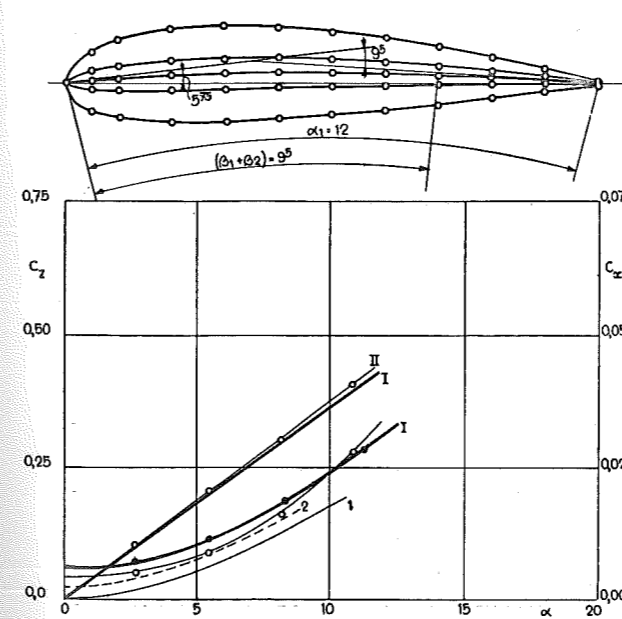


Fig. 26.

RHODE N° 19

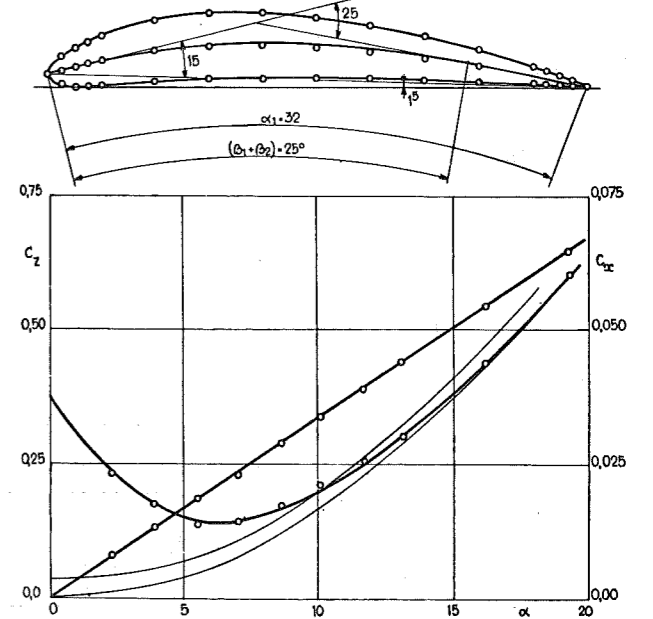


Fig. 27.

RHODE N° 20

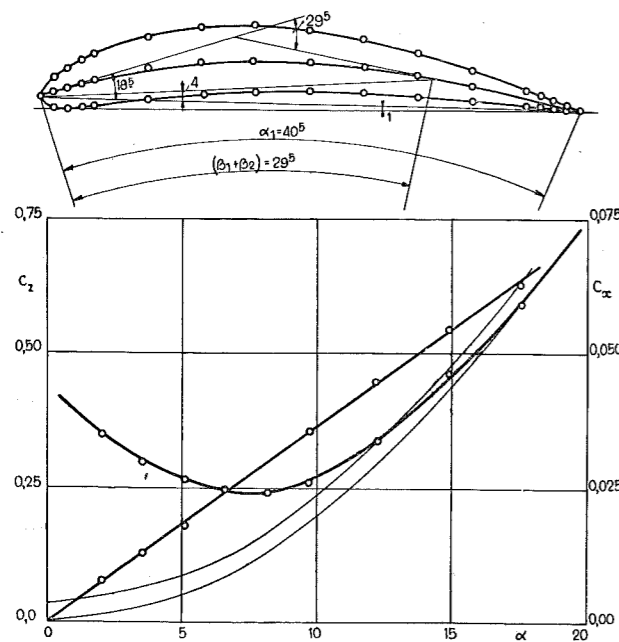


Fig. 28.

Les courbes tracées *en trait fort*, donnent les résultats des mesures effectuées au tunnel pour la détermination des coefficients de portance  $c_z$  et de traînée  $c_x$ .

Le coefficient de traînée total porté en ordonnée, est la somme de :

- 1)  $c_x$  coefficient de résistance théorique donné par la formule (25) ;

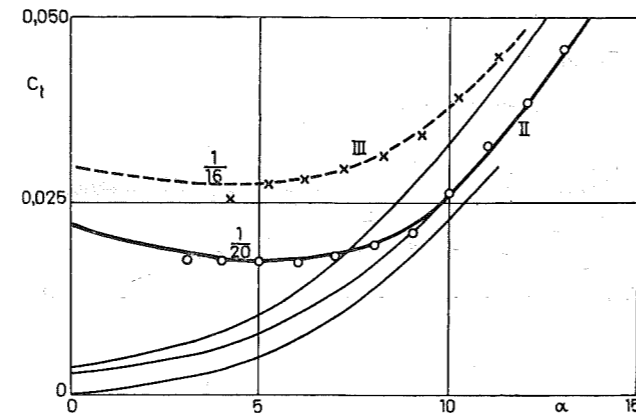


Fig. 29.

- 2)  $c_x'$  coefficient de résistance de profil, due au maître-couple réel ;
- 3)  $c_x''$  coefficient de résistance due au maître-couple apparent.

La courbe en trait fin, qui part de 0, donne les valeurs de  $c_x$ ; la courbe parallèle en trait fin, donne les valeurs calculées de la somme ( $c_x + c_x'$ ). Cette courbe devrait se trouver tangente à la courbe de traînée totale que nous désignerons dans ce qui va suivre par  $C_x$ , pour l'angle ( $\beta_1 + \gamma$ ), car pour cette valeur de l'angle d'attaque,  $c_x''$  est nul ainsi que le montre la formule (93) établie plus loin.

Nous montrerons à la fin de ce chapitre, comment il faut expliquer le léger écart constaté entre les deux courbes.

Tableau II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	14
N°	Désignation	$\frac{1}{m}$	$x$ ~	C	$10^3 \frac{c_x'}{C \times m}$	$10^3 c_p$	$10^3 c_x''$	$\frac{1}{m_1}$	$\frac{10^3 c_x''}{m_1}$	$1 + \frac{2}{3} \frac{m}{m'}$	$1 + \frac{1}{3} \frac{m}{m'}$	$10^3 C_a$
1	Rh 16	8,30	1,60	0,027	3,27	6,90	3,63	13,40	48,5	2,07	—	2,35
2	26	10,00	1,80	0,026	2,60	7,80	5,20	12,50	65,0	1,80	—	<b>3,60</b>
3	28	12,50	1,80	0,026	2,10	5,50	3,40	15,60	53,0	1,85	—	2,86
4	30	10,00	1,70	0,026	2,60	7,10	4,50	13,60	61,0	1,91	—	3,20
5	32	8,30	1,70	0,028	3,40	7,50	4,10	10,00	41,0	1,85	—	2,22
6	34	7,10	1,60	0,029	4,10	8,60	4,50	9,30	48,5	1,88	—	2,58
7	36	6,25	1,70	0,035	5,60	22,50	16,90	8,05	210,0	1,85	—	<b>11,40</b>
							12,50		86,0			<b>4,65</b>
8	N <sub>00</sub> 6	16,70	1,90	0,028	1,68	3,75	2,07	17,00	35,2	—	1,33	2,66
9	18	5,50	1,80	0,0425	7,70	?	—	17,00	—	—	—	—
10	N <sub>24</sub> 6	16,70	1,70	0,029	1,73	4,00	2,27	21,70	49,3	1,87	—	2,64
11	18	5,50	1,60	0,039	7,10	?	—	21,70	—	—	—	—
12	N <sub>65</sub> 6	16,70	2,00	0,027	1,62	6,20	4,38	8,05	35,4	—	1,48	2,40
13	18	5,50	1,70	0,042	7,61	13,50	5,89	8,05	47,3	—	1,37	3,45
14	Rh 2	7,15	1,90	0,035	4,90	9,70	3,80	9,75	37,0	—	1,37	2,70
15	19	8,30	1,65	0,027	3,25	44,0	40,75	7,76	316,0	—	1,31	<b>24,00</b>
16	20	8,30	1,60	0,027	3,25	52,5	49,25	6,27	309,0	—	1,25	<b>24,70</b>

Dans le tableau II, nous avons indiqué la valeur  $\frac{1}{m_1}$ , telle qu'elle résulte de la formule (79) :

$$\frac{1}{m_1} = \frac{\sin \beta}{\sin^2 \frac{\beta + \gamma}{2}}$$

en utilisant les valeurs indiquées dans les colonnes 8 et 10 du tableau I.

Remarquons que pour passer des valeurs trouvées précédemment pour C et C<sub>a</sub> aux valeurs correspondantes c<sub>x'</sub> et c<sub>x''</sub>, il faut tenir compte que les premières sont rapportées à la section s du maître-couple, alors que les secondes sont calculées en fonction de la surface allaire S; pour passer des secondes aux premières, il faut donc écrire :

$$c_x' = C \times \frac{\varepsilon}{a} = C \times m$$

$$c_x'' = C_a \times \frac{h}{a} = C_a \times m_1 \quad (81)$$

d'où la valeur de C<sub>a</sub> en fonction de c<sub>x''</sub> :

$$C_a = \frac{c_x''}{m_1}$$

Pour calculer c<sub>x'</sub>, nous sommes partis des valeurs de C, trouvées au diagramme de la figure 16; pour connaître la valeur de x propre à chacun des profils, nous avons mesuré sur ceux-ci, la distance comprise entre les deux sections faites aux points d'inflexion de la veine fluide qui se présentent, d'après ce que nous avons vu, là où l'épaisseur atteint les  $\frac{2}{3}$  de l'épaisseur maximum  $\varepsilon$ . Les valeurs ainsi trouvées sont indiquées dans la colonne (4). Les valeurs de  $10^3 c_x'$  qui en résultent, sont indiquées colonne (6).

La colonne (7) donne les valeurs de  $10^3 c_p$ , mesurées aux diagrammes pour l'abscisse nulle; c<sub>p</sub> représente la résistance totale observée pour la position de nulle portance. En soustrayant de c<sub>p</sub> la valeur de c<sub>x'</sub> correspondante, nous trouverons c<sub>x''</sub>, puis la valeur  $10^3 \frac{c_x''}{m_1}$  (colonne 10).

Pour passer aux valeurs de C<sub>a</sub>, calculées par la formule (74), qui ne vaut que pour les profils minces, il faudra examiner quel est le terme de correction à introduire pour tenir compte de l'épaisseur  $\varepsilon$  du profil.

La figure 30 montre que le maître-couple passe de h à la valeur de h augmentée d'une fraction de  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Pour l'ensemble des profils, nous avons pu voir que l'on se rapprochait de la

vérité en adoptant  $\frac{\varepsilon}{3}$ . Il en résulte que pour trouver la valeur de C<sub>a</sub> qui correspondrait au profil mince, il faut diviser les résultats indiqués colonne (10) par :

$$\frac{h + \frac{1}{3} \varepsilon}{h} = 1 + \frac{1}{3} \frac{\varepsilon}{a} = 1 + \frac{1}{3} \frac{m}{m_1} \quad (82)$$

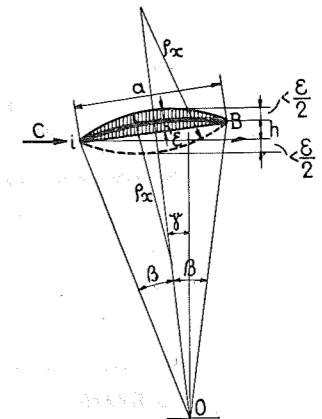


Fig. 30.

Cette relation ne vaut que pour les profils dont la face ventrale n'est pas plane. Il apparaît, en effet, lorsque l'on soumet au tunnel des profils à simple courbure, dont on fait croître l'épaisseur  $\varepsilon$ , sans changer la courbure, une épaisseur pour laquelle la face inférieure devient pratiquement plane. A ce moment, le flux inférieur est dans l'impossibilité de s'incurver vers le haut et l'équilibre ne peut s'établir qu'à la faveur d'une incurvation de rayon  $\rho_x$  vers le bas, telle que l'indique la figure 20, en pointillés. Tout se passe, dès lors, comme si l'influence de l'épaisseur était doublée, ce qui revient à dire que le coefficient de correction passe de :

$$1 + \frac{1}{3} \frac{m}{m_1} \text{ à } 1 + \frac{2}{3} \frac{m}{m_1} \quad (83)$$

C'est en utilisant cette dernière formule pour l'analyse des résultats expérimentaux de Rhodes St Genèse (profils de 16 à 36) et de Naca (profil N<sub>24</sub> 6) qui tous présentent la face ventrale plane, que nous avons trouvé les valeurs de  $10^3 C_a$  inscrites dans la colonne (14).

Pour les autres profils, nous avons utilisé le coefficient de correction de la formule (82).

Nous n'avons pas inscrit les valeurs de c<sub>p</sub> pour N<sub>00</sub> 18, N<sub>24</sub> 18, parce que pour obtenir l'ordonnée à l'origine, il nous aurait fallu extrapoler la courbe expérimentale d'une façon trop incertaine, le dernier point noté sur la figure correspondante, ayant pour abscisse  $2\frac{1}{2}$  degrés.

Avant de commenter ces résultats, portons en diagramme, en fonction de  $\frac{1}{m_1}$ , les valeurs de  $C_a$  (fig. 31).

Tous les points se groupent sur une droite dont l'ordonnée est très approximativement égale à 0,0262, à l'exception des points :

1) correspondant au profil (26) qui présente dans sa forme une anomalie par rapport à tous les autres : l'avant se termine en lame de couteau ;

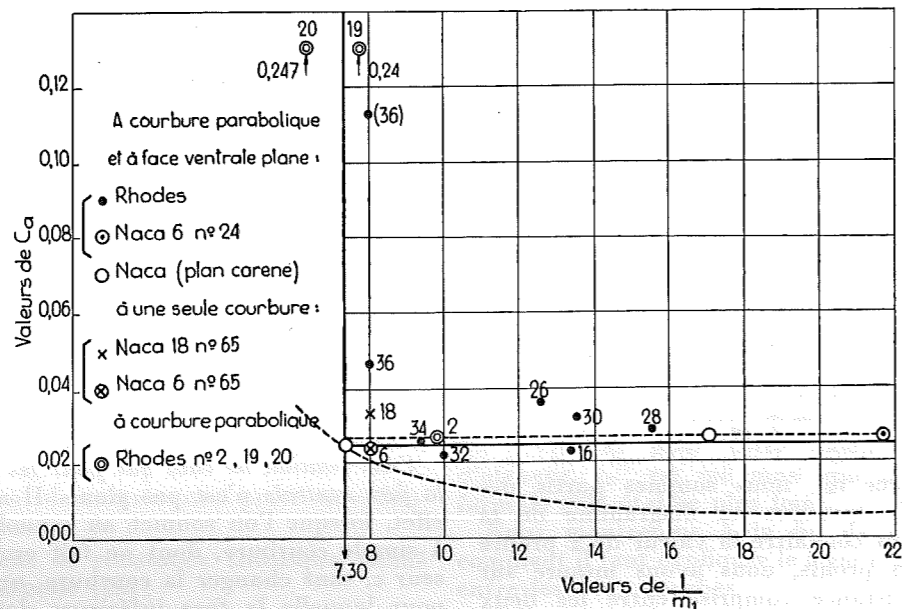


Fig. 31.

2) correspondant aux profils (36) et  $N_{18}$  n° 65, qui se rapportent à des tracés de forte épaisseur  $\varepsilon$ , pour lesquels  $\frac{1}{m_1}$  est voisin de la valeur critique  $\frac{1}{m_1} = 7,3$  ;

3) correspondant aux profils (19) et (20) pour lesquels l'angle  $(\beta_1 + \gamma)$  est plus grand que  $20^\circ$ .

Si l'on fait la moyenne des valeurs observées pour tous les autres profils, on obtient 0,262.

Comment faut-il interpréter ces résultats ?

La théorie exposée avait fait prévoir que  $C_a$  serait donné par une courbe d'allure hyperbolique (formule 78) ; l'expérimentation systématique montre que à partir de la valeur correspondant à l'allongement le plus favorable 7,3 (correspondant à l'angle le plus grand que l'on puisse envisager  $(\beta_1 + \gamma) = 21^\circ$ ), la valeur de  $C_a$  reste constante.

Que faudrait-il admettre pour que  $C_a$  soit constant à partir de l'allongement optimum ? Que  $e_1$  ne reste pas proportionnel à  $k$  mais

devient à partir de cet instant, proportionnel au rayon  $\rho$  de l'aile :

$$e_1 = k\rho$$

En effet, si dans la relation (75), nous remplaçons  $\frac{c_1}{\rho_1}$  par  $\frac{k}{2}$ , puisque  $\rho_1 = 2\rho$ , il viendra :

$$C_a = \frac{1}{2} \frac{1}{m_1} \times \sin\left(\frac{\beta}{2} + \gamma\right) \times 2,26 \frac{k}{2}$$

ou en utilisant la relation (79) :

$$C_a = \frac{k}{4} 2,26 \frac{\beta \left(\frac{\beta}{2} + \gamma\right)}{\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)^2} \quad (84)$$

Comme  $\gamma/\beta$  varie entre  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{3}$  pour tous les profils étudiés, on voit que  $C_a$ , à une différence près de  $\pm 2\frac{1}{2}\%$ , est égal à :

$$C_a = \frac{k}{4} 2,26 \times 1,82 = 1,01 k \quad (85)$$

Pour réaliser la valeur constante de 0,024  $\rho$  que nous avons trouvée, il faut donc admettre qu'à partir de l'allongement optimum du maître-couple apparent :

$$k = 0,024 \quad (86)$$

Cette valeur de  $k$  n'est toutefois égale à 0,024 que si la perturbation à l'entrée est nulle.

Dès qu'une cause de perturbation se produit, comme c'est le cas pour le profil (26),  $k$  augmente et passe à  $0,24\rho$  comme l'indique le diagramme expérimental de la figure 21 pour les profils présentant un angle  $(\beta_1 + \gamma) > 20^\circ$ . Disons qu'à la limite  $k$  peut aller jusque la valeur 0,365, c'est-à-dire une valeur 15 fois plus grande, comme c'est le cas pour les profils minces de Riabouchinsky.

### CHAPITRE V

#### VALEURS DES COEFFICIENTS $c_x'$ ET $c_x''$

##### § 1. — Valeurs de $c_x'$

Pour passer des valeurs de  $C$  et de  $C_a$  aux valeurs des coefficients  $c_x'$  et  $c_x''$ , il faut utiliser les relations (81).

Nous ne nous occuperons que des valeurs de  $c_x'$  et  $c_x''$  pour la région des allongements plus grands que l'allongement optimum. Pour les vitesses ordinaires [voir formule (58)] :

$$c_x' = \frac{8}{9} \times 0,365 (mx)_1 m^2 x + \frac{2 k_1''}{x} \quad (87)$$

Pour les vitesses voisines de la vitesse sonique :

$$c_x' = \frac{8}{9} \times 2,09 m^2 x + \frac{2 k_1''}{x} \quad (88)$$

suivant la formule (60).

Comme on le voit,  $c_x'$  diminue quand  $\frac{1}{m}$  grandit.

Pour le cas des vitesses normales, le premier terme est petit et l'on peut s'en tenir à la valeur de  $\frac{1}{m}$  qui conduit au plus petit coefficient de résistance  $C$ .

Pour le cas des vitesses soniques, le premier terme est tellement prépondérant par rapport au second, que l'on peut dire que l'aile la plus mince est l'aile la meilleure.

Il reste toutefois la question de  $x$  qui, pour les profils ordinaires, peut aller jusqu'à 2.

Si nous dérivons par rapport à  $x$  et que nous égalons la dérivée à zéro, nous trouvons :

pour le 1<sup>er</sup> cas :

$$x = 0,23 \frac{1}{m}, \text{ soit pour } \frac{1}{m} = 8; \quad x = 1,85;$$

pour le 2<sup>e</sup> cas :

$$x = 0,0385 \frac{1}{m}, \text{ soit pour } \frac{1}{m} = 8; \quad x = 0,31.$$

La théorie que nous exposons fait donc ressortir que le profil considéré comme le meilleur pour les vitesses ordinaires, se trouve être un mauvais profil pour les vitesses de l'ordre de celle du son. Malheureusement, il n'est pas possible de réaliser

pratiquement des valeurs de  $x$  pour le profil sonique inférieure à 1,3 pour fixer les idées, ainsi que nous le précisons à la fin de la Deuxième Partie. Les deux tracés que nous

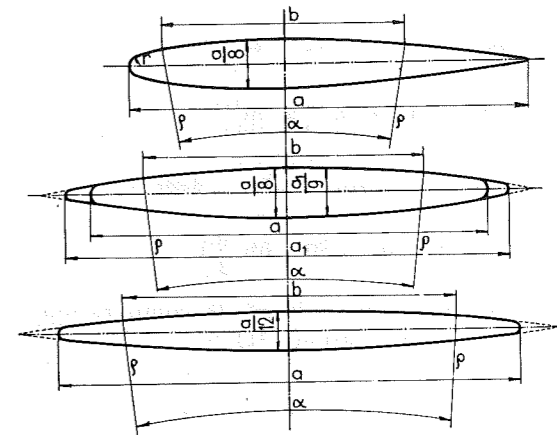


Fig. 32 — 33 — 34.

donnons figure 32 et figure 33 résument nos conclusions à cet égard.

##### § 2. — Valeurs de $c_x''$

Nous avons vu que  $C_a$  devait se mettre sous la forme (85) :

$$C_a = 1,01 k$$

dans laquelle  $k$  pour les conditions optima de turbulence à l'entrée, peut descendre à 0,0245.

Pour les fortes perturbations, la valeur de  $C_a$  peut atteindre 0,245 et même à la limite la valeur :

$$k = \frac{e_1}{\rho} = 0,365$$

Cela conduit à dire que  $c_x''$ , c'est-à-dire le coefficient de traînée du maître-couple apparent rapporté à la surface allaire, peut varier de (formule 86) :

$$c_x'' = C_a \times m_1 = 1,01 \times 0,0245 m_1 \quad (89)$$

à :

$$c_x'' = C_a \times m_1 = 1,01 \times 0,365 m_1 \quad (90)$$

Nous rappelons que la valeur de  $m_1$  est donnée par la relation (79) :

$$\frac{1}{m_1} = \frac{a}{h} = \frac{\beta}{\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)^2} \quad (91)$$

Cette valeur de  $\frac{1}{m_1}$  correspond à la position de nulle portance de l'aile; cette valeur va s'atténuant à mesure que l'on se rapproche de la position optimum de l'aile pour se trouver égale à zéro lorsque  $\alpha = \beta + \gamma$ . Nous pouvons

admettre, avec une approximation suffisante, que  $h$  est donné par la relation :

$$h = 0,60 a \sin \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \quad (92)$$

puisque pour  $\alpha = 0$ ,  $h = 0,60 a \sin \frac{\beta + \gamma}{2}$

$$\text{au lieu de } 0,70 a \sin \frac{\beta + \gamma}{2}$$

et pour  $\alpha = \gamma$ ,  $h = 0,60 a \sin \frac{\beta}{2}$

$$\text{au lieu de } 0,50 a \sin \frac{\beta}{2}.$$

La première des valeurs de comparaison est fournie par la relation (91) :

$$h = a \left( \frac{\beta + \gamma}{2 \beta} \right) \frac{\beta + \gamma}{2}$$

$\frac{\beta + \gamma}{2 \beta}$  prenant effectivement les valeurs  $\frac{3}{4}$  pour  $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{2}$ , et  $\frac{2}{3}$  pour  $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{3}$  (moyenne 0,70).

La deuxième des valeurs de comparaison est fournie par l'évaluation directe de  $h$  pour la position horizontale de la corde qui soutient l'arc, c'est-à-dire par l'évaluation de la flèche de l'arc  $\rho$  :

$$h = \rho (1 - \cos \beta) = 2 \rho \sin^2 \frac{\beta}{2} = (2 \rho \beta) \frac{\beta}{4} = 0,5 a \frac{\beta}{2}.$$

Il en résulte que  $c_x''$  peut se mettre sous la forme suivante, en fonction de  $\sin \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$

$$c_x'' = 0,025 \times 0,60 \sin \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \quad (89b), \text{ si l'on a}$$

affaire à une aile mince. Si l'on a affaire à une aile épaisse, il faut introduire dans cette formule le facteur (82) ou (83).

### § 3. — Valeurs de $C_x$ total

Nous désignerons par  $C_x$  la valeur totale de la traînée comprenant :

- 1° la valeur de la traînée  $c_x$  propre de l'aile donnée par la relation (25) ;
- 2° la valeur de la traînée de profil  $c_x'$  donnée par la relation (87) pour les conditions normales de vitesse ;
- 3° la valeur de la traînée  $c_x''$  due au maître-couple apparent donnée par la relation (89b) pour les conditions normales de vitesse :

$$C_x = 2k' F(x) \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 0,08 m^2 + 0,00185 + 0,0250 \left( 1 + n \frac{m}{m_1} \right) \times 0,6 \sin \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \quad (93)$$

pour  $x = 1,5$ ,  $2k_1'' = 0,00278$ ,  $n$  représentant  $\frac{1}{3}$  ou  $\frac{2}{3}$  suivant qu'il s'agit des profils normaux ou des profils à face ventrale plane.

Pour la détermination de  $k'$ , on opère par identification de  $c_x$  calculé, et de  $c_x$  observé au tunnel (relation 25).

Nous montrerons dans la Cinquième Partie comment on peut déterminer les valeurs de  $F(z)$  et de  $F(x)$  et nous ferons ressortir alors que les valeurs expérimentales de  $k'$  établies pour une vingtaine de profils choisis au hasard, dans les albums publiés par les grands laboratoires, conduisent très exactement, avec une approximation de l'ordre des erreurs d'expérience, à :

$$k' = \pi$$

pour l'envergure infinie, la valeur de  $k'$  pour l'envergure finie étant donnée par la formule de Betz,

$$k' = \pi \frac{k}{k + 0,8}$$

$k$  mesurant l'envergure :

$$k = \frac{L}{a}$$

Remarque. — Nous devons faire remarquer qu'en appliquant la formule (93), pour l'angle  $\alpha = \beta + \gamma$ , nous avons été conduit à une courbe, celle tracée en trait fin sur les diagrammes expérimentaux donnant les valeurs de  $C_x$ , qui dépasse de quelques % les valeurs observées pour cet angle  $\alpha = \beta + \gamma$ .

Comme la valeur de  $k'$  introduite dans la relation (93) est déduite de l'identification d'une valeur observée pour  $c_x$  avec la valeur calculée correspondante, il semblerait que cette différence ne peut s'expliquer.

La manière de calculer  $k'$  repose toutefois sur cette idée que la réduction de la poussée due à l'épaisseur de l'aile, vient exclusivement de la réduction de l'épaisseur  $e$  du flux influencé. Or, on peut admettre qu'une partie de cette réduction vient de la diminution de l'angle moyen de déviation, les filets qui abordent les extrémités de l'aile s'incurvant vers l'extérieur, d'autant plus que l'épaisseur de l'aile est plus grande.

Pour apprécier la réduction du coefficient de portance  $c_z$  avec l'épaisseur de l'aile, il importe peu de savoir si une partie de cette réduction vient de la diminution  $e$  et une autre de la réduction de  $\sin \alpha$ , puisque les deux termes qui entrent dans la formule, sont du premier degré ; il n'en est pas de même pour le coefficient  $c_x$  si bien que le coefficient de réduction global que nous avons admis égal à (1) :

$$\left( 1 - \frac{m}{\pi} \right)$$

pourrait prendre la forme :

$$\sqrt{1 - \frac{m}{\pi}} \times \frac{\sin(\beta + \gamma)_1}{(\sin \beta + \gamma)} = \left( 1 - \frac{m}{\pi} \right) \quad (94)$$

(1) Le lecteur pourrait pour mieux comprendre l'exposé, se référer à la Cinquième Partie consacrée à l'établissement des formules donnant les valeurs de la portance et de la traînée propre.

admettant ainsi que la moitié de la réduction vient de la diminution de l'épaisseur  $e$ , et la moitié de la réduction de l'angle d'attaque qui devient  $(\beta + \gamma)_1$ .

Pour l'allongement optimum  $m = \frac{1}{7,3}$  :

$$\frac{\sin(\beta + \gamma)_1}{\sin(\beta + \gamma)} = \sqrt{1 - \frac{1}{7,3 \times \pi}} = 0,978 \quad (95)$$

ce qui revient à dire :

$$(\beta + \gamma)_1 = 0,978 (\beta + \gamma) \quad (96)$$

Pour le calcul de  $c_x$ , nous aurons donc à introduire dans la formule un angle plus petit, ce qui reviendra, l'angle entrant au carré, à une réduction de  $c_x$  de  $(0,978)^2 = 0,957$ .

Cette réduction ramènera très exactement, peut-on dire, la courbe calculée sur la courbe expérimentale. Il s'agit là d'une correction qui porte sur  $\frac{1}{2}$  degré de l'angle efficace de déviation, tout au plus, mais il importait de montrer qu'il ne s'introduisait de ce fait dans le raisonnement, aucune contradiction.

## CHAPITRE VI

### CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Comme on le voit, il est possible, en partant du théorème de la quantité de mouvement, de trouver les valeurs de  $c_z$  et  $c_x$  puis de  $c_x'$  et  $c_x''$ , sans admettre d'autres relations que celle établie par la théorie classique et confirmée par l'analyse d'une vingtaine de profils :

$$\frac{e}{a} = \pi.$$

Nous avons considéré comme résultant de mesures de pression effectuées sur une aile, que la dépression moyenne sur le dos est double de la pression moyenne sur la face concave, ce qui se traduit pour nous, par :

$$e_1 = \frac{1}{2} e_2 = \frac{1}{3} \frac{e}{a} \times a = \frac{\pi}{3} \times a.$$

Moyennant cette relation complémentaire, nous avons pu déterminer les valeurs numériques de  $C$  et de  $C_a$ , coefficient de traînée due au maître-couple réel et coefficient de traînée dû au maître-couple apparent.

Sur une base aussi solide, nous établirons dans la Cinquième Partie les valeurs de  $c_z$  et  $c_x$  dont nous avons donné la forme, sans expliciter les fonctions  $F(z)$  et  $F(x)$ .

Ces résultats inattendus et pour tout dire invraisemblables, tiennent à la valeur du principe de base, et au fait que pour des écoulements correspondant à de grands nombres de Reynolds, la perte d'énergie due au frottement (1) est localisée à la paroi, si bien que tout se passe dans la masse influencée par l'obstacle, comme s'il s'agissait d'un fluide parfait.

(1) Voir, à ce sujet, la Troisième Partie.

Or, s'il est possible de raisonner sur le fluide réel comme s'il était parfait, l'application du théorème de la quantité de mouvement doit faire connaître directement la poussée sur l'obstacle.

Quelle que soit, en effet, la complexité du phénomène qui se passe entre le point d'entrée et le point d'inflexion du flux qui contourne l'obstacle, la valeur de la pression exercée sur celui-ci, ne dépendra que de l'orientation du vecteur vitesse à l'entrée et du vecteur vitesse au point d'inflexion, puisque, en ce point d'inflexion, la courbure étant nulle, la vitesse aura repris en tous les points, sa valeur initiale.

L'effort appliqué est donc indépendant de la forme des trajectoires suivies par les filets et partant le résultat serait le même si l'on avait affaire à des trajectoires concentriques dont les tangentes aux extrémités se confondraient avec la direction des vecteurs vitesse.

C'est de cette remarque et de l'idée que la relation de continuité pouvait se déduire de la propriété fondamentale ci-dessus :

$$\frac{e}{a} = \frac{e}{\rho a} = \pi$$

que toute cette étude est sortie.

Cette relation a, en effet, permis de fixer le rayon de l'arc d'approche du flux, en écrivant :

$$\rho_1 \alpha_1 = \rho a$$

et partant :

$$\rho_1 = 2 \rho.$$

D'où la valeur de  $\rho_1$  ; d'où aussi la position du point d'inflexion et la valeur de la vitesse  $c_1$  prise par le fluide dans la direction perpendiculaire au déplacement.

Cette vitesse qui est une vitesse réelle, même dans le cas de l'obstacle remorqué dans un fluide au repos, est nécessairement perdue ; et nous avons pu établir que le travail  $\mathfrak{E}$  dépensé par seconde pour remorquer l'obstacle, était égal à l'énergie dissipée par tourbillons au point d'inflexion, par seconde :

$$\mathfrak{E} = \frac{M}{2} c_1^2.$$

$M$  désignant la masse qui s'écoule par seconde dans la direction perpendiculaire au déplacement.

Dans un ouvrage sur la *Thermodynamique*, H. Poincaré définit le principe de la conservation de l'énergie « Une forme commune à tous les possibles ».

Appliquée ici, elle signifie que, si la forme des filets concentriques est possible, les résultats obtenus par l'application du principe, vaudront pour toutes les formes possibles, en particulier pour la forme vraie, qui est évidemment possible.



Sa signification est encore plus claire, lorsqu'on se reporte à l'application que nous en avons faite pour la détermination de la traînée propre au maître-couple apparent, et pour la détermination de la valeur du rapport  $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{2}$ .

Là, le tracé de la veine peut apparaître comme tellement éloigné de la forme vraie, que l'on est tenté de lui dénier toute signification. Il suffit d'après ce que nous venons de voir qu'il soit une des formes possibles et pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la zone morte soit fermée. De là, le tracé adopté, déterminé par cette condition.

Ce qui confond davantage l'esprit, c'est que les résultats obtenus en analysant chacun des phénomènes séparés, valent pour le phénomène d'ensemble qui résulte de la superposition des phénomènes séparés. En effet, il suffit de faire la somme des valeurs tirées de l'application du principe à chacun des phénomènes imaginés comme isolés, pour obtenir la valeur globale réelle telle qu'elle résulte de l'expérimentation systématique.

Nous croyons savoir qu'une telle propriété n'est possible que si chacun des phénomènes est

fonction d'une seule variable du premier degré, comme c'est le cas ici, puisque MV est proportionnel à V, M étant constant.

La méthode dont nous venons de nous servir, n'a pris cette tournure qu'après de nombreux tâtonnements, entourés d'une confrontation permanente entre résultats calculés et observés.

Nous l'avions appliquée, il y a une dizaine d'années, à la recherche des coefficients de portance  $c_z$  et de traînée théorique  $c_x$ , avec plein succès. La recherche systématique des valeurs de  $c_x'$  et  $c_x''$  nous a permis de montrer une fois encore et sur un terrain plus difficile, la parfaite concordance des résultats calculés et des résultats observés pour toutes les expériences au tunnel avec des vitesses nettement inférieures à celle du son.

Nous examinerons dans la Deuxième Partie ce que deviennent les formules et les résultats calculés pour des vitesses voisines de celle du son.

Nous ne disposerons, malheureusement, que de documents expérimentaux peu nombreux, mais nous verrons néanmoins que l'hypothèse des filets concentriques conduit à retrouver par le calcul, l'ordre de grandeur des valeurs observées.

## DEUXIÈME PARTIE

### COEFFICIENT DE RÉSISTANCE ET DE PORTANCE AUX ENVIRONS DU MUR DU SON

#### § 1. — Influence de la compressibilité sur la valeur fournie par la formule (1)

La méthode si féconde que nous venons d'employer est basée sur la relation (1) que nous pouvons écrire, en désignant par  $p$  la pression absolue et par  $p_a$  la pression atmosphérique :

$$p - p_a = \frac{\delta_a}{g} c^2 \frac{e_1}{\rho} \quad (97)$$

s'il s'agit de la face concave, par :

$$p_a - p = \frac{\delta_a}{g} c^2 \frac{e_2}{\rho} \quad (98)$$

s'il s'agit de la face convexe, en se référant à la figure 10 pour les notations,  $\delta_a$  désignant le poids spécifique de l'air à l'entrée.

Calculons  $df$  pour un élément d'épaisseur  $dr$ , de profondeur  $L$ , d'angle au centre  $d\theta$  :

$$df = L \times r d\theta \frac{\delta_a}{g} \frac{c^2}{r} dr = L d\theta \frac{\delta_a}{g} c^2 dr \quad (99)$$

En intégrant de  $r_1$  à  $\rho$  et en divisant par la surface  $L\rho d\theta$ , nous obtiendrons pour la face concave :

$$p - p_a = \frac{\delta_a}{g} c^2 \frac{e_1}{\rho} \quad (100)$$

Pour la face convexe, il viendra :

$$p_a - p = \frac{\delta_a}{g} c^2 \frac{e_2}{\rho} \quad (101)$$

Cette démonstration est faite en imaginant que la vitesse  $c$  à l'entrée se maintient dans toute la masse, tout le long des trajectoires circulaires. Or, la relation de Bernoulli indique qu'il ne peut en être ainsi. En écrivant, par approximation, pour un fluide compressible :

$$\int_{p_a}^{p_a + [\Delta p]} v dp = \frac{1}{\delta_a} [\Delta p] = \frac{1}{2g} (c - \Delta c)^2 - \frac{1}{2g} c^2 = -\frac{1}{g} c^2 \frac{\Delta c}{c} \quad (102)$$

il viendra :

$$[\Delta p] = -\frac{\delta_a}{g} c^2 \frac{\Delta c}{c} \quad (103)$$

En appliquant la relation (100), d'abord au cas où la vitesse est égale à  $c$  tout le long du parcours, ensuite au cas où la vitesse est égale à  $(c - \Delta c)$ , il viendra (fig. 35) :

$$\Delta p = \frac{\delta_a}{g} \frac{c}{c - \Delta c} (c - \Delta c)^2 \frac{e_1}{\rho} - \frac{\delta_a}{g} c^2 \frac{e_1}{\rho} = \frac{\delta_a}{g} c^2 \frac{\Delta c}{c} \frac{e_1}{\rho} \quad (104)$$

à la condition de tenir compte de la relation :

$$\delta_a c = \delta (c - \Delta c) \quad (105)$$

qui traduit la condition de continuité, dans le cas où l'on a affaire à des filets concentriques.

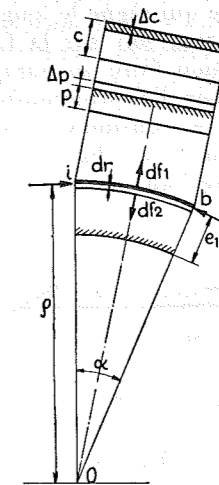


Fig. 35.

Si nous multiplions  $[\Delta p]$  par  $L dr$ , nous obtenons l'effort appliqué aux faces latérales (fig. 35) de l'élément d'épaisseur  $dr$ , longeant la face concave de l'aile; en multipliant par  $\alpha$ , nous obtiendrons la résultante dirigée suivant OX, c'est-à-dire  $df_1$ .

$$df_1 = -[\Delta p] L \times dr \times \alpha = -\left(\frac{\delta_a}{g} c^2 \frac{\Delta c}{c}\right) L \times dr \times \alpha \quad (106)$$

En tirant la quantité entre parenthèses de la relation (104), nous pourrions écrire :

$$df_1 = (\Delta p \times \rho a \times L) \frac{dr}{e_1};$$

d'où :

$$df_1 = df_2 \quad (107)$$

en désignant par  $df_2$  la diminution de l'effort de poussée, pour la tranche d'épaisseur  $dr$ .

Ainsi se trouve démontré « que la diminution de la poussée résultant de la réduction de la vitesse le long de l'arc  $ib$  est compensée par l'accroissement de la différence des pressions  $(p - p_a)$  agissant sur les faces latérales d'épaisseur  $dr$ , de l'élément considéré ».

La relation (1) n'est donc pas seulement valable pour un fluide incompressible, mais également pour un fluide compressible, du moment où l'on peut regarder le déplacement par filets concentriques comme possible; dans cette relation  $c$  désigne non la vitesse le long de l'arc, mais la vitesse d'entrée.

§ 2. — Calcul du rapport  $\frac{c}{c_a}$

Nous désignerons par  $c_a$  la vitesse à l'entrée, et par  $c$  la vitesse qui règne le long de l'aile, soit sur la face concave, soit sur la face convexe.

La démonstration faite au paragraphe précédent est basée sur l'approximation (102). Dire que  $\delta_a$  peut être considéré comme constant dans l'intégration, c'est (fig. 36) admettre que la différence entre l'aire vraie du diagramme de

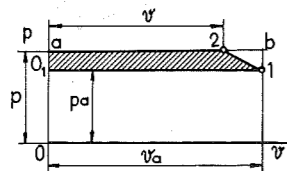


Fig. 36.

compression et la surface rectangulaire de base  $v_a$ , est négligeable.

Pour de faibles différences de pression, il en est ainsi, mais on peut se rapprocher de la valeur vraie pour des écarts très grands de pression, en écrivant :

$$\int_{p_a}^p v dp = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta_a} \right) (p - p_a) \quad (108)$$

En procédant ainsi, on remplace le trapèze curviligne (0, v, 1, 2, a) de la figure 36, par un trapèze régulier.

La relation (102) pourra s'écrire, avec les notations ci-dessus,

$$\frac{1}{2} \frac{p_a}{\delta_a} \left( \frac{p}{p_a} - 1 \right) \left( \frac{\delta_a}{\delta} + 1 \right) = \frac{1}{2g} c_a^2 - \frac{1}{2g} c^2; \quad (109)$$

jointe à la relation (100) dans laquelle on a remplacé  $c$  par  $c_a$  :

$$\frac{p_a}{\delta_a} \left( \frac{p}{p_a} - 1 \right) = \frac{1}{2g} c_a^2 \frac{2e_1}{\rho}; \quad (110)$$

elle permettra de déterminer :

$$c^2 = c_a^2 \left[ 1 - \frac{2e_1}{\rho} \times \frac{1}{2} \left( \frac{\delta_a}{\delta} + 1 \right) \right] \quad (111)$$

En se donnant  $\frac{\delta_a}{\delta}$ , on trouvera directement  $c$  et il suffira de vérifier si l'équation de continuité (105) est satisfaite

$$\frac{c}{c_a} = \frac{\delta_a}{\delta} \quad (112)$$

§ 3. — Valeur de  $\frac{c}{c_a}$  au-delà de la vitesse du son

Tant que la vitesse  $c_a$  n'atteint pas la vitesse du son, le phénomène de l'écoulement par filets concentriques est possible et dans la réalité on se rapproche de cette limite, même aux vitesses relativement très grandes.

Quand la vitesse du son est atteinte, la dilatation de la masse élémentaire dans la direction de la vitesse cesse d'être possible. A la relation de continuité (105) qui devrait s'écrire sous sa forme générale :

$$c_a \delta_a \Delta r = c \delta dr \quad (113)$$

doit se substituer :

$$\delta_a \Delta r = \delta dr \quad (114)$$

puisque  $c$  reste égal à  $c_a$ .

La relation (100) doit être remplacée par :

$$p_a \left( \frac{p}{p_a} - 1 \right) = \frac{1}{\rho} \frac{1}{g} \int_{r_1}^{\rho} \delta c^2 dr$$

et en utilisant la nouvelle condition de continuité (114) :

$$p_a \left( \frac{p}{p_a} - 1 \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\delta_a}{g} c_a^2 \int_{r_1}^{\rho} \Delta r = \frac{\delta_a}{g} c_a^2 \frac{e_1}{\rho} \quad (115)$$

Ainsi au-delà du « mur du son » tout se passe comme si le fluide était de densité constante, la formule (1) restant applicable strictement.

Remarque. — Lorsqu'on raisonne sur le phénomène de l'écoulement le long de la face convexe, l'équation (110) doit être remplacée par :

$$\frac{p_a}{\delta_a} \left( \frac{p}{p_a} - 1 \right) = - \frac{1}{2g} c_a^2 \frac{2e_2}{\rho} \quad (116)$$

et l'équation (111) par :

$$c^2 = c_a^2 \left[ 1 + \frac{2e_2}{\rho} \times \frac{1}{2} \left( \frac{\delta_a}{\delta} + 1 \right) \right] \quad (117)$$

§ 4. — Distribution des vitesses le long d'une plaque courbe de rayon  $\rho$

Nous ferons les calculs pour un angle de déviation  $\alpha$  de  $5^\circ$  (fig. 37). Nous désignerons par  $\rho$  le rayon de la plaque par  $e_1$  et  $e_2$  les épaisseurs du flux déviées par la face concave et par la face convexe.

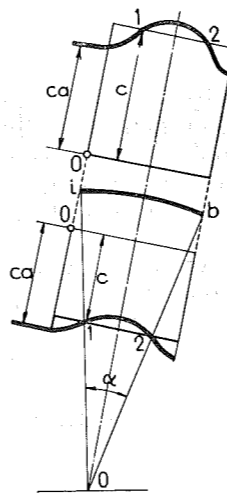


Fig. 37.

La valeur de  $\frac{e_1}{\rho}$  peut se calculer en observant

que :

$$\frac{e_1}{\rho} = \frac{e_1}{a} \frac{a}{\rho} = \frac{1}{3} \pi \times \frac{4}{3} \sin \alpha \quad (1) = \frac{4}{9} \pi \times 0,0872 = 0,122$$

$$\frac{e_2}{\rho} = 0,244$$

puisque  $e_2 = 2 e_1$ .

Si on ne donne  $c_a = 280$  msec et  $\frac{\delta_a}{\delta} = \frac{1}{1,15} = 0,872$  provisoirement, on trouve  $c = 247$  msec, valeur qui vérifie d'une façon suffisamment approchée la relation de continuité :

$$\frac{c}{c_a} = \frac{\delta_a}{\delta}$$

(1) Le facteur  $\frac{4}{3}$  sera expliqué dans la Cinquième Partie.

Pour la face convexe avec  $c_a = 280$  msec,  $\frac{\delta_a}{\delta} = 1,25$ .

$$c = 350 \text{ msec} \quad \text{et} \quad \frac{c}{c_a} = \frac{\delta_a}{\delta} = 1,25.$$

Ainsi pour le nombre de Mach,

$$M = \frac{c_a}{350} = 0,8$$

350 étant la vitesse du son au sol dans les conditions normales, la vitesse sur la face convexe, atteinte la vitesse du son, alors que la vitesse d'entrée  $c_a$  n'est que de 280 msec. Pour le filet qui longe la face concave, pour la même vitesse d'entrée  $c_a = 280$ , la vitesse réelle tombe à 247 msec. La figure 37 donne le diagramme des vitesses dans l'hypothèse des filets concentriques pour les deux faces.

Comme dans la réalité, le passage de  $c_a$  à  $c$  ne peut se faire brusquement, la loi de variation de la vitesse le long de l'arc externe, ou interne, est donné par le diagramme en trait fort.

On voit qu'entre les points 1 et 2, la vitesse dépasserait celle du son; la loi de continuité que nous avons utilisée cessant d'être possible, le phénomène devient plus complexe. Une perturbation se produit ainsi brusquement dans la couche influencée, même lorsqu'il ne s'agit encore que du seul filet longeant la face convexe.

Sur le diagramme expérimental que nous reproduisons figure 38 (1), le phénomène prend

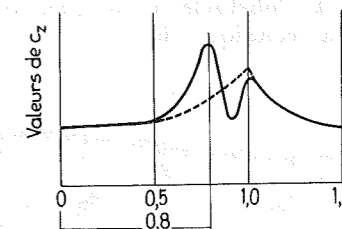


Fig. 38.

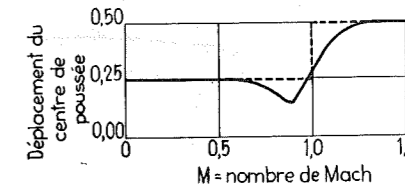


Fig. 39.

l'aspect d'une brusque expansion : la valeur de  $c_z$  passe, en effet, brusquement de la valeur  $c_z$  normale à l'origine, à  $2,5 c_z$ , pour retomber à  $c_z$  lorsque  $M = 0,9$  environ et reprendre la valeur  $2 c_z$  pour  $M = 1$ .

(1) Tiré de la Revue française des Ingénieurs de l'Automobile « Le mur du son », par M. Jean Brocard, Directeur des Recherches des Ateliers d'aviation Louis Breguet, Président de la Commission d'Aérodynamique de l'A.F. L.T.A. (n° du 20 octobre 1953).

Lorsque nous aborderons, dans la Cinquième Partie, l'étude du phénomène de la sustentation, et la détermination théorique des valeurs de  $c_z$  et  $c_x$ , nous reviendrons sur cette analyse, et nous donnerons une explication de cette variation de  $c_z$  que l'on retrouve égale à  $2c_z$  pour  $M = 1$ , et égale à la valeur initiale  $c_z$  pour  $M = 1,5$ .

Nous aurons aussi à ce moment l'occasion d'expliquer le déplacement du centre de poussée, dont la variation est donnée par la figure 39 en fonction du nombre de Mach.

Nous nous bornerons, pour le moment, à examiner les conséquences de la perturbation relativement à la traînée de profil qui est fournie par la figure 40.

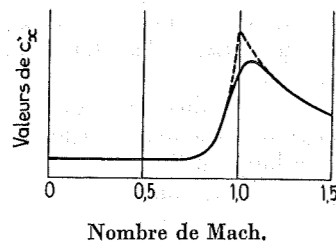


Fig. 40.

§ 5. — Distribution des vitesses le long du profil

Nous ne nous occuperons que de la partie avant, allant de la pointe avant au point d'inflexion, le diagramme pour l'arrière étant pour le surplus, entièrement symétrique lorsque l'on a affaire à l'obstacle remorqué, le seul qui intéresse la technique (fig. 41).

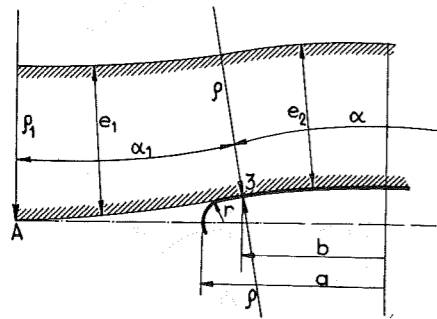


Fig. 41.

Pour le bout cylindrique (fig. 42) de rayon  $r$ , nous pourrions calculer la valeur de  $p$  dans la zone morte s'étendant jusqu'au point d'inflexion  $b$ , en raisonnant comme nous l'avons fait au chapitre II, de la Première Partie.

Lorsque la vitesse du son est atteinte, en effet, la déviation d'ensemble de toute la masse influencée ne prend plus la forme de la figure 41, mais, comme le montre la photographie (fig. 46), une partie du flux influencée, celle

qui correspond au rayon  $r$  du cylindre de pointe, dont l'épaisseur est donnée par :

$$e_1 = 0,365 \rho = 0,730 r$$

se détache au point d'inflexion pour donner lieu à des tourbillons dans la direction de la perpendiculaire au point  $b$ , c'est-à-dire sous un angle de  $42^\circ$ .

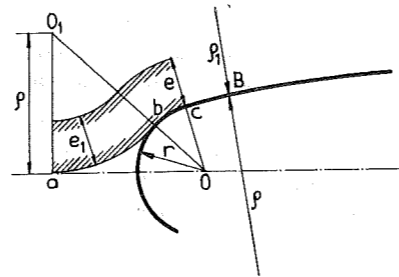


Fig. 42.

On peut se rendre compte qu'avec  $c_a = 280$  m c'est-à-dire pour un nombre de Mach égal à 0,8, la valeur de  $c$  tombe à 180 msec pour passer de 180 à 280 msec au point d'inflexion, et s'écouler sous la différence de pression ( $p_a - p$ ), le long de la face  $bcB$ .

En appliquant les mêmes équations que précédemment et en tenant compte que :

$$\frac{e_2}{\rho} = \frac{e_1}{\rho} = 2 \frac{e_1}{\rho_1} = 0,730$$

on trouve que  $c$  doit atteindre au-delà du point d'inflexion 390 msec.

Ainsi au nombre de Mach égal à 0,8, la vitesse limite pour le seul filet, il est vrai, longeant la paroi, est déjà dépassée : la vitesse de 350 msec serait donc réalisée pour un nombre de Mach légèrement inférieur à 0,8. Les troubles apportés par l'action de la pointe vont faire « gonfler » la couche influencée par le profil (fig. 41), si bien que la valeur  $e_1$  va passer plus ou moins progressivement de :

$$0,06 \frac{a}{x} \quad \text{à} \quad 2,09 \frac{a}{x}$$

comme nous l'avons établi à la fin de la Première Partie pour des profils tracés avec un allongement égal ou plus grand que l'allongement optimum.

Nous admettrons que cette « expansion » qui commence un peu avant  $M = 0,8$ , se poursuit jusqu'à ce que la valeur I soit réalisée, valeur pour laquelle l'épaisseur de la couche déviée atteindra  $2,09 \frac{a}{x}$ , c'est-à-dire une valeur égale à

$\frac{2}{3} \pi$  de l'arc actif de déviation c'est-à-dire la totalité de l'épaisseur de la couche influencée.

A ce moment, la relation (110) pour l'arc d'approche, la relation (117) pour l'arc de redressement de rayon  $\rho$  (fig. 41), devront être appliqués, en donnant à  $e_1$  la valeur :

$$e_1 = 2,09 \frac{a}{x}$$

Comme on peut établir que :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3} mx \quad (118)$$

on voit que pour  $mx = \frac{1}{6,15}$ ,  $x = 1,3$ ,  $m = \frac{1}{8}$ ,

$$\sin \alpha = 0,216,$$

$$e_1 = 2,09 \times \frac{\rho \alpha}{x} = 2,09 \times \frac{\rho \times 0,216}{1,3} = 0,350 \rho$$

soit :

$$\frac{e_1}{\rho} = \frac{e_2}{\rho} = 0,350 \quad \text{ou} \quad \frac{e_1}{\rho_1} = 0,175 \quad (119)$$

Les calculs faits sur cette base conduisent pour l'arc d'approche à  $c = 290$  msec lorsque  $c_a = 350$  msec.

Ceci veut dire que pour  $M = 1$ , la surpression au point d'inflexion 3 (fig. 41), passe par un maximum, et que l'énergie ainsi accumulée dans la masse d'épaisseur  $e_1$  va se libérer, en donnant lieu à une véritable explosion connue sous le nom de « bang ».

sorte superposés, amenant ce que l'on pourrait appeler une réaction en chaîne.

Nous pouvons donc conclure que pour le nombre de Mach égal à 1, c'est bien la formule (88) qu'il faut appliquer, et qu'entre  $M = 0,8$  et  $M = 1,0$ , la valeur de  $c_x'$  doit passer de la valeur donnée par la relation (87) à la valeur limite, plus ou moins progressivement.

Sur la figure 43, nous avons donné les résultats des calculs faits pour  $m = \frac{1}{8}$ ,  $x = 1,70$ , puis

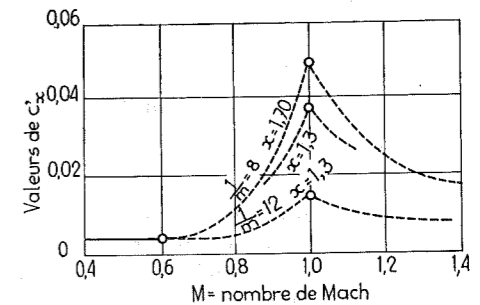


Fig. 43.

$m = \frac{1}{8}$  et  $x = 1,30$ , et enfin pour  $m = \frac{1}{12}$  et  $x = 1,30$ .

On voit qu'aux environs du mur du son, l'augmentation de l'allongement prend une

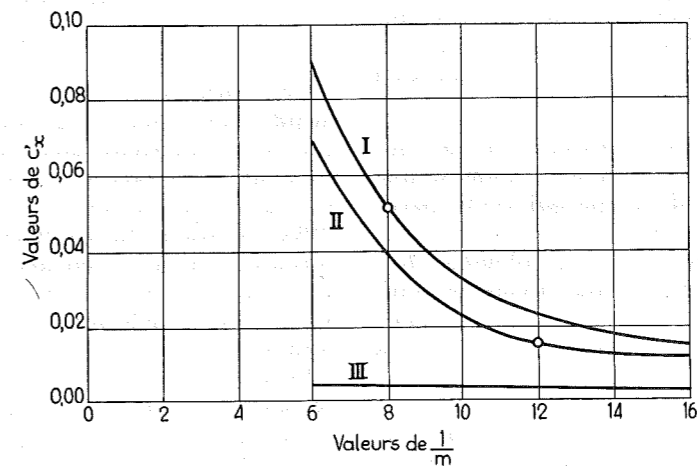


Fig. 44.

Cette énergie ne pouvant se transformer en énergie cinétique orientée puisque, à la vitesse du son, la propagation de la dilatation ne peut plus se faire dans la direction de la vitesse elle-même, il en résulte une expansion dans la direction perpendiculaire à la face de l'aube carénée, qui amène  $e_1$  à atteindre sa valeur limite. Cause et effet se trouvent en quelque

importance prépondérante, la réduction de  $c_x'$  en passant de :

$$\frac{1}{m} = 8 \quad \text{à} \quad \frac{1}{m} = 12,$$

étant dans le rapport 3 à 1, en chiffres ronds.

Le diagramme de la figure 44 fait ressortir clairement ce fait, puisque pour les vitesses

ordinaires la courbe III donne les valeurs  $c_w'$  et que cette courbe convient à la fois pour  $\frac{1}{m} = 8$  et  $\frac{1}{m} = 12$  de façon suffisamment approchée, alors qu'aux vitesses soniques, le gain se traduit par une chute de  $c_w'$  :

en passant de  $\frac{1}{m} = 8, x = 1,7$   
de 0,051 à 0,040  
à  $\frac{1}{m} = 8, x = 1,3$

en passant de  $\frac{1}{m} = 8, x = 1,7$   
de 0,051 à 0,014  
à  $\frac{1}{m} = 12, x = 1,3$

Nous croyons avoir clairement montré ce qui provoque la perturbation connue sous le nom de « mur du son » : l'impossibilité à partir de la vitesse du son d'un accroissement de cette vitesse dans la direction tangentielle et l'apparition brusque d'une discontinuité, provoquant :

- 1) un accroissement de la couche influencée par le maître-couple, dont l'épaisseur passe de  $0,06 \frac{a}{x}$  à  $2,09 \frac{a}{x}$ , soit à une valeur 35 fois plus grande ;
- 2) une libération brusque d'énergie concentrée cette fois dans une épaisseur 35 fois plus grande du flux influencé, au point d'inflexion avant, et partant au point d'inflexion arrière.

Nous montrerons dans l'exposé de la Cinquième Partie qu'il existe une seconde source de brusque libération d'énergie qui peut provoquer un second « bang ».

A partir du mur du son, un gonflement doit nécessairement se produire dans la couche influencée pour satisfaire à la loi de continuité (114), gonflement qui va se résorbant lorsque à la sortie, la valeur de  $\delta$  reprend la valeur d'entrée  $\delta_a$ .

La relation (115) montre, pour le surplus, que cette dilatation dans le sens radial n'entraîne pas un accroissement ou un abaissement de la différence de pression sur l'aile, et qu'ainsi, au-delà de la période perturbée, la valeur de  $c_z$  redevient égale à la valeur normale constatée aux faibles valeurs de la vitesse d'entrée.

L'image que l'on peut se faire de la perturbation aux points d'inflexion lorsque la vitesse du son est atteinte, est représentée figure 45, les angles de  $42^\circ$  à l'avant, et  $130^\circ$  à l'arrière étant les angles théoriques tels qu'ils ressortent de l'exposé du chapitre II de la Première Partie.

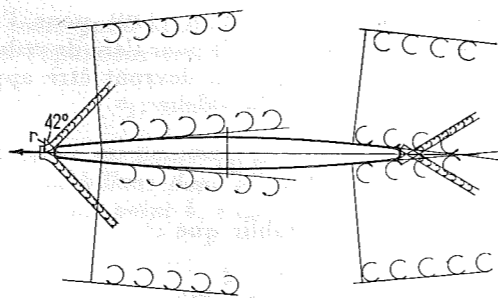


Fig. 45.

La photographie (fig. 46) de l'aile sur laquelle agit le flux aux environs de la vitesse du son, montre l'identité des deux images.

Nous voulons croire que, poussée jusque là, l'analyse chiffrée des phénomènes provoqués par le flux sur l'obstacle, aura pour conséquence une meilleure connaissance de la perturbation connue sous le nom de « mur du son ».

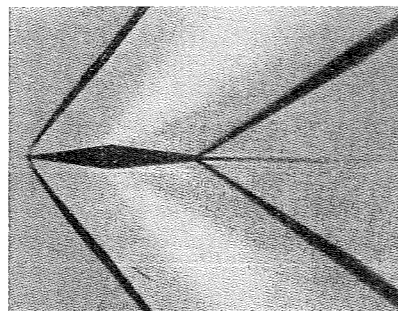


Fig. 46.

Les formules établies permettent pour le surplus d'évaluer l'importance des dépressions qui se manifestent aux points d'inflexion au moment du passage à la vitesse du son ; les énergies mises en jeu pourront même être calculées.

La question du carénage, de l'allongement optimum, du tracé des ailes destinés à passer le mur du son ont pu être abordées avec succès puisque les conclusions sont conformes à celles établies par l'expérimentation systématique.

Cela nous a incité à utiliser ce mode de raisonnement, à l'étude du carénage des coques de navire que nous allons présenter dans la Quatrième Partie.

Comme la question du frottement joue dans cette étude un rôle important, si pas prépondérant, nous avons été amené à reprendre le problème du calcul des pertes par frottement dans les tuyauteries, tant pour des tuyaux lisses que pour des tuyaux rugueux, puis à généraliser l'application de ces idées, au calcul des pertes par frottement pour des surfaces en rotation et en translation.

Ce sera l'objet de la Troisième Partie qui va suivre.

## TROISIÈME PARTIE

### ÉTUDE DU COEFFICIENT DE FROTTEMENT UTILISÉ DANS LE CALCUL DES PERTES DE CHARGE ET DE LA RÉSISTANCE À L'AVANCEMENT DES CARÈNES

#### INTRODUCTION

Dans l'étude que nous avons publiée en 1953 sur la *Résistance à l'avancement des carènes* <sup>(1)</sup>, nous avons regardé comme valables pour le calcul du terme relatif au frottement, la valeur  $2k_1'$  tirée de la formule proposée par nous en 1928 <sup>(2)</sup>.

Cette formule se rapportait strictement aux disques en rotation dans un fluide quelconque, mais nous avons des raisons de croire qu'elle s'appliquait également aux surfaces planes en translation, surtout dans la région des grands nombres de Reynolds qui correspond précisément au cas des carènes de navire.

Il n'en est pas moins vrai que cette façon d'opérer pouvait éveiller un doute sur la légitimité de cette généralisation, et c'est ainsi que nous avons entrepris un travail de synthèse dont la portée a dépassé nos espérances, puisque nous sommes parvenu à relier la valeur du coefficient  $\lambda$  utilisé dans le calcul des pertes de charge, à la valeur  $2k_1'$  utilisée pour l'évaluation des pertes par frottement dans le cas des surfaces en translation.

#### § I. — Formule utilisée pour les tuyaux lisses et rugueux

Rappelons tout d'abord comment s'introduit dans la formule pour le calcul de la perte de charge, le coefficient  $\lambda$ .

En partant de l'idée simpliste que la résistance au déplacement du fluide provient *tout entière* de l'action de la paroi sur le fluide, on admet que la résistance élémentaire  $dJ$ , pour un élément de périmètre  $m$ , de longueur  $ds$  suivant l'axe, est proportionnelle :

- a) à la surface mouillée ( $m ds$ ),
- b) au poids spécifique  $\delta$  du fluide envisagé,

- c) au carré de la vitesse  $c$  de déplacement du fluide, soit :

$$dJ = k (m ds) \delta c^2$$

$k$  étant le coefficient de proportionnalité.

La perte de charge  $h$  étant par définition la hauteur de la colonne de liquide qui fait équilibre à la résistance de frottement, nous pourrions écrire d'autre part :

$$dJ = \sigma \delta dh.$$

D'où  $L$  étant la longueur de la conduite,  $\sigma$  sa section :

$$h = \lambda \left( \frac{m}{\sigma} \right) \frac{c^2}{2g} \times L \quad (121)$$

formule classique dans laquelle  $\lambda$  est mis pour  $2 gk$  :

$$\lambda = 2 gk \quad (122)$$

En raison de ce que la perte n'est pas entièrement concentrée à la paroi,  $\lambda$  n'est pas une constante, mais une fonction du coefficient de Reynolds pour les tuyaux lisses, du coefficient de Reynolds et de la rugosité pour les tuyaux rugueux.

Stanton a proposé pour représenter, dans le cas des tuyaux lisses, une formule à deux termes :

$$\lambda = \frac{0,133}{Re^{1/3}} + 0,00167 \quad (123)$$

dans laquelle  $Re$  est donné par la relation :

$$Re = \frac{10 \delta \times c \times d}{\mu} \quad (123b)$$

$\mu$  désignant la viscosité absolue dans le système C.G.S., des tables des constantes physiques.

<sup>(1)</sup> Strictement cette formule proposée par Stanton était la suivante :

$$\lambda = \frac{0,153}{Re^{0,35}} + 0,00179$$

<sup>(1)</sup> R.U.M., 9<sup>e</sup> série, tome IX, N<sup>o</sup> 3, 1953.

<sup>(2)</sup> R.U.M., 7<sup>e</sup> série, tome XVIII, 1928.

Nous avons cherché en 1922, en partant de cette relation, à grouper tous les résultats connus sur les tuyaux rugueux (rassemblés par *Lebeau* pour les deux catégories de tuyaux couramment utilisés, les tuyaux en fer d'une part et les tuyaux en fonte d'autre part) et nous sommes parvenu à établir qu'une formule de la forme ci-dessus *suffisait* pour coordonner toutes les valeurs, à la condition de faire dépendre la constante de la rugosité relative.

2) pour  $d = \infty$  c'est-à-dire pour une rugosité relative nulle, nous devons également retrouver la valeur de *Stanton*.

Le tableau III est tiré de la valeur explicite de  $f\left(d \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)$  que nous avons proposée pour coordonner d'une façon tout à fait satisfaisante l'ensemble des valeurs expérimentales se rapportant tant aux tuyaux lisses qu'aux tuyaux rugueux.

Tableau III

$d \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$ ou $2/3 H \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$	$10^4 b'$ ou $10^4 f\left(\frac{2}{3} H \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)$	diff.	$d \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$ ou $2/3 H \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$	$10^4 b'$ ou $10^4 f\left(\frac{2}{3} H \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)$	diff.	$d \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$ ou $2/3 H \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$	$10^4 b'$ ou $10^4 f\left(\frac{2}{3} H \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)$	diff.
1,500	3,30	0,20	0,600	7,65	0,94	0,200	12,90	0,58
1,400	3,50	0,23	0,500	8,75	1,10	0,175	13,72	0,82
1,300	3,73	0,27	0,450	9,30	0,55	0,150	14,85	1,13
1,200	4,00	0,27	0,400	9,90	0,60	0,135	15,80	0,95
1,100	4,33	0,33	0,350	10,54	0,64	0,120	16,80	1,00
1,000	4,75	0,42	0,300	11,20	0,66	0,110	17,50	0,70
0,900	5,28	0,53	0,275	11,55	0,35	0,100	18,22	0,72
0,800	5,93	0,65	0,250	11,92	0,37	0,090	18,96	0,74
0,700	6,71	0,78	0,225	12,32	0,40	0,080	19,72	0,76

Nous disons rugosité relative car il est évident que si nous voulons caractériser la rugosité par une *valeur moyenne*  $\varepsilon$  des rugosités, le facteur qui interviendra n'est pas  $\varepsilon$ , en valeur absolue, mais le rapport  $\varepsilon/d$  ou  $d/\varepsilon$ , qui fait apparaître un nombre proportionnel à la valeur relative de la rugosité.

Comme il ne pouvait être question d'introduire dans le calcul une valeur numérique de  $\varepsilon$ , nous avons eu l'idée de désigner par  $\varepsilon_1$ , la rugosité du fer et d'introduire la fonction  $f\left(d \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)$  pour les tuyaux de rugosité quelconque  $\varepsilon$ .

En posant :

$$\lambda = \frac{0,133}{Re^{1/3}} + 0,00157 \times f\left(d \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right) \quad (124)$$

et en donnant à la fonction la forme exponentielle, nous avons pu déduire celle-ci, des deux conditions suivantes :

1) pour  $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \infty$  c'est-à-dire pour la rugosité  $\varepsilon$  nulle, nous devons retrouver la valeur de *Stanton*, valable pour les tuyaux lisses ;

Il permet de trouver simplement la valeur de  $\lambda$  quand on connaît  $Re$ , en ajoutant au premier terme, la valeur du second déduite du tableau III, à partir de  $\varepsilon_1/\varepsilon$ . Pour le fer  $\varepsilon_1/\varepsilon$  doit être pris égal à l'unité ; pour la fonte on peut prendre normalement  $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = 1/8$ .

La valeur pratique de cette formule s'est confirmée au cours d'une dizaine d'années d'application. En présence de ce succès, nous avons été amené dès 1928, à tenter une synthèse analogue pour tous les résultats connus sur le frottement des disques, en utilisant comme nous l'avions fait pour les tuyaux, une formule à deux termes.

§ 2. — Formule utilisée pour les disques

Rappelons tout d'abord la méthode utilisée pour le calcul du couple, en partant de la notion ci-dessus du coefficient  $k$  de proportionnalité.

Pour un élément de surface ( $2\pi r dr$ ) (fig. 1), le couple élémentaire  $dC$  provenant de la résistance du frottement, peut s'évaluer à :

$$dC = k (2 \pi r dr) \delta \omega^2 r^2 \times r$$

Soit pour  $C$  et pour les 2 faces du disque :

$$C = 4 \pi k \delta \omega^2 \int_0^R r^4 dr = \frac{4 \pi}{5} k \delta \omega^2 R^5 \quad (125)$$

Des résultats expérimentaux fournis généralement sous la forme : puissances en ordonnées, nombres de Reynolds en abscisses, on peut déduire  $C$  puis le coefficient  $k$ .

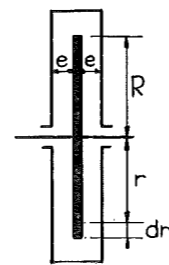


Fig. 47.

Comme la distance  $e$  entre le disque et la paroi de l'enveloppe, intervient, les diagrammes sont tracés en fonction de  $Re$ , pour un même diamètre  $2R$  et pour différentes distances  $e$  et cela pour différents matériaux et différents fluides.

On trouvera dans le tome XVIII 7<sup>e</sup> série de la *R.U.M.* (1928), les principaux diagrammes utilisés en vue de cette synthèse qui nous a conduit à la relation :

$$10^6 k = \frac{337.000}{Re^{2/3}} + B \quad (126)$$

dans laquelle  $B$  prend la valeur 116 pour les disques lisses et pour  $\frac{e}{R} = \infty$ .

Dans cette relation  $Re$  a été calculé en introduisant pour le facteur dimension, le rayon  $R$  :

$$Re = \frac{10 \delta (\omega R) \times R}{\mu}$$

§ 3. — Formule utilisée pour les surfaces en translation

Avant de passer à la synthèse des valeurs de  $k$  pour les tuyaux et pour les disques, établissons en fonction de  $k$ , la valeur de la résistance  $J$  pour une plaque plane de surface  $2s$  immergée et en translation, la vitesse de cette translation étant désignée par  $c$  :

$$J = 2 k \delta s c^2$$

Pour retrouver le coefficient  $2k''$  utilisé dans l'étude de la résistance à l'avancement des carènes, il faut noter que l'expression du coefficient  $C_2$  de l'étude des carènes, peut s'écrire en fonction de  $J$  :

$$C_2 = \frac{J}{\delta/g \cdot S c^2} = \frac{2 k \delta s c^2}{\delta/g \cdot S c^2} = 2 gk \left(\frac{s}{S}\right)$$

$S$  étant la section au maître-couple du navire.

En désignant par  $s$  la surface latérale immergée du navire d'un seul côté, nous avons écrit :

$$C_2 = 2 k'' \left(\frac{s}{S}\right) \quad (127)$$

On voit donc que :

$$\lambda = 2 gk = 2 k''$$

De la formule (6) ci-dessus, on peut donc déduire :

$$2 k'' = \frac{6,72}{Re^{2/3}} + 0,00228. \quad (128)$$

$2k''$  ne représente pas autre chose que le coefficient de *Froude*. Lorsqu'on voudra transposer les valeurs tirées de la formule (128) dans le diagramme donnant les valeurs de *Froude*, il faudra toutefois tenir compte que pour les disques, nous avons introduit un coefficient de *Reynolds* calculé en prenant comme facteur de dimension  $R$  et non  $L$  longueur de la surface remorquée (ainsi que l'a fait *Froude*). Entre les deux valeurs de  $Re$  ainsi calculées, il existe donc un rapport qui peut pratiquement varier de 10 à 20 ; il faudra donc faire correspondre aux abscisses de *Froude*, des valeurs établies par la formule (128) en prenant pour  $Re$  des valeurs 15 fois en moyenne, plus petites. En d'autres termes les valeurs calculées par la formule (128) pour  $Re = 10^4, 10^5$ , correspondent à des abscisses dans le diagramme de la figure 2 :

$$1,5 \times 10^5, 1,5 \times 10^6...$$

§ 4. — Valeurs limites pour les deux cas  $\lambda$  et  $2k''$

Les formules (123) et (128) toutes deux écrites pour le cas d'une surface lisse, devraient conduire à la même valeur limite pour  $Re = \infty$  ; or nous trouvons d'une part 0,00167 et d'autre part 0,00228.

Il y a là une contradiction car pour la limite  $R = \infty$ , le coefficient  $k$  devient constant et la formule (125) déduite par intégration en faisant sortir du signe intégral le coefficient  $k$  devient mathématiquement rigoureuse. Si cette contradiction était irréductible, il faudrait en inférer que les résultats fournis par les expériences sur les disques lisses même aux grandes valeurs du coefficient des Reynolds, ne peuvent correspondre aux résultats des expériences sur les tuyaux lisses.

Avant d'en arriver là, nous avons repris l'étude des disques à partir des documents originaux. A la lumière des connaissances d'ensemble acquises depuis 1928, nous avons

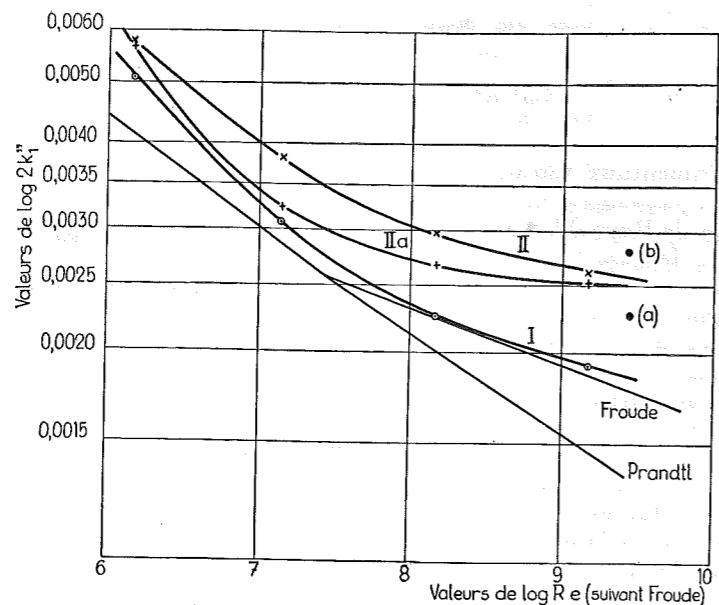


Fig. 48.

compris rapidement que l'épaisseur  $e$  du flux influencé par les disques en rotation, était de l'ordre de  $0,35 R$  et que le paramètre  $\frac{e}{R}$  qui avait servi à tracer le diagramme (figure 49) de la constante  $B$  dans la formule (126), ne tend pas à croître jusqu'à l'infini, mais jusqu'à une valeur limite de l'ordre de  $0,35$  ( $1/3$  en chiffres ronds).

Nous reproduisons figure 49 le diagramme donnant dans notre première étude, les valeurs de  $B$ , la partie en pointillé représentant les extrapolations que nous avons admises faute d'avoir compris que l'épaisseur influencée était limitée à une valeur de l'ordre de  $0,35 R$ . Ce point admis il en résulte que l'asymptote que nous avons située pour les surfaces lisses (courbe limite inférieure) à la cote 116, ne dépasse pas  $90$ , valeur mesurée sur le diagramme pour l'abscisse  $0,5$ .

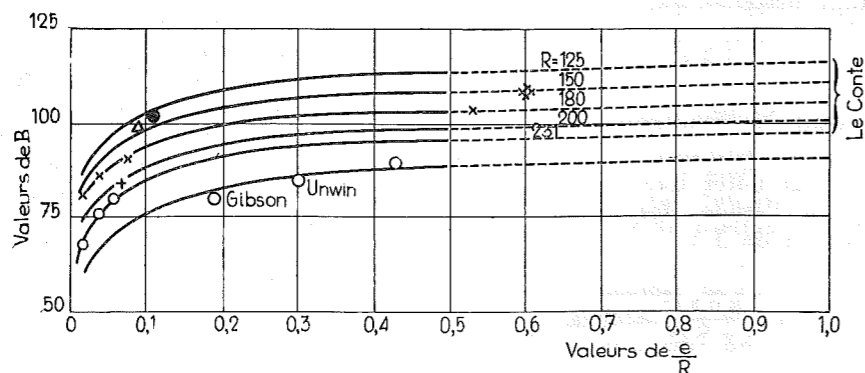


Fig. 49.

Si nous adoptons cette valeur de  $90$ , nous retrouvons pour la constante non  $0,00228$ , mais  $0,00177$  qui correspond pratiquement à la constante de la formule (123). Cette concordance non voulue, puisque nous nous sommes servi pour l'établir de diagrammes tracés en 1928, pourrait suffire à nous convaincre de ce que les deux limites doivent coïncider.

Mais le fait qu'en utilisant la nouvelle valeur de  $B$ , nous retrouvons pour tracer le diagramme des valeurs de  $\log(10^6 k - B)$ , des points qui se groupent beaucoup plus rationnellement, avec une dispersion de plus en plus faible à mesure que les valeurs de  $Re$  grandissent, montre péremptoirement que c'est bien comme nous le faisons en ce moment, qu'il faut coordonner l'ensemble impressionnant des résultats fournis par le diagramme de la figure 50.

Là ne se bornent pas les avantages de la nouvelle synthèse; dans la coordination anté-

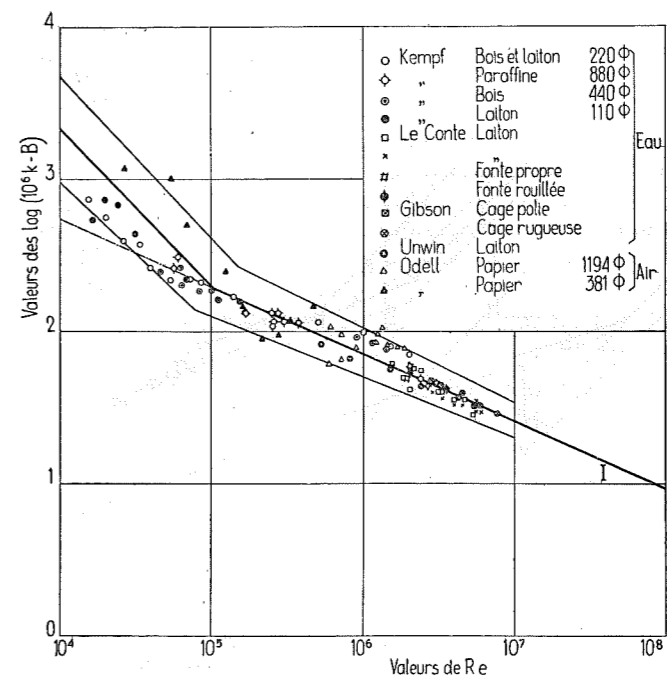


Fig. 50.

rieure, il avait fallu faire un sort spécial aux essais effectués avec les disques en papier tournant dans l'air : ces points sont particulièrement dispersés, il est vrai, mais pour faire cadrer la moyenne avec les autres, nous avons dû admettre un effet de ventilation qui n'apparaissait pas pour les disques tournant dans l'eau.

A l'heure présente, avec les nouvelles valeurs de la constante  $B$ , ces points se groupent comme les autres, compte tenu d'une dispersion plus grande, et cela sur une droite unique non distincte à partir du nombre de Reynolds égal à  $10^5$ .

Il nous a fallu toutefois admettre que pour le disque en papier de petite dimension, la rugosité de la surface était analogue à celle des disques en laiton de Le Conte, ce qui ne peut apparaître en rien anormal, et que pour le disque de  $1,200$  m de diamètre, la rugosité était de l'ordre de celle du fer, ce qui peut s'expliquer aisément par un léger plissement latéral dont l'effet aura été de faire croître la rugosité apparente et d'amener une dispersion plus grande des points observés. Cette fois, nous pouvons dire que c'est la formule nouvelle (129), qui traduit fidèlement le diagramme I en trait fort de la figure 4 entre l'abscisse  $10^5$  et l'abscisse  $10^8$  :

$$2 k_1'' = \frac{0,695}{Re^{0,45}} + 0,00177 \quad (129)$$

Nous nous sommes demandé toutefois à quel diagramme d'ensemble nous aurions été conduit si nous avions admis pour la constante  $B$  le chiffre  $85$  au lieu de  $90$  qui aurait fait

apparaître dans la formule (129) la constante  $0,00167$  au lieu de  $0,00177$ .

Nous avons repris pour cela le calcul de  $\log(10^6 k - 85)$  pour les différentes abscisses, et tracé figure 51 les nouveaux points, sensiblement plus hauts à partir de l'abscisse  $10^6$ .

Le groupement apparaît cette fois plus satisfaisant autour de la moyenne représentée par la droite I, pour le régime turbulent et autour de la droite II, pour le régime laminaire, cette dernière droite étant toutefois distincte de la droite IIb valant seulement pour le disque en papier tournant dans l'air.

Nous ne sommes pas en mesure, à vrai dire, d'affirmer que les points qui se groupent sur les droites II et IIb relèvent du régime laminaire. Ces droites qui répondent bien à la moyenne des points observés, ont pour équations :

$$2 k_1'' = \frac{A}{Re}$$

de la même forme que celle valable pour les tuyaux en régime laminaire, mais avec une constante  $A$  beaucoup plus élevée que pour ces derniers.

Nous pensons toutefois que cette manière de coordonner l'ensemble est plus satisfaisante et que la formule que traduit la courbe I, doit devenir définitive; elle est valable pour le régime turbulent entre les valeurs de :

$$Re = 10^5 \text{ et } Re = 10^8$$

$$2 k_1'' = \frac{0,286}{Re^{0,384}} + 0,00167 \quad (130)$$

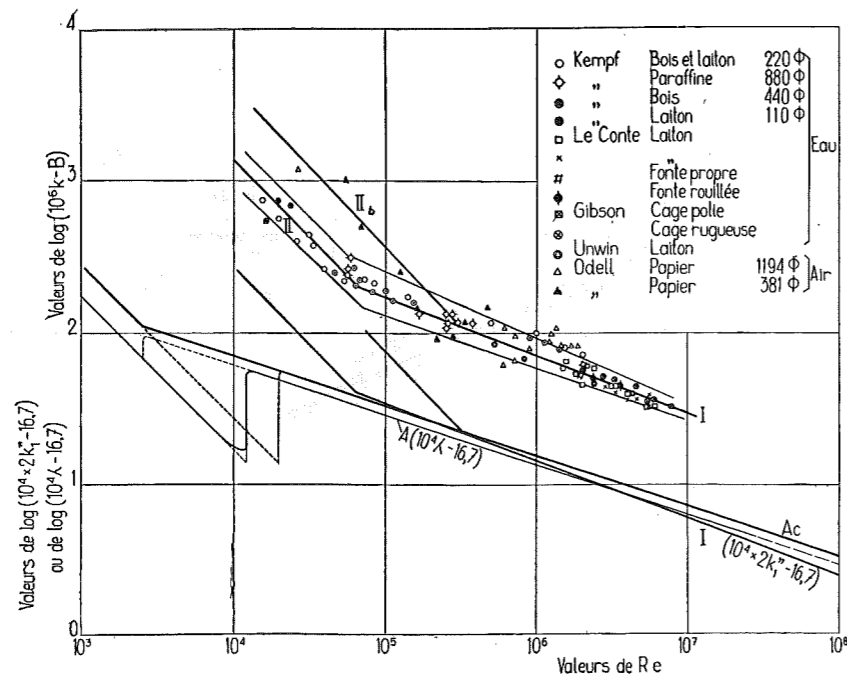


Fig. 51.

Cette formule se rapproche davantage de la formule (123) établie pour les tuyaux lisses entre les limites que nous venons d'indiquer.

Nous présenterons plus loin un diagramme comparatif des valeurs de :

$$2k''_1 \text{ et de } \lambda.$$

§ 5. — Etude de la formule pour le cas des surfaces rugueuses

Nous avons vu que pour les tuyaux, la valeur de la constante change quand la rugosité varie.

Pour coordonner les expériences de Le Conte avec celles des autres expérimentateurs, nous avons dû admettre que la constante B était

fonction de  $\frac{e}{R}$  et que l'asymptote variait avec le diamètre, comme cela se voit figure 49. Ici encore nous avons trouvé une coordination inespérée : faisant usage du tableau I dressé pour les tuyaux rugueux, nous avons pu faire apparaître que tous les disques essayés par Le Conte présentaient une même rugosité.

Voici comment nous avons conduit le calcul. Nous avons dressé le tableau IV des valeurs

Tableau IV

1	2	3	4	5	6	7	8
R ou H	$2/3 R \frac{\epsilon_1}{e}$	B	$0,00157 + b'$	$10^4 b'$	Valeur déduite du tableau I	$\frac{\epsilon_1}{e}$	Moyenne
0,125	$0,083 \frac{\epsilon_1}{e}$	114	0,00224	6,7	0,700	8,5	$\epsilon = \frac{1}{9} \epsilon_1$
0,150	0,100	109	0,00216	5,9	0,800	8,0	
0,180	0,120	104	0,00200	4,3	1,100	9,2	
0,200	0,133	99	0,00196	3,9	1,240	9,3	
0,230	0,153	96	0,00188	3,1	1,550	10,1	
0,200	$0,133 \frac{\epsilon_1}{e}$	110	0,00216	5,9	0,800	6,0	$\epsilon = \frac{1}{6} \epsilon_1$
0,600	0,400	140	0,00275	11,8	0,258	0,65	$\epsilon = 1,5 \epsilon_1$

asymptotiques de B déduites de la figure 49 (colonne N° 3).

Si nous admettons que  $\frac{e}{R}$  limite est de l'ordre de 1/3, valeur voisine de la limite 0,35 nous pouvons écrire :

$$\frac{e}{\epsilon} = \frac{R}{3} \frac{1}{\epsilon}$$

Au rapport  $\frac{d \epsilon_1}{2 \epsilon}$  du tableau III, nous aurons à faire correspondre :

$$\frac{R \epsilon_1}{3 \epsilon}$$

Nous disons  $\frac{d}{2}$  car la courbe donnant la loi de distribution des vitesses dans la section du tuyau, atteint son maximum pour  $\frac{d}{2}$ , comme il atteint son maximum dans le cas du disque, pour la distance  $e$ ,  $e$  étant mesuré à partir de la paroi latérale de celui-ci. Ainsi, à  $d \frac{\epsilon_1}{2}$  devra

correspondre  $\frac{2R}{3} \times \frac{\epsilon_1}{\epsilon}$  que nous inscrivons dans la colonne N° 2 du tableau IV.

Dans la colonne N° 3 nous avons fait figurer comme nous l'avons dit plus haut, les valeurs de B lues au diagramme figure 49 et nous en avons déduit les valeurs de  $b' + 0,00157$  égales à  $10^{-6} \times 2gB$ , puis de  $10^4 b'$  et enfin en nous servant du tableau I, les valeurs de  $\frac{2R \epsilon_1}{3 \epsilon}$ .

En comparant les valeurs de la colonne 6 avec celles de la colonne 2, nous avons pu calculer  $\frac{\epsilon_1}{e}$ .

La valeur moyenne comme on le voit, correspond à un chiffre tel que 9,0 ce qui veut dire que la rugosité des disques en laiton des expériences de Le Conte était de l'ordre de  $\frac{1}{9} \epsilon_1$ ,  $\epsilon_1$  représentant la rugosité du fer et fait remarquable parce que non voulu, était constant à  $\pm 9\%$ , ce qui veut dire constant, les erreurs d'expérience étant certainement de cet ordre.

Pour coordonner de façon satisfaisante les valeurs se rapportant aux disques en papier tournant dans l'air, nous disions plus haut que nous avons dû admettre pour le disque de rayon  $R = 0,190$ , une valeur de B égale à 110. Pour le disque de grand rayon ( $R = 0,600$ ) cette constante B a dû être portée à 140.

Cela nous a conduit pour le premier à :

$$\epsilon = \frac{1}{6} \epsilon_1$$

c'est-à-dire du même ordre de grandeur que celui des disques en laiton de Le Conte; par contre, pour le second, la rugosité devait atteindre  $1,5 \epsilon_1$ , ce qui peut s'expliquer si, en raison du grand diamètre de la feuille de papier il s'est produit un léger plissement en rotation, qui devait fatalement engendrer une perte supplémentaire, se traduisant par une valeur plus grande de la rugosité apparente.

§ 6. — Diagrammes comparés des valeurs de  $2k''_1$  et de  $\lambda$

Pour établir des diagrammes comparatifs, il faut se demander tout d'abord comment il convient de calculer les valeurs de Re qui figureront en abscisses.

Pour le cas des tuyaux, la valeur de Re a été établie en introduisant pour le facteur dimension, le diamètre  $d$ . Or, lorsqu'il s'agit du calcul de Re pour les disques, nous avons introduit le rayon R. Pour faire correspondre les abscisses des deux courbes envisagées, il faudrait utiliser non pas  $d$  mais  $\frac{\pi}{2} d$ ; nous

disons bien  $\frac{\pi}{2} d$  et non  $\pi d$  car par suite de la notation adoptée  $2k''_1$  pour les surfaces en rotation ou en translation, ce n'est pas la surface totale qui intervient dans le calcul mais la moitié, c'est-à-dire la surface d'une seule des faces.

Nous ferons donc correspondre au rayon R du disque (ou à la hauteur H de la surface immergée entraînée en translation), la valeur  $\frac{\pi d}{2}$ , d'où l'équivalence :

$$R = H = \pi \frac{d}{2} \text{ et partant } \frac{d}{2} = \frac{R}{\pi} = \frac{H}{\pi}$$

valeur qui correspond à celle déduite plus haut en partant de la limite de  $\frac{e}{R} = \frac{1}{3}$  puisque à  $\frac{d}{2}$  pour le tuyau, correspond la valeur  $e$  pour le disque, ces deux valeurs  $\frac{d}{2}$  et  $e$  représentant la limite d'influence.

Les diagrammes inférieurs de la figure 5 ont été dressés en utilisant les deux formules donnant respectivement  $2k''_1$  et  $\lambda$ , mais en ayant soin de porter en abscisse pour cette dernière :

$$\log \left( Re \times \frac{\pi}{2} \right).$$

La courbe A de  $10^4 \lambda - 16,7$ , étant tracée, il a suffi pour obtenir la courbe corrigée  $A_c$  de décaler horizontalement la première d'une quantité égale à  $\log \frac{\pi}{2}$ .

La courbe I de la figure 51 qui donne la valeur de  $(10^4 \times 2k_1'' - 16,7)$  doit donc être comparée à la courbe  $A_c$ .

On voit que les deux courbes sont très voisines l'une de l'autre, la courbe  $A_c$  étant toutefois sur presque toute l'étendue plus haute que la courbe I; ceci montre, que la distribution des vitesses à partir de la paroi, n'est pas la même dans les deux cas.

Nous avons complété les deux courbes inférieures en traçant les courbes expérimentales établies pour le régime laminaire.

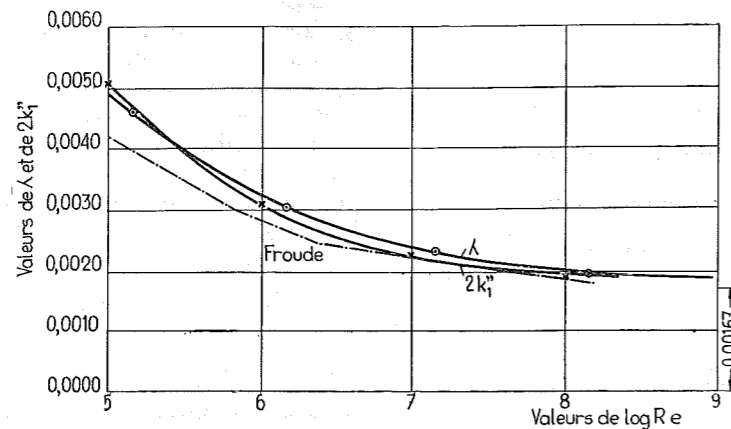


Fig. 52.

Pour les valeurs de  $Re$  supérieures à  $10^5$ , c'est donc les formules (123) et (130) qu'il faut appliquer et cela non seulement pour les surfaces en rotation, mais pour les surfaces en translation.

Pour le faire voir, nous avons tracé figure 52 les diagrammes des valeurs de  $2k_1''$  et de  $\lambda$  en fonction de  $\log Re$  pour  $2k_1''$ , de  $\log \left( Re \times \frac{\pi}{2} \right)$

pour  $\lambda$ ; nous avons ensuite marqué en pointillés la courbe de Froude de la figure 48 (1) en tenant compte de ce que les abscisses des diagrammes de la figure 48 ont été calculées en introduisant dans la valeur  $Re$  non  $H$  mais  $L$ , c'est-à-dire un facteur 15 fois trop grand, en moyenne.

Nous pouvons conclure cette fois, avec le degré d'approximation valable pour de tels calculs, que la formule établie par la voie expérimentale pour les disques, est applicable aux surfaces planes en translation.

Cette certitude doit être d'autant plus ancrée dans l'esprit que l'établissement des constantes qui figurent dans les deux formules, résulte d'une coordination de dizaines de milliers

(1) Courbe présentée dans la publication hollandaise *Weerstand en Voortstuwing van Schepen* du Dr Ir. W.P.A. Van Lammeren.

d'observations, ce qui leur donne une valeur statistique moyenne inattaquable.

Pour ceux qui resteraient sceptiques devant ces résultats, tout compte fait, inattendus, nous ferons remarquer que dans la région des grandes valeurs de  $Re$ , les pertes croissent pratiquement comme le carré de la vitesse, c'est-à-dire, conformément à la loi qui a servi à établir les deux formules donnant respectivement  $\lambda$  et  $2k_1''$ , ce qui fait que celles-ci prennent dans cette région une signification strictement mathématique.

Dire que les valeurs de  $\lambda$  et de  $2k_1''$  tendent à être indépendantes de  $Re$ , cela revient à admettre que la perte est de plus en plus localisée à la paroi, n'affectant qu'une couche de fluide de plus en plus faible.

L'image que l'on peut se faire ainsi du phénomène, à la faveur de cette remarque, aide à comprendre pourquoi :

1° les valeurs trouvées pour les surfaces en rotation, valent pour les surfaces en translation tout au moins dans la région des grandes valeurs de  $Re$ ;

2° dans le cas du calcul de la résistance des carènes, l'évaluation du terme dû à la déviation, se fait sans erreur appréciable en traitant le problème comme si toute la masse influencée, était animée de la même vitesse relative  $c$ .

#### § 7. — Influence de la rugosité sur le coefficient de résistance à l'avancement des carènes

Grâce au rapprochement que nous venons de faire entre les pertes de charges dans les tuyaux et les pertes à la paroi dans les disques ou les surfaces planes en translation, nous avons le moyen d'étendre la formule (130) au cas des surfaces rugueuses, en utilisant la notion de rugosité relative du mémoire de 1922.

En reprenant les valeurs calculées en fonction de  $\left( d \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right)$ , et en les faisant figurer dans le tableau III en fonction de la valeur correspondante lorsqu'il s'agit des surfaces en translation,  $\left( \frac{2}{3} H \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right)$ , nous pourrions déduire la valeur de la constante  $f \left( \frac{2}{3} H \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right)$ , puis celle de  $2k_1''$ , en appliquant la relation (130) :

$$2k_1'' = \frac{0,286}{Re^{0,384}} + 0,00157 + f \left( \frac{2}{3} H \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right) \quad (131)$$

Inversement si nous connaissons la valeur de la constante, nous pourrions en déduire le rapport  $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$ .

Dans les diagrammes de la figure 48, nous avons fait figurer la courbe I qui correspond aux surfaces lisses, c'est-à-dire à la constante  $f \left( \frac{2}{3} H \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right) = 0,0001$ , constante qui ramène la formule (131) à la formule (130), pour ce cas particulier.

Nous avons tenu compte bien entendu, pour le tracé en question, de la remarque que nous avons faite plus haut, quant à la valeur des abscisses.

La courbe II a été calculée en adoptant pour  $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$  une valeur de  $\frac{1}{12}$ . Pour un bateau ayant les dimensions du Bremen ou de l'Europa, c'est-à-dire un tirant d'eau de 10 m :

$$\left( \frac{2}{3} H \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right) = \frac{2}{3} \times 10 \times \frac{1}{12} = 0,555$$

ce qui donne à la constante, d'après le tableau III, une valeur de  $0,00157 + 0,00082 = 0,00239$ . C'est en adoptant cette valeur que nous avons calculé les ordonnées de la courbe II.

On voit qu'avec le rapport  $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{1}{12}$ , la courbe II passe au-dessus du point indiqué (a) par les auteurs de la figure 48, comme donnant le coefficient de résistance du Bremen. On pourrait en déduire que l'on surévalue les pertes par frottement quand on adopte  $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{1}{12}$ ; mais en réalité, dans nos calculs sur les carènes nous n'avons fait intervenir qu'une partie de la surface immergée : celle comprise entre les points d'inflexion du flux enveloppant la carène, c'est-à-dire dans le cas particulier envisagé ici, les 0,8 de la surface totale, environ. Pour retrouver la valeur numérique du terme frottement correspondant au point (a), il faudrait donc partir d'un coefficient 1,25 fois plus

grand, c'est-à-dire prendre le point (b) pour terme de comparaison.

On peut se rendre compte ainsi que la formule (131) utilisée en se donnant au rapport  $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{1}{12}$ , conduit à une valeur inférieure à la valeur expérimentale, si tant est que l'on puisse admettre que le point (a) a été établi autrement que par différence; il n'existe en effet, aucune mesure directe du terme frottement lorsque l'on opère, non sur une plaque mince immergée, mais sur une coque de navire.

Dire que  $\varepsilon = 12 \varepsilon_1$ , c'est dire que la paroi doit avoir une rugosité égale à 1,5 la rugosité de la fonte, puisque pour la fonte on peut admettre normalement  $\varepsilon = 8 \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_1$  étant, nous le rappelons, la rugosité du fer. Cela revient à admettre que la rugosité d'une paroi en tôles d'acier rivées, avec recouvrement, serait de l'ordre de  $1 \frac{1}{2}$  fois la rugosité de la fonte.

Si nous avions affaire à des tôles soudées bout à bout, nous pourrions admettre que la rugosité de la paroi devrait être du même ordre que celle de la fonte, c'est-à-dire que le calcul de  $2k_1''$  pour ce cas concret devrait être fait en adoptant  $\varepsilon = 8 \varepsilon_1$ . Dans ces conditions, on trouve  $2k_1'' = 0,00259$ ; le tableau I donne à  $10^4 f \left( \frac{2}{3} H \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right)$  la valeur 5,75 pour  $\frac{2}{3} H \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = 0,825$ .

La différence avec le cas précédent serait donc de 0,00026 et en valeur relative :

$$\frac{0,00026}{0,00259} = 0,100$$

Le bénéfice sur le terme frottement en passant de la tôle rivée à recouvrement à la tôle soudée bout à bout, serait donc de 10 %, soit pour l'ensemble de 5 %, le terme frottement intervenant à peu près pour la moitié dans la perte totale. Nous pensons que cette évaluation est bien de l'ordre de celle admise généralement.

Dans notre étude de 1953 se rapportant aux carènes, nous avons évalué  $2k_1''$  en partant de la formule (128), en adoptant pour constante 0,00254 au lieu de 0,00228. La courbe IIa tracée sur la figure 48, qui correspond à cette formule, montre que nous n'avons introduit de ce fait, dans l'étude des carènes, aucune erreur appréciable, les nombres de Reynolds dans la région des applications envisagées, étant de l'ordre de  $3 \times 10^8$  à  $3 \times 10^9$ , quand  $Re$  est évalué à la manière de Froude, c'est-à-dire en introduisant pour le facteur dimension non  $H$ , la hauteur du tirant d'eau mais  $L$  la longueur du navire.

Dans l'exposé de la Quatrième Partie qui reproduit l'étude de 1953, nous avons utilisé, il va sans dire, les formules que nous venons d'établir, et nous verrons que les calculs basés sur ces formules font disparaître toute contro-



verse possible quant à l'utilisation que nous avons faite, des résultats de Wageningen.

### Conclusions

Nous croyons cette fois, avoir dissipé tout doute, quant à la valeur d'application de la formule (131) pour la détermination du coefficient  $2k_1''$  relatif au calcul des pertes par frottement, qu'il s'agisse de disques en rotation ou de surfaces en translation.

Peut-être estimera-t-on qu'il valait la peine d'entreprendre ce dernier travail de synthèse qui permet de ramener le calcul des pertes par frottement dans le cas d'une conduite ou d'une surface en rotation ou en translation, à la détermination d'un coefficient valable quelle que soit :

- 1) la nature du fluide utilisé,
- 2) la rugosité envisagée.

L'ampleur de cette synthèse laissera incrédules ceux qui aiment à parler, comme ils l'ont toujours fait, du coefficient de Darcy pour les tuyauteries, du coefficient de Froude pour les carènes. Elle ne satisfera pas non plus les théoriciens qui sont plus confiants dans la théorie que dans les faits, et qui iraient jusqu'à douter des faits s'ils ne parvenaient pas à relier ceux-ci par une théorie mathématique.

Enfin, il y aura, et ce sera le plus grand nombre qui, d'instinct, et pour n'avoir pas à « repenser » la question si diluée dans les ouvrages spéciaux, se contenteront de dire « impossible ». Enfermer en effet, dans une formule aussi simple, les dizaines de milliers de points expérimentaux fournis par quelques dizaines d'expérimentateurs opérant à longueur d'années les uns après les autres, pendant près d'un siècle, cela est-il possible ?

Ce que nous pouvons leur dire, c'est que nous n'avons pas rencontré une seule contradiction pas plus qu'une seule coïncidence fortuite qui n'ait trouvé une explication physique satisfaisante, l'écart entre les points calculés

et les points expérimentaux ne dépassant pas, en général, les erreurs expérimentales, compte tenu de l'instabilité de régime dans certaines régions, et des difficultés de réaliser des rugosités équivalentes pour toutes les surfaces d'un même groupe.

Nous ajouterons qu'il serait vain de vouloir donner une signification strictement mathématique à de telles études, étant donné qu'au point de départ, pour établir la formule de base, on est amené à supposer que le phénomène est tout entier concentré à la paroi. C'est en effet, en partant de cette idée que l'on introduit le coefficient de proportionnalité  $k$  que l'on fait sortir du signe intégral, pour admettre ensuite qu'il varie avec le coefficient de Reynolds. Or, admettre que celui-ci intervient, c'est reconnaître que le phénomène analysé est beaucoup plus compliqué, qu'il n'intéresse pas seulement une faible masse de fluide voisine de la paroi mais une masse plus importante dans laquelle le glissement des couches élémentaires, l'une sur l'autre, est une fonction du coefficient de Reynolds.

Le bénéfice de cette synthèse ne se limite pas à la mise au point de deux formules d'un caractère général, valables entre  $Re = 10^5$  et  $Re = 10^8$ ; grâce à elle, en effet, il est possible de se faire une idée un peu simplifiée, nous voulons bien l'admettre, mais suffisante, de l'allure générale des phénomènes qui provoquent ces pertes.

On peut dire, en effet, en se référant aux diagrammes de la figure 49, que la plus grande partie de celles-ci sont localisées dans une région voisine de la paroi, de très faible épaisseur par rapport à l'épaisseur du flux influencé par la déviation latérale, dans l'étude des carènes. C'est ce qui explique pourquoi on ne commet pas d'erreur appréciable, surtout dans le cas des grands nombres de Reynolds, quand, pour calculer l'effet de la déviation dans l'étude des carènes, nous admettons que la vitesse relative  $c$  est constante dans toute l'épaisseur de la masse influencée.

## QUATRIÈME PARTIE

### ÉTUDE DU COEFFICIENT DE RÉSISTANCE A L'AVANCEMENT DES CARÈNES

#### CHAPITRE I

#### TRACÉ RATIONNEL DE LA COQUE

##### § I. — Section au maître-couple

Le tracé de la coque peut recevoir à la faveur de ce qui a été exposé dans la Première Partie, une solution rationnelle.

La coque étant divisée en tranches horizontales (fig. 53), chacune de celles-ci peut être

s'évaluer, en fonction de  $\frac{b}{d}$  puisque :

$$2h_1 = \frac{p}{\delta} = \frac{2e_1}{g\rho_1} c^2 = \frac{4}{3} \times 0,365 \frac{d^2 c^2}{b^2 g} \quad (132)$$

$\frac{1}{\rho_1}$  pouvant s'établir en fonction de  $d$  et de  $b$  (formule 51) :

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{2d}{3b^2}$$

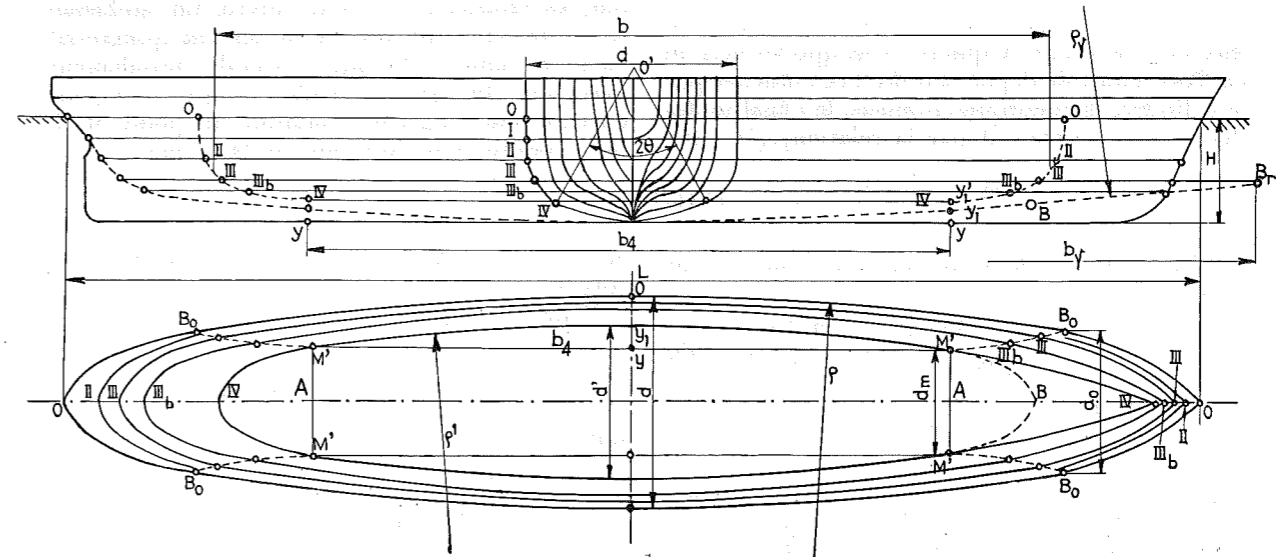


Fig. 53.

caractérisée avec nos notations, par la largeur  $d$  au maître-couple et par l'allongement  $\frac{1}{m} = \frac{L}{d}$ .

Il est rationnel de réaliser le même allongement pour toutes les sections. En effet, la dépression créée sur les flancs de la coque, peut se calculer, en valeur absolue, par la relation :

$$p = \frac{\delta e_1}{g\rho} c^2 = 2 \frac{\delta e_1}{g\rho_1} c^2$$

puisque  $\rho_1$ , rayon du cercle d'approche, est égal à  $2\rho$ .

La charge d'eau que nous désignerons par  $2h_1$  correspondant à cette dépression, peut

En désignant par  $x$  le rapport  $\frac{L}{b}$ , nous pourrions écrire :

$$2h_1 = \frac{4}{3} 0,365 (mx)^2 \frac{c^2}{g} \quad (133)$$

$\frac{1}{mx}$  désignant le rapport  $\frac{b}{d}$ .

On voit ainsi que  $h_1$  la surpression avant,  $-2h_1$  la dépression sur les flancs entre les deux points d'inflexion, restent constantes quand  $mx$  est constant.

Réaliser la même dépression sur toute la hauteur  $H_1$  des flancs, ne suffit pas, il faut

encore que le long de la partie en arc My (fig. 54) qui doit nécessairement compléter le tracé, règne si possible la même dépression, à peine de voir un écoulement se produire le long de la surface du fond vers les flancs.

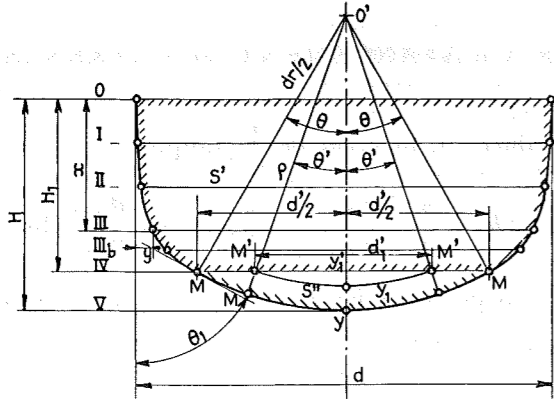


Fig. 54.

En tenant compte de ce que l'épaisseur du flux influencé par la sphère n'est que les 0,7, en chiffres ronds, de l'épaisseur du flux influencé par le cylindre, la condition ci-dessus de l'égalité des dépressions se traduit par la relation :

$$\frac{e_1}{\rho'} = \frac{e_1'}{\rho_r} \quad (134)$$

avec  $e_1' = 0,7 \times 0,365 d_r$  (fig. 55). Cela conduit à :

$$\rho_r = \rho' \frac{0,7 \times 0,365 d_r}{0,365 d'} = \rho' \frac{0,7 d_r}{d'} \quad (135)$$

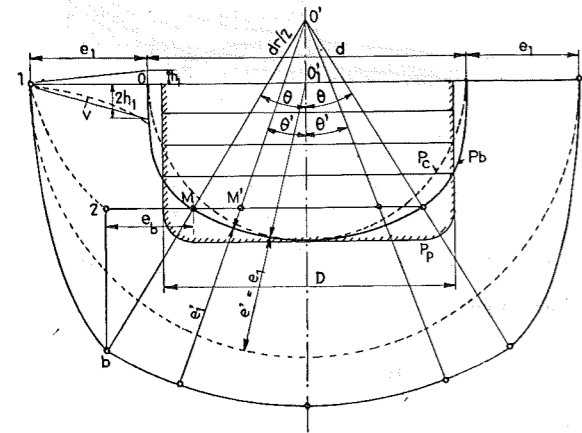


Fig. 55.

En choisissant  $d_r = \sqrt{2} d'$ , nous trouverons :

$$\rho_r = \rho'$$

c'est-à-dire  $2\theta = 90^\circ$  et pour profil une demi-circonférence (fig. 55, courbe en pointillé  $P_c$ ).

La courbe limitant la zone influencée par la mise en dépression du flux, correspond dans ce cas à une demi-circonférence  $e_1 = e'$  [courbe pointillée de rayon  $(d/2 + e' + e_1)$ ].

Cette solution conduirait toutefois à une section peu favorable quant au volume déplacé, sans parler d'autres inconvénients que notre inexpérience dans ce domaine ne nous permet pas de discerner, à part la question de la hauteur du centre de gravité qui serait défavorablement influencée par cette forme.

Pour nous rapprocher de cette solution limite, sans nous écarter par trop de ce qui est généralement adopté dans le tracé des navires rapides, nous avons choisi pour traiter un exemple concret et pouvoir calculer avec rigueur le coefficient de résistance, la relation :

$$d_r = 2 d' \quad (136)$$

Cette solution conduit à  $\theta = 30^\circ$ ,  $2\theta = 60^\circ$ . L'angle  $2\theta$  étant connu et le rayon  $d'$  déterminé par les relations qui vont suivre, un problème se posera : celui du raccordement progressif entre le fond et la paroi latérale initialement verticale. On peut se rendre compte que pour obtenir une tangente commune au point M, il faut adopter une équation de la forme :

$$y = kx^6$$

et déterminer  $k$  pour qu'au point M,  $\text{tg } \theta_1 = \text{cotg } \theta = 1,73$ .

Pour  $x = H_1$  :

$$y = \frac{d-d'}{2} = k H_1^6$$

soit :

$$k = \frac{d-d'}{2} \frac{1}{H_1^6} \quad \text{et} \quad y = \frac{d-d'}{2} \frac{x^6}{H_1^6}$$

d'où :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{H_1} = \text{cotg } \theta = 1,73 = 6 \frac{d-d'}{2} \frac{H_1^5}{H_1^6} \quad (137)$$

Tableau V

$2\theta$	Arc $2\theta/\rho$	Corde $b/\rho$	Flèche $f/\rho$	Rapport $f/b$	Surface du segment
18	0,3142	0,3129	0,01231	0,0395	0,00257
19	0,3316	0,3301	0,01371	0,0415	0,00302
20	0,3491	0,3473	0,01519	0,0438	0,00352
21	0,3665	0,3645	0,01675	0,0458	0,00408
22	0,3840	0,3816	0,01837	0,0482	0,00468
42	0,7330	0,7167	0,0664	0,0927	0,0319
60	1,0470	1,000	0,1340	0,0134	0,0906

Tenant compte du tableau V pour  $2\theta = 60^\circ$ , on peut écrire (fig. 54), en vertu de la relation (136) :

$$H - H_1 = f = 0,134 \frac{d_r}{2} = 0,134 d'$$

soit en posant :

$$H = rd \quad (138)$$

$$H_1 = rd - 0,134 d'$$

et :

$$6 \frac{d-d'}{2} = 1,73 (rd - 0,134 d') \quad (139)$$

§ 2. — Valeurs caractéristiques pour  $r = 1/2$

En adoptant  $r = 1/2$  valeur limite pour le bateau chargé, il viendra :

$$d = 1,32 d' \quad H_1 = 0,400 d \quad H = 0,500 d \quad (140)$$

Nous sommes ainsi en mesure de calculer en fonction de  $d$ , la valeur de l'aire  $s$  comprise entre la verticale et la courbe formant le flanc :

$$y = \frac{0,236}{2} \frac{x^6}{H_1^6} d$$

et :

$$s = \int_0^{H_1} 0,118 \frac{d}{H_1^6} x^6 dx = 0,0067 d^2$$

Cela nous a permis de déterminer les surfaces  $S'$ ,  $S''$  et  $S$ , puis  $S_1''$  :

$$S' = dH_1 - 2s = 0,400 d^2 - 0,0134 d^2 = 0,386 d^2$$

$$S'' = 0,0906 \left(\frac{d'}{2}\right)^2 = 0,0906 \left(\frac{d'}{2}\right)^2 = 0,0906 \left(\frac{d}{1,32}\right)^2 = 0,052 d^2$$

$$S''_1 = 0,0319 \rho^2 = 0,0319 \left(\frac{d'}{\sin \theta'}\right)^2 = 0,0319 \left(\frac{d'}{\sin \theta'}\right)^2 = 0,0319 \left(\frac{d'}{\sin \theta'}\right)^2 = 0,016 d^2$$

Les coefficients 0,0906 et 0,0319 sont tirés du tableau V pour  $2\theta = 60^\circ$  et  $2\theta' = 42^\circ$ . De là, la valeur de  $S$  section totale au maître-couple et des rapports  $\frac{S'}{S}$  et  $\frac{S_1''}{S}$  :

$$S = S' + S'' = 0,438 d^2 \quad \frac{S'}{S} = 0,880 \quad \frac{S_1''}{S} = 0,0366$$

Remarque I. — Pour réaliser la même section avec une coque qui aurait la forme rectangulaire et la même hauteur  $H$  d'immersion, il suffirait de donner à la largeur  $D$  une valeur telle que :

$$D \times 0,5 d = 0,438 d^2$$

ce qui conduit à  $D = 0,876 d$  et pour tenir compte des arrondis de raccord à  $D = 0,90 d$  (fig. 55).

§ 3. — Valeurs caractéristiques pour  $r = 1/3$

Lorsque au lieu d'adopter  $r = 1/2$ , on adopte  $r = 1/3$ , les valeurs de  $S'$ ,  $S''$  et  $S$  changent. Nous les avons évaluées par la même méthode en tenant compte que  $H_1$  passe à la valeur de  $H' = 0,233 d$  et que  $2s$  la section latérale à décompter, devient  $2s = 0,0132 d^2$ .

Cela nous a conduit aux valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} S' &= 0,220 d^2 & S'' &= 0,052 d^2 \\ S_1'' &= 0,016 d^2 & S &= 0,272 d^2 \\ \frac{S'}{S} &= 0,810 & \frac{S_1''}{S} &= 0,060 \end{aligned}$$

§ 4. — Tracé de la projection horizontale avec fond bombé

Pour la projection horizontale des sections faites par des plans horizontaux, il suffira de noter que les points d'inflexion sont déterminés (fig. 53) par :

$$d_o = \frac{2}{3} d \quad d_m = \frac{2}{3} d'$$

Le rayon  $\rho'$  se déduira du rapport  $f/b$ , en acceptant un rapport  $x$  entre  $L$  et  $b$  dont la valeur minimum apparaît comme étant de l'ordre de 1,33, si l'on veut résoudre rationnellement le problème du raccordement des flancs avec l'étrave. Ainsi on pourra calculer pour chacune des sections :

$$f = \frac{d-d_o}{2} = \frac{d}{6} \quad b = \frac{1}{mx} d$$

Nous avons effectué le tracé pour  $\frac{1}{m} = 5,5$  pour nous rapprocher des formes du cargo hollandais essayé au bassin des carènes de Wageningen dont nous parlerons plus loin.

Avec ces données :

$$b = 4,15 d, \quad f/b = \frac{1/6 d}{4,15 d} = 0,0402$$

le tableau V fait connaître l'angle au centre  $19^\circ$  et le rayon  $\rho = 3 b = 12,5 d$ .

L'angle au centre restera de  $19^\circ$  pour toutes les sections et  $\rho'$  restera égal à  $12,5 d'$ .

La succession des points d'inflexion limitera la zone de dépression sur les flancs.

Il ne restera plus qu'à déterminer le rayon  $\rho_r$  de la partie de révolution  $Y_1 B_r$  (fig. 53) passant par  $Y_1$  dans la section IV, point que l'on retrouve

dans la figure 54. Le rayon  $\rho_r$  de cet arc peut être calculé puisque l'on connaît la flèche  $f_r = YY_1$ , et la corde correspondante  $b_4$  (fig. 53). Si l'on cherche sa valeur en fonction de  $\rho'$ , on peut dire que les rayons sont dans le rapport inverse des flèches étant donné que les cordes sont les mêmes :

$$\frac{\rho_r}{\rho'} = \frac{f'}{f_r} = \frac{yy_1}{YY_1}$$

Pour  $yy_1$ , l'angle au centre étant de  $19^\circ$ , on trouvera au tableau V :

$$yy_1 = 0,0415 b_4.$$

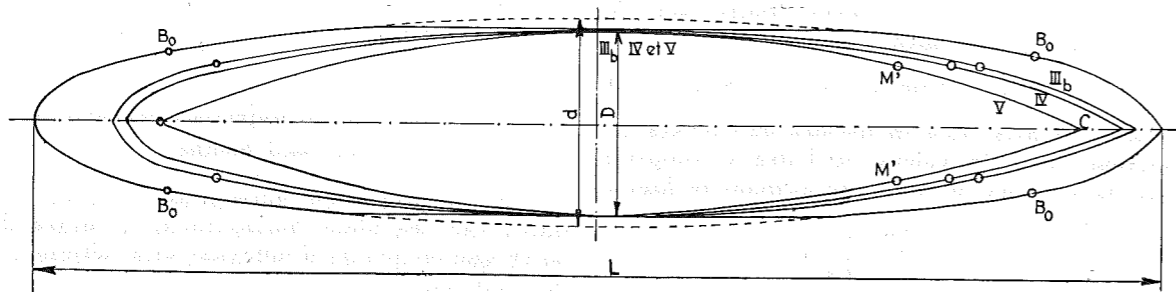


Fig. 56.

D'autre part, on peut écrire avec une approximation suffisante (fig. 54) :

$$YY_1 = MM' \sin \theta = \frac{d' - d_1'}{2} \sin \theta = \frac{d' - 2/3 d'}{2} \sin \theta = \frac{1}{6} d' \sin \theta$$

soit :

$$YY_1 = \frac{1}{12} d'$$

et finalement :

$$\rho_r = 0,0415 \times 12 \frac{b_4}{d'} \rho' = 0,50 \frac{1}{mx} \rho' = 0,50 \times 4,15 \rho' = 2,07 \rho'$$

Nous adopterons  $\rho_r = 2 \rho'$ .

C'est sur l'onglet d'ouverture  $MM_1M'$  dans la section du maître-couple, finissant en pointe en  $M'$  dans la section A de la figure 53, que se fera le raccord des courbures.

Avec ce tracé, la courbe correspond à la zone de dépression dans la section transversale du maître-couple (fig. 55), variera peu lorsque l'on passera de la région des flancs à la région du fond ainsi que le montre 1 b (la courbe la plus extérieure), qui donne la limite de la zone en dépression dans la section du maître-couple.

### § 5. — Tracé de la projection horizontale avec fond plat

Le tracé que nous venons de justifier est utilisé pour les paquebots rapides, mais pour les cargo, on s'en tient généralement à la section rectangulaire marquée sur la figure 55 par un contour en liseré désigné par la lettre  $P_p$ . Pour faire la comparaison au point de vue de la résistance à l'avancement, il faut évidemment partir d'une même section au maître-couple; c'est pourquoi nous avons choisi la largeur  $D$  égale au  $0,9 d$ , en conservant les autres dimensions.

La figure 56 montre ce que devient la projection horizontale pour le cas du cargo à fond plat.

Jusqu'à la section (IIIb) (fig. 54), on pourra conserver les rayons de courbure  $\rho$  quitte à tronquer la surface par un plan parallèle à l'axe général (fig. 56), distant de cet axe de  $\frac{D}{2}$ .

A partir de IIIb et jusqu'à la surface du fond (section V), les courbures seront plus fortes : les arcs seront tangents au flanc dans la section du maître-couple, le dernier arc portant le n° V dans la figure 56, finira en C,  $M'$  étant le point d'inflexion déterminé par la condition :

$$d = \frac{2}{3} D.$$

( $d$ , la distance de  $M'$  à  $M'$ , fig. 56).

Pour la partie du flanc allant de 0 à IIIb, les allongements resteront les mêmes pour les deux tracés, la distance  $b$  des points d'inflexion d'une tranche faite au même niveau dans les deux coques était conservée, ce qui fait que  $x$  a la même valeur :

$$b = xL$$

et que partant :

$$\frac{1}{m} = \frac{L}{d}$$

devra être conservé, la largeur au maître-couple restant représentée au point de vue de la déviation, par la valeur fictive  $d$  et non par  $D$ .

L'influence de la discontinuité due à la troncature sera négligeable; il n'en sera pas de même de celle qui se présente au raccord des flancs avec le fond. Là on passera d'une dépression  $-2h$ , à 0 au point de raccord des flancs avec le fond, étant entendu que l'on doit faire abstraction du congé toujours faible, qui relie les flancs à la surface du fond. Cette dépression provoquera un appel d'eau tel que le phénomène dû à la vague statique et à la vague dynamique dont nous parlerons plus loin, se reproduira au niveau du fond, doublant ainsi les pertes complémentaires que nous étudierons dans le chapitre III.

## CHAPITRE II

### ÉTUDE DES PERTES PAR DÉVIATION ET PAR FROTTEMENT

#### § 1. — Valeur du coefficient $C_1$ dû à la déviation du flux

La force  $F'$  due à la déviation latérale peut s'écrire :

$$F' = \frac{\delta}{g} c^2 (S' C_1') = \left( \frac{\delta}{g} S c^2 \right) \frac{S'}{S} C_1' \quad (139)$$

La valeur de  $\frac{S'}{S}$  peut se déduire des chiffres établis au paragraphe précédent. Le coefficient  $C_1'$  est égal à  $C_1 = \frac{4}{3} \frac{e_1}{\rho_1}$  [formule (48)].

Pour ce qui concerne  $F''$  dû à la déviation du fond, nous pouvons l'établir en écrivant que  $F''$  est égal à la surface  $S_1''$  ( $M'Y_1M'$ ) (fig. 54) multipliée par la pression s'exerçant sur cette surface :

$$p = \delta h_r = \frac{\delta}{g} \frac{e_1'}{2 \rho_r} \times c^2 \quad (140)$$

( $2 \rho_r$  parce que le rayon du cercle d'approche est le double de  $\rho_r$ ).

Cela conduit en tenant compte de la dépression arrière :

$$F'' = 2S_1'' \frac{\delta}{g} \frac{0,7 e_1}{2 \times 2 \rho_r} c^2 = S_1'' \frac{\delta}{g} \frac{e_1}{\rho_1} \times 0,7 c^2 \quad (141)$$

d'où :

$$F_1 = F' + F'' = \left( \frac{\delta}{g} S c^2 \right) \left( \frac{S'}{S} \times \frac{4}{3} \frac{e_1}{\rho_1} + \frac{S_1''}{S} \frac{e_1}{\rho_1} \times 0,7 \right) \quad (142)$$

Pour  $r = 1/2$

$$C_1 = \left( \frac{S'}{S} + \frac{S_1''}{S} \frac{3}{4} \times 0,7 \right) \frac{4}{3} \frac{e_1}{\rho_1} = (0,880 + 0,019) \frac{4}{3} \frac{e_1}{\rho_1} \approx 0,900 \times \frac{8}{9} 0,365 (mx)^2 \quad (143)$$

en vertu de la relation (51).

Pour  $r = 1/3$

$$C_1 = (0,810 + 0,032) \frac{4}{3} \frac{e_1}{\rho_1} = 0,842 \times \frac{8}{9} 0,365 (mx)^2 \quad (144)$$

Ce qui précède se rapporte au fond bombé. Pour le fond plat, le premier terme doit résulter d'une intégration car la valeur de  $\frac{1}{mx}$  n'est pas la même sur toute la hauteur.

En consultant le tracé de la figure 56, on peut voir que jusqu'à la tranche IIIb, on peut considérer  $\frac{1}{mx}$  comme ayant la même valeur que dans le cas précédent, pour la tranche IIIb — V la valeur  $\frac{1}{mx}$  est en moyenne égale à 3,60.

Pour le cas  $r = 1/2$ , on pourrait écrire avec une approximation suffisante :

$$\left( \frac{1}{mx} \right)_m^2 = \frac{1}{5} [3,5 (4,15)^2 + 1,5 (3,60)^2] = 15,9$$

D'où :

$$C_1 = \frac{8}{9} \times 0,365 (mx)^2_m = \frac{8}{9} 0,365 \frac{(mx)^2_m}{(mx)^2} \times (mx)^2 = 1,08 \times \frac{8}{9} 0,365 (mx)^2 \quad (145)$$

Pour le cas  $r = 1/3$ , nous trouverons :

$$\left( \frac{1}{mx} \right)_m^2 = 15,4$$

soit pour :

$$C_1 = 1,11 \times \frac{8}{9} \times 0,365 (mx)^2 \quad (145b)$$

Pour  $mx = \frac{1}{4,15}$  et pour  $r = \frac{1}{2}$  nous voyons donc que :

$$C_1 = 0,0169 \text{ pour le fond bombé.}$$

$$C_1 = 0,0204 \text{ pour le fond plat.}$$

Pour  $mx = \frac{1}{4,15}$  et  $r = \frac{1}{3}$  :

$C_1 = 0,0158$  pour le fond bombé.

$C_1 = 0,0210$  pour le fond plat.

### § 2. — Valeur du coefficient $C_2$ dû au frottement

Nous admettons que les seules surfaces qui entraînent des pertes par frottement sont limitées à la zone des flancs et du fond, fixées par les points d'inflexion, les parties avant et arrière n'étant en contact qu'avec un flux à filets non orientés.

Pour évaluer ces surfaces, nous les décomposons en deux parties, les flancs régnant sur la hauteur  $H_1$  et le fond correspondant à l'arc MYM (fig. 54).

La première a pour valeur approximative  $2 bH$ , la seconde  $\frac{1}{6} \pi d_r' \times b$

$b$  étant la valeur moyenne cotée sur la figure 53,  $d_r'$  représentant la valeur moyenne des diamètres pris dans la section du maître-couple et dans la section M'M' (dans la vue en plan de la fig. 53), c'est-à-dire, puisque  $d_r = 2 d'$  :

$$d_r' = \frac{2 d' + 2 dm}{2} = \left(1 + \frac{2}{3}\right) d' = \frac{5}{3} d' \quad (146)$$

La force  $F$  résultant du frottement pourra donc s'évaluer en fonction de la section  $S$  du maître-couple, en écrivant :

$$F = \left(S \frac{\delta}{g} c^2\right) \times C_2$$

avec :

$$C_2 = 2 k_1'' \left( \frac{bH_1}{S} + \frac{1/6 \pi \times 5/3 d'b}{2S} \right) \quad (147)$$

Avec les relations établies plus haut :

$$\frac{bH_1}{S} = \frac{b \times 0,400 d}{0,434 d^2} = \frac{0,400}{0,434} \frac{1}{mx} = 0,93 \frac{1}{mx}$$

$$\frac{1/6 \pi \times 5/3 d'b}{2S} =$$

$$= \frac{1/6 \pi \times 5/3 \times db}{2 \times 1,32 \times 0,434 d^2} = 0,750 \frac{1}{mx}$$

d'où :

$$C_2 = 2 k_1'' \times 1,68 \frac{1}{mx} \quad (148)$$

Pour le cas du fond plat, il faudrait écrire, en se reportant au tracé de la figure 56.

$$C_2 = \frac{bH}{D \times H} 2 k_1'' + \frac{0,68 Db}{2 D \times H} \times 2 k_1'' = 2 k_1'' [1,11 + 0,68] \frac{b}{d}$$

le chiffre 0,68 représentant le coefficient par lequel il faut multiplier la surface du rectangle  $D \times b$  pour obtenir la surface du fond.

En notant que  $H = 0,5 d$   $D = 0,9 d$ ,

$$C_2 = 2 k_1'' \times 1,79 \frac{1}{mx} \quad (149)$$

$\frac{1}{mx}$  ayant la signification antérieure.

Comme nous aurons à étendre les résultats dans le cas où  $r$  est égal à  $1/3$ , nous avons refait les calculs du dernier terme, pour cette hypothèse et nous avons trouvé respectivement :

au lieu du coefficient 1,68, la valeur 2,06.

au lieu du coefficient 1,79, la valeur 2,13.

### § 3. — Valeur du coefficient de résistance totale $C_t$

La résistance totale  $F$  en fonction de la section  $S$  au maître-couple pourra s'écrire :

$$F_t = \left(S \frac{\delta}{g} c^2\right) \times (C_1 + C_2) \quad (150)$$

la valeur de  $C_2$  variant avec les dimensions par la présence de  $2 k_1''$ . Si nous admettons que pour les valeurs de  $Re$ , que nous précisons tantôt, on peut admettre que  $2 k_1'' = 0,00284$ .

Nous trouverons pour  $C_t = (C_1 + C_2)$  avec  $\frac{1}{mx} = 4,15$  :

pour  $r = 1/2$  :

fond bombé  $C_t = 0,0169 + 0,0179 = 0,0348$  ;  
fond plat  $C_t = 0,0204 + 0,0214 = 0,0418$ .

pour  $r = 1/3$  :

fond bombé  $C_t = 0,0158$   $0,0206 = 0,0364$  ;  
fond plat  $C_t = 0,0210$   $0,0213 = 0,0423$ .

## CHAPITRE III

### VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DES VALEURS DE $C_t$

#### § 1. — Document expérimental donnant $C_t$ en service

Nous disposons de l'exemple traité dans le document hollandais « Publication n° 37 de la Station d'essai des carènes de Wageningen »,

pour un cargo dont les dimensions seraient les suivantes :

$L = 60$  m.  $d = 10$  m.  $H = 5$  m.  $S = 48,5$  m<sup>2</sup>  
jauge  $J = 2256$  m<sup>3</sup>

et dont le tracé correspond d'une façon satisfaisante au dessin de la figure 56 du type à fond plat et à flancs droits.

Ce type a été expérimenté au bassin des carènes sur un modèle en paraffine, géométriquement semblable au cargo de 60 m et ayant une longueur de 4,50 m.

Des chiffres relevés aux essais, les auteurs ont soustrait le terme dû au frottement, de façon à connaître la valeur du terme dû à la déviation, notre premier terme dans la valeur de  $C_t$ .

En procédant ainsi, les auteurs ont admis que le premier terme était indépendant des dimensions, et que partant on pouvait donner la valeur de la puissance absorbée par la déviation, en fonction de la jauge.

En utilisant nos notations, on peut écrire, en effet :

$$J = S \times L \times \varphi = d \times H \times L \times \varphi = r m^2 L^3 \varphi \quad (151)$$

$\varphi$  étant un coefficient qui tient au tracé de la coque, constant pour tous les tracés géométriquement semblables. D'autre part  $(HP)_1$ , la puissance absorbée par la déviation est égale à :

$$(HP)_1 = \frac{1}{75} \left( \frac{\delta}{g} S c^2 \right) C_1 \times c \quad (152)$$

$C_1$  étant fonction de  $(mx)^2$  comme nous l'avons vu, c'est-à-dire constant pour un allongement donné.

En portant  $\log J$  en abscisse, on obtiendra pour le diagramme de  $\log (HP)$ , en fonction de  $\log J$ , un faisceau de courbes, chacune se rapportant à une valeur de  $c$ , courbes valables pour tous les bateaux géométriquement semblables, quelles que soient leurs dimensions.

Le problème fondamental à partir de ce moment, revient à déterminer correctement le terme relatif aux frottements ; nous avons tiré de notre exposé :

$$(HP)_2 = \frac{1}{75} \left( S \frac{\delta}{g} c^2 \right) \times c \times C_2 \quad (153)$$

avec :

$$C_2 = 2 k_1'' \frac{\Omega_1}{2S} \quad (154)$$

$\Omega_1$  désignant la moitié de la surface mouillée comprise entre les points d'inflexion,  $2 k_1''$  étant une fonction du coefficient de Reynolds qui est donnée par le diagramme de la figure 52, lorsqu'il s'agit de surfaces lisses, ce qui est évidemment le cas pour le modèle.

Comme  $2 k_1''$  varie avec  $Re$  et partant avec

$c$ , les auteurs ont admis que  $(HP)_2$  pouvait être donné par une formule de la forme :

$$(HP)_2 = \frac{1}{75} \xi \left( \frac{\delta}{g} \right) c^{2,825} \quad (155)$$

$\xi$  dans le cas particulier envisagé ici pouvant prendre la valeur 0,00248,  $\Omega$  représentant cette fois la moitié de la surface mouillée. Entre les deux expressions de  $(HP)_2$  il s'établit donc le rapport :

$$R = \frac{\Omega_1 k_1'' c^3}{\Omega \xi c^{2,825}} \quad (156)$$

Les calculs, relatifs aux essais sur modèle, ont été exécutés en partant de valeurs de  $c$  données par les limites :

$$\frac{c^2}{gb} = 0,02 \quad \text{et} \quad \frac{c^2}{gb} = 0,08$$

Comme  $b$  peut être pris égal à 3,40 m dans le cas du modèle, cela conduit à dire que les limites de vitesses sont :

$$c = 0,82 \text{ m.} \quad \text{et} \quad c = 1,64 \text{ m.}$$

A ces valeurs de  $c$  correspondent des valeurs de  $Re$  [formule (123b)] dans laquelle  $d$  a été remplacé par  $H$  :

$$Re = 2,35 \times 10^5 \quad \text{et} \quad Re = 4,7 \times 10^5.$$

Pour ces valeurs de  $Re$ , nous pouvons calculer les valeurs de  $2 k_1''$  au moyen de la formule (130). Nous trouvons ainsi :

$$2 k_1'' = 0,00417 \quad 2 k_1'' = 0,00357$$

Entre  $\Omega_1$  et  $\Omega$ , nous avons pu établir pour le fond plat, qu'il existait un rapport :

$$\frac{\Omega}{\Omega_1} = 1,35.$$

Le rapport  $R$  de la formule (156) prend donc la valeur :

pour la vitesse la plus faible :

$$R = 1,09 \frac{c^3}{c^{2,825}} = 1,01$$

pour la vitesse la plus forte :

$$R = 0,935 \frac{c^3}{c^{2,825}} = 1,02$$

ce qui veut dire que les résultats calculés par les expérimentateurs de Wageningen, se trouvent être les mêmes que ceux que nous eussions obtenu en employant nos propres formules.

Nous en déduisons que les valeurs fournies par les diagrammes de Wageningen augmentées des valeurs calculées au moyen de notre formule (153) ci-dessus, donnent les valeurs de la puis-

sance totale absorbée, quelles que soient les dimensions, à la condition :

1) de prendre pour  $2k_1''$  les valeurs fournies par le diagramme de la figure 52, s'il s'agit du modèle dont les parois sont polies;

2) de prendre pour  $2k_1''$  les valeurs fournies par le diagramme de la figure 57, s'il s'agit d'un bateau à parois forcément rugueuses, ce diagramme étant déduit de la formule (131) en

introduisant des rapports de rugosité  $\frac{\epsilon_1}{e}$  égal à 6 et à 12.

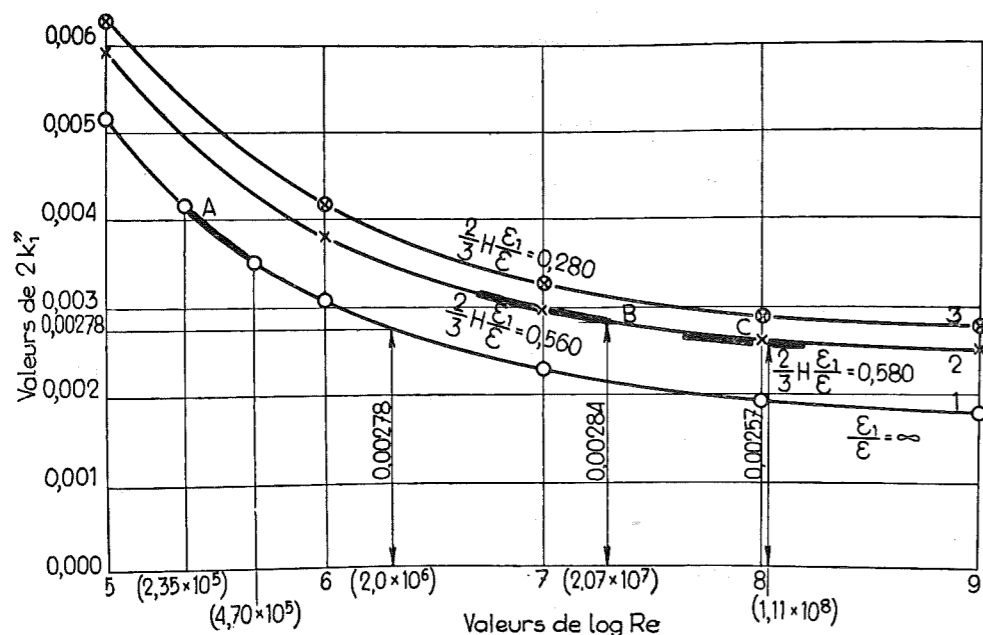


Fig. 57.

§ 2. — Conclusions

Nous voudrions souligner ici :

1° que la concordance constatée des valeurs calculées par l'une et l'autre voie, implique, comme nous l'avons admis que seule la surface mouillée délimitée par les points d'inflexion, intervient;

2° qu'il n'est pas possible de conserver la formule proposée par Wageningen, pour le calcul du terme dû au frottement, lorsqu'il s'agit, non plus de modèles, mais de bateaux dont les surfaces présentent toujours un certain degré de rugosité, et dont les vitesses et dimensions conduisent à des valeurs de Re relativement élevées de l'ordre  $10^7$ ;

3° qu'il faut s'en tenir à la méthode que nous proposons, l'erreur que l'on peut commettre en prenant pour  $2k_1''$  une valeur constante moyenne, étant négligeable lorsque l'on a affaire, non

plus à un modèle, mais à un bateau de dimensions normales travaillant avec des vitesses normales, qui conduisent à des valeurs de Re supérieure à  $10^6$  en tout cas.

Pour le montrer, nous avons pris l'exemple de cargo de 60 m., pour lequel les vitesses qui correspondent à des points marqués d'un point noir au diagramme de la figure 58, sont comprises entre :

$$\frac{c^2}{gb} = 0,02 \quad \text{et} \quad \frac{c^2}{gb} = 0,08$$

$$\text{soit avec } b = \frac{60}{1,33} = 44,5$$

$$c = 2,96 \quad \text{et} \quad c = 5,92 \text{ m. sec.}$$

A ces valeurs de c correspondent des valeurs de Re :

$$1,14 \times 10^7 \quad \text{et} \quad 2,28 \times 10^7$$

Comme on peut le voir au diagramme de la figure 57, la valeur de  $2k_1''$  entre ces valeurs de Re peut être considérée comme pratiquement constante, surtout si on utilise pour les calculs la valeur moyenne.

Pour  $\frac{\epsilon_1}{e} = 6$  et la vitesse 5,14 m. sec., on pourrait adopter pour valeur moyenne :

$$2k_1'' = 0,00284$$

qui correspond à  $Re = 2,07 \times 10^7$ .

Pour ces conditions d'application, le rapport R dont il a été question ci-dessus prend la valeur 1,

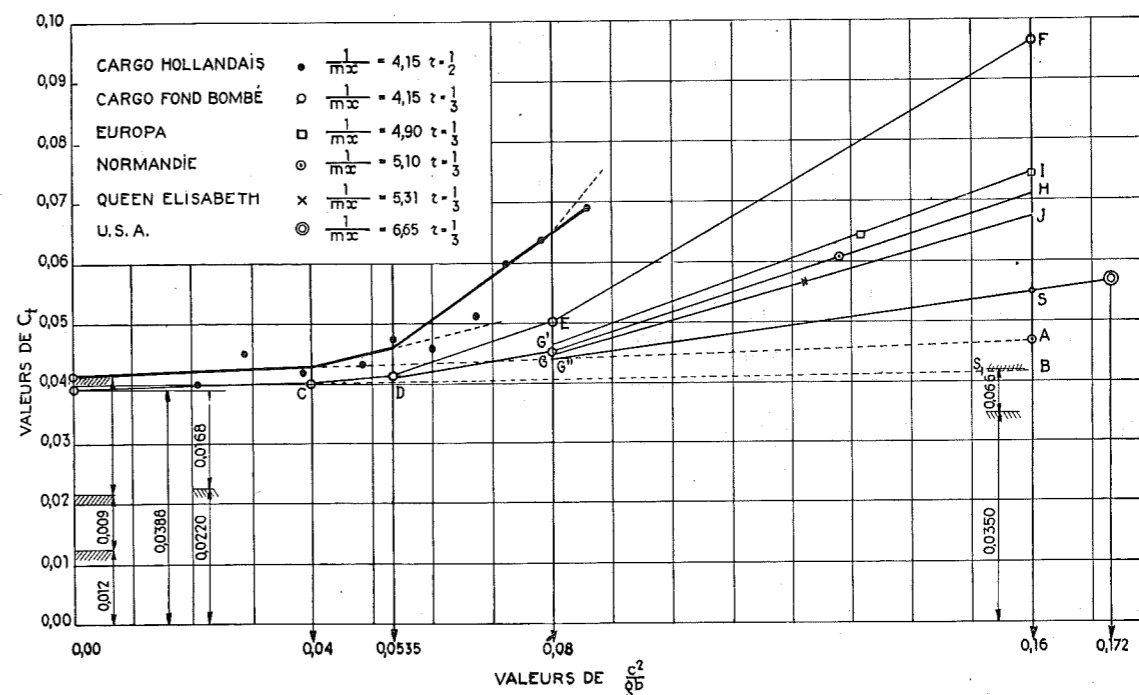


Fig. 58.

si on adopte  $\xi = 0,00284$  comme l'a fait Wageningen

$$R = \frac{0,00284}{0,00284} \times \frac{\Omega_1}{\Omega} \times \frac{c^3}{c^{2,825}} = \frac{1,355}{1,350} = 1.$$

Cette coïncidence ne peut exister que pour la valeur particulière  $c = 5,14$  m. sec.; pour les vitesses plus faibles ou plus fortes, il y aura un écart qui, pour la vitesse minimum 2,96, atteint 20%.

Les plages indiquées sur les diagrammes de la figure 57 correspondent aux valeurs de Re utilisées :

A pour le modèle,

B pour le cargo de 60 m. dont les résultats sont fournis à titre d'exemples par Wageningen,

C pour les grands paquebots dont nous parlerons plus loin.

La courbe 1 se rapporte aux surfaces lisses; la courbe 2 est valable pour le cargo de 60 m.

(H = 5 m), lorsqu'on adopte  $\frac{\epsilon_1}{e} = \frac{1}{6}$ ; la courbe 2 est encore valable pour les paquebots de 250 m.

(H = 10 m), lorsqu'on adopte  $\frac{\epsilon_1}{e} = \frac{1}{12}$ ; la courbe 3 correspondrait au cargo de 60 m.

(H = 5 m.), si nous devons admettre que  $\frac{\epsilon_1}{e} = \frac{1}{12}$ .

Cet exposé préalable étant fait, nous nous bornerons à transcrire dans le tableau VI, les valeurs indiquées par les expérimentateurs, pour les puissances HP totales; elles sont inscrites dans la colonne 6.

Ces valeurs sont manifestement trop faibles et les auteurs préfèrent pour obtenir les valeurs qui correspondent à des essais en service, de multiplier les chiffres par 1,23 (15 % de la puissance à l'arbre, le rendement étant évalué à 0,65).

Nous avons porté les valeurs de  $C_1$  corrigées dans le diagramme de la figure 58 en fonction de  $\frac{c^2}{gb}$ ; ayant constaté que pour les abscisses

inférieures à  $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2\pi} = 0,04$ , les points étaient

très irréguliers et nettement trop bas, nous avons fait cette remarque, que si une correction doit être introduite pour tenir compte de la rugosité du modèle, elle doit l'être sur le coefficient de résistance  $C_2$ ;

on peut même dire qu'elle doit consister à ajouter une constante  $\Delta C_2$ , puisque comme nous venons de le montrer, dans les valeurs élevées de Re,  $2k_1''$  ne varie plus avec c, tout au moins dans les limites correspondant aux essais. C'est ce que nous avons fait en ajoutant 0,012. On obtient ainsi des valeurs pratiquement identiques à celles proposées pour les abscisses supérieures à 0,060 et pour les valeurs inférieures à 0,04 des points qui s'alignent d'une façon remarquable sur une droite passant par le point d'origine, calculé théoriquement dans l'hypo-

Tableau VI

1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	c	c <sup>2</sup>	c <sup>3</sup>	$\frac{c^2}{gb}$	HP	C <sub>t</sub>	C <sub>t</sub> corrigé	
							1,23 C <sub>t</sub>	C <sub>t</sub> + 0,012
6	3,08	9,50	29,40	0,0214	56	0,0275	0,0338	0,0395
7	3,60	12,95	40,66	0,0294	90	0,0330	0,0405	0,0450
8	4,11	16,90	69,50	0,0385	141	0,0299	0,0370	0,0419
9	4,62	21,40	99,00	0,0485	207	0,0308	0,0378	0,0423
9½	4,87	23,80	106,0	0,0540	252	0,0350	0,0430	0,0470
10	5,14	26,40	135,2	0,0600	311	0,0340	0,0420	0,0460
10½	5,40	29,20	157,0	0,0675	410	0,0387	0,0475	0,0507
11	5,65	31,90	180,0	0,0722	570	0,0470	0,0578	0,0590
11½	5,90	34,70	204,5	0,0785	719	0,0520	0,0640	0,0640
12	6,15	38,00	234,0	0,0860	900	0,0570	0,0700	0,0690

thèse où  $2h_1''$  pourrait être considéré comme constant jusqu'aux vitesses les plus faibles.

Cette convergence vers le point de nulle vitesse est très nette si l'on tient compte de ce que l'erreur relative va rapidement grandissant dès que l'on se rapproche de la puissance nulle.

Nous n'avons pas vu immédiatement la manière de relier les différents points ainsi trouvés. Ce n'est qu'après avoir abordé l'étude qui va suivre, des termes complémentaires à ajouter à la résistance due à la déviation et aux frottements, que nous avons pu distinguer des discontinuités très nettes qui se présentent pour les abscisses  $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2\pi}$ ,  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2\pi}$ ,  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\pi}$ , et l'alignement remarquable sur des droites, alignement d'autant plus remarquable qu'il n'a pas été voulu, mais qu'il résulte strictement des valeurs expérimentales.

Il nous sera permis de souligner à la fin de ce chapitre à laquelle nous donnerons une suite au chapitre IV, la parfaite concordance entre résultats observés et résultats calculés à la condition d'adopter :

1) pour  $2h_1''$  les valeurs données par le diagramme de la figure 57 ;

2) de ne faire entrer dans la formule que  $\Omega_1$  surface mouillée comprise entre les points d'inflexion.

#### CHAPITRE IV

##### ÉTUDE DES PERTES COMPLÉMENTAIRES

Les formules proposées donnent les valeurs à l'origine lorsque le plan d'eau reste indéformé.

Il est évident qu'il ne peut en être ainsi pour des vitesses assez élevées correspondant à :

$$\frac{c^2}{gb} = 0,02 \text{ et plus.}$$

Nous allons examiner les termes complémentaires qui doivent être introduits pour tenir compte de cette perturbation.

##### § 1. — Etablissement de la valeur du premier terme complémentaire

Nous avons vu que la valeur de  $h_1$  pouvait être calculée par la relation (133) :

$$h_1 = \frac{2}{3} \times 0,365 (mx)^2 \frac{c^2}{g}$$

qui nous permet d'évaluer :

$$\begin{aligned} \frac{h_1}{H} &= \frac{2}{3} \frac{b}{rd} \times 0,365 (mx)^2 \frac{c^2}{gb} = \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{r} \times 0,365 (mx) \frac{c^2}{gb} \end{aligned} \quad (157)$$

Cette relation fait apparaître la variable indépendante et sans dimensions  $\frac{c^2}{gb}$  ; or, on se rend

compte aisément que l'augmentation du niveau du plan d'eau à l'avant, de l'affaissement à l'arrière d'une quantité  $h_1$ , augmente la surface de la section exposée à la surpression à l'avant et à la dépression à l'arrière et fait qu'ainsi le coefficient  $C_1$  est accru de  $\Delta C_1$  dans le rapport :

$$\frac{\Delta C_1}{C_1} = \frac{h_1}{H} \quad (158)$$

Nous disons  $h_1$  et non  $2h_1$ , parce que la surpression (ou la dépression à l'arrière) va décroissant linéairement sur la hauteur  $h_1$ , si bien que pour l'ensemble des deux faces avant et arrière, c'est  $\frac{2h_1}{2}$  dont il faut tenir compte.

Ainsi :

$$\Delta C_1 = \left( \frac{2}{3} \times \frac{1}{r} \times 0,365 (mx) \frac{c^2}{gb} \right) C_1 \quad (159)$$

Ce n'est pas la seule conséquence de la dénivellation : la formation d'une cuvette le long du flanc de hauteur  $2h_1$  entraîne un écoulement le long de la paroi, de débit  $2Q_1$  (pour l'ensemble des deux flancs) que l'on peut évaluer à :

$$2Q_1 = 2b \times 2g^{1/2} \int_0^{2h_1} (2h_1 - x)^{1/2} dx$$

Si nous rapportons ce débit au volume déplacé fictivement par seconde, par le maître-couple, nous trouvons :

$$\frac{2Q_1}{S \times c} = \frac{1}{r} \frac{16}{3} \left( \frac{2}{3} \times 0,365 \right)^{3/2} (mx) \frac{c^2}{gb}$$

La puissance correspondant à l'écoulement sur la largeur  $b$  peut s'évaluer en écrivant :

$$\begin{aligned} 75N_e &= \int_0^{2h_1} 2\delta b (2g)^{1/2} (2h_1 - x)^{1/2} (2h_1 - x) dx = \\ &= \frac{4}{5} b\delta (2g)^{1/2} (2h_1)^{5/2} \end{aligned} \quad (160)$$

Cela correspond à un accroissement ( $\Delta C_1$ ) tel que :

$$\left( \frac{\delta}{g} S c^2 \right) (\Delta C_1) \times c = \frac{4}{5} b\delta (2g)^{1/2} 2^{5/2} h_1^{5/2}$$

soit tout calcul fait :

$$(\Delta C_1) = \frac{32}{5} \left( \frac{2}{3} \times 0,365 \right)^{5/2} (mx)^3 \frac{c^2}{gb} \times \frac{1}{r} \quad (161)$$

et en tenant compte de la valeur  $\Delta C_1$  évaluée ci-dessus, la relation :

$$\begin{aligned} (\Delta C_1) &= \frac{\Delta C_1}{C_1} 8/9 0,365 (mx)^2 \times \\ &\times 2,36 = 2,36 \Delta C_1 \end{aligned} \quad (162)$$

puisque :

$$C_1 = \frac{8}{9} 0,365 (mx)^2$$

(valeur moyenne pour le fond plat et le fond bombé).

Ainsi nous voyons que du fait de la déformation du plan d'eau sous l'effet de la surpression et de la dépression statique, la valeur du premier terme de la formule donnant  $C_1$  doit être augmentée de  $3 \Delta C_1$ , en chiffres ronds, soit :

$$\left\{ 1 + 3 \left[ \frac{2}{3} \frac{1}{r} \times 0,365 (mx) \frac{c^2}{gb} \right] \right\} C_1$$

La valeur  $\Delta_1$  du terme complémentaire, doit donc s'écrire :

$$\Delta_1 = \frac{8}{9} \times \frac{2}{3} (0,365)^2 (mx)^3 \frac{c^2}{gb} \frac{n}{r} \quad (163)$$

$n$  prenant la valeur 3 pour le cas où l'on n'aurait affaire qu'à la vague statique.

Avec le fond plat, l'absence de dépression au bord inférieur des flancs fait que le phénomène qui apparaît à la surface se reproduit au niveau inférieur, et que le coefficient  $\Delta_1$  doit être doublé.

Nous avons tracé sur la figure 59, à une échelle indéterminée, la vague statique théoriquement déterminée par  $+h_1$  et  $-2h_1$  donnant les droites (A, A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>, A<sub>2</sub>) et dans la réalité par une sinusoïde de même surface totale (courbe pointillée).

##### § 2. — Etude du mode de dissipation

de l'énergie  $\frac{1}{2g} c_1^2$  et de la formation de la vague d'accompagnement.

Valeur du deuxième terme complémentaire

On sait que l'équation donnant l'ordonnée en un point d'abscisse  $x$  de la vague qui se forme à partir du point d'inflexion avant, peut être mise sous la forme ci-dessous, lorsque la valeur de l'ordonnée maximum  $h$  est faible par rapport à  $b$ , distance des deux points d'inflexion :

$$z = h \sin \frac{gx}{c^2} \quad (164)$$

qui conduit à  $z = h$  pour  $\frac{gx}{c^2} = \frac{\pi}{2}$  soit  $x = \frac{c^2}{g} \times \frac{\pi}{2}$ .

Il y aura coïncidence de la crête de vague partie du point d'inflexion avant avec le point d'inflexion arrière, lorsque  $x$  sera égal à  $\frac{b}{4}$  ce qui conduit à :

$$\frac{c^2}{gb} = \frac{1}{2\pi} = 0,16 \quad (165)$$

Cette valeur constitue, en quelque sorte, une limite que l'on évite d'atteindre, ce qui implique une limitation de la vitesse  $c$  pour tout navire de longueur  $L = 1,33 b$ , rapport qui correspond à une valeur minimum.

L'énergie potentielle  $E$  accumulée donne la masse émergente de hauteur  $h$  et de largeur  $e_1$  qui correspond à la largeur du flux influencé, est égale à :

$$E = \int_0^x \delta e_1 \frac{z}{2} \times \frac{z}{2} dx \quad (166)$$

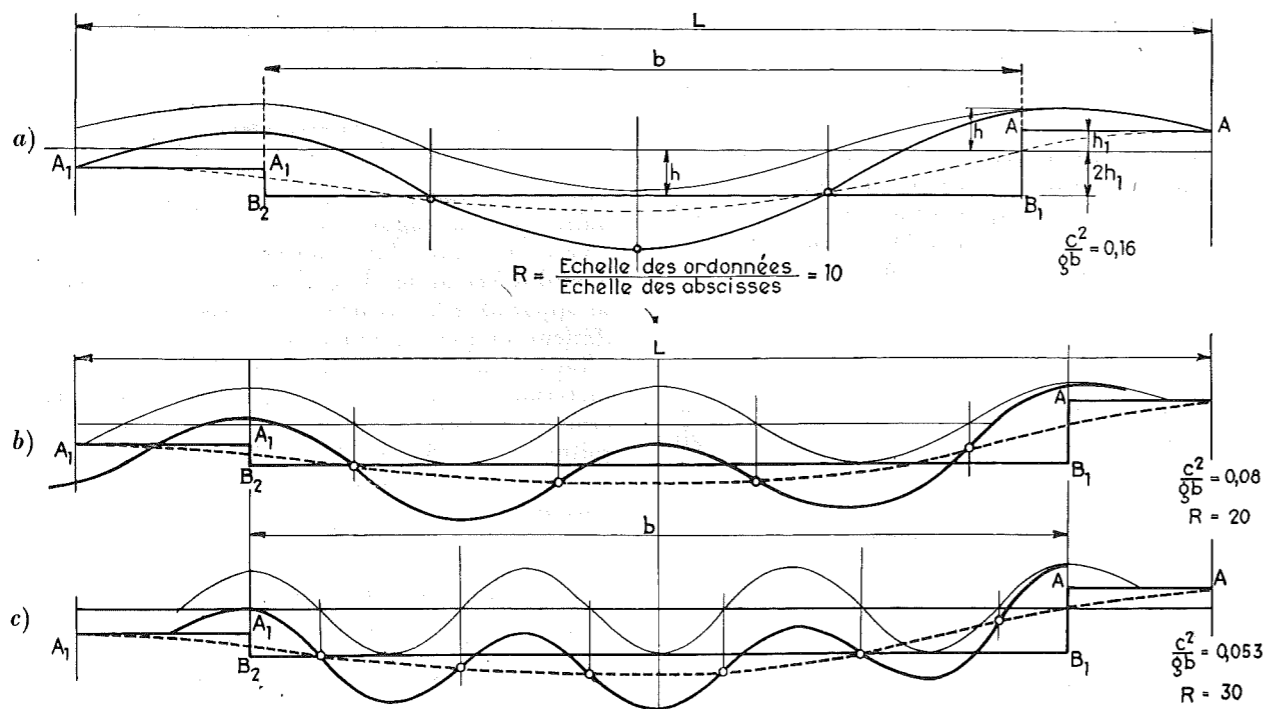


Fig. 59.

Posons :

$$X = \frac{gx}{c^2} \quad dX = \frac{g}{c^2} dx, \quad dx = \frac{c^2}{g} dX \quad (167)$$

il viendra :

$$E = \frac{\delta}{g} e_1 \frac{h^2}{4} c^2 \int_0^X \sin^2 X dX$$

soit :

$$E = \frac{\delta}{g} e_1 \frac{h^2}{4} c^2 \left[ \frac{X}{2} - \sin \frac{2X}{4} \right]_0^X \quad (168)$$

Pour  $X = \frac{gx}{c^2} = \pi$

$$E = \frac{\delta}{g} e_1 \frac{h^2}{4} c^2 \frac{\pi}{2}$$

Dans le cas où la période correspondrait à  $b$ ,  $x$  serait égal à  $b/2$  et  $\frac{c^2}{gb}$  à  $\frac{1}{2\pi}$ .

L'énergie par seconde que nous désignerons par  $\mathfrak{E}_n$  s'obtiendra en divisant  $E$  par  $\frac{x}{c} = \frac{\pi c}{g}$ , soit :

$$\mathfrak{E}_n = \delta e_1 \frac{h^2}{4} \frac{c}{2} \quad (169)$$

Pour l'ensemble des deux vagues d'accompagnement :

$$\mathfrak{E}_n = 2 \left[ \frac{\delta}{g} e_1 \frac{h}{2} c \right] \frac{gh}{2} = m \frac{gh}{2} \quad (170)$$

Comme on doit admettre que la valeur moyenne de  $h$  sur l'étendue  $e_1$  doit être égale à :

$$h = \frac{c_1^2}{2g}$$

il faut écrire, en désignant par  $h$  la dénivellation maximum à la paroi :

$$h = 2 \frac{c_1^2}{2g} = \frac{c_1^2}{g} \quad (171)$$

ce qui conduit à :

$$\mathfrak{E}_n = \frac{m}{2} c_1^2 \quad (172)$$

$m$  étant la masse entraînée par seconde, par l'ensemble des deux vagues se mouvant de part et d'autre de la coque.

Nous avons vu que l'énergie mise en jeu par l'avancement du navire, par seconde rien que dans la partie avant, pouvait s'écrire :

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2} M c_1^2 \quad (173)$$

Le rapport des deux valeurs conduit à :

$$\frac{\mathfrak{E}_n}{\mathfrak{E}} = \frac{\frac{m}{2} gh}{\frac{1}{2} M c_1^2} = \frac{m}{M} \quad (174)$$

On voit donc qu'une faible partie seulement de l'énergie perdue à l'avant, est transmise à la vague et dissipée par elle ; la plus grande partie ( $M - m$ ) est dissipée par des tourbillons s'amorçant au premier point d'inflexion et formant cette surface ondulée de la mer en forme de triangle rectangle dont l'hypothénuse serait tangente aux points d'inflexion avant.

La hauteur de la vague  $h$  peut donc s'évaluer à  $\frac{c_1^2}{g}$  ce qui conduit, en remplaçant  $c_1$  par :

$$c^2 \sin^2 \alpha_1$$

à :

$$h = \frac{c_1}{d_1} \times \frac{c^2}{g} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} (mx)^2 \frac{c^2}{g}$$

ou à :

$$\frac{h}{H} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} (mx) \frac{1}{r} \frac{c^2}{gb} = \frac{m}{M} \quad (175)$$

Nous avons obtenu antérieurement pour la valeur de  $h_1$ , surpression que nous avons appelée statique (formule 133) :

$$\frac{h_1}{H} = \frac{2}{3} \times 0,365 (mx) \frac{1}{r} \frac{c^2}{gb} \quad (176)$$

En confondant 0,365 avec  $1/3$  on voit que la hauteur de la vague statique n'est que la moitié de la hauteur de la vague dynamique engendrée par la libération d'une fraction  $\frac{h}{H}$  de l'énergie apparue au point d'inflexion.

Nous avons tracé (fig. 59), en trait faible, pour  $\frac{c^2}{gb} = \frac{1}{2\pi}$  l'allure de la vague dynamique dont la période est  $b$ , en portant pour sommet de la vague, dans la section  $AB_1$ ,  $h = 2h_1$ ,  $h_1$  ayant été choisi arbitrairement pour hauteur de la vague statique. En combinant les deux, on arrive à la forme en trait fort avec un sommet au second point d'inflexion  $B_2$ , où se produit l'effet d'appel de la masse vers l'axe de symétrie de la coque, pour donner une vitesse perpendiculaire à l'axe égale à  $c_1$ , et une dépression de la même importance que la surpression  $h_1$  à l'avant.

Sous l'effet de la surpression due à l'action de la vague avant qui vient interférer au second point d'inflexion, il se produira un écoulement supplémentaire, déclenchant par induction un accroissement considérable de la dépression arrière ; c'est ce qui se marque sur le diagramme de la figure 58, si pas pour le cas  $\frac{c^2}{gb} = \frac{1}{4} \frac{1}{2\pi} = 0,04$  pour lequel la vague s'est amortie avant d'atteindre le second point d'inflexion, mais pour celui de :

$$\frac{c^2}{gb} = \frac{1}{3} \frac{1}{2\pi}, \quad \frac{c^2}{gb} = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi}, \quad \frac{c^2}{gb} = \frac{1}{2\pi}$$

En faisant abstraction de cet effet d'induction, on peut dire que l'accroissement du coefficient de résistance  $\Delta_1$  dû à la vague dynamique se traduira par :

$$\Delta_1 = \left[ \frac{2}{3} \times \frac{1}{r} \frac{2}{3} (mx) \frac{c^2}{gb} \right] C_1 \quad (177)$$

pour tenir compte tant de l'accroissement  $h$  de niveau à l'avant que de la dépression  $h$  à l'arrière  $\left(\frac{2h}{2}\right)$ .

Pour l'ensemble des deux vagues statique et dynamique, il faudrait donc écrire :

$$\Delta_1 = (8/9 \times 0,365) \left[ \frac{2}{3} \times 0,365 (mx)^3 \right] \frac{c^2}{gb} \times \frac{n}{r}$$

$n = 3 + 2 = 5$  pour le fond bombé ; et si l'on a affaire au fond plat :  $n = 10$  (0,365 étant mis pour  $\frac{1}{3}$ ).

Ainsi pour  $r = 1/2$  :

$$\Delta_1 = \frac{8}{9} \times 0,365 \times \frac{2}{3} \times 0,365 (mx)^3 \frac{c^2}{gb} \times \frac{n}{r}$$

$$= 0,158 \times n (mx)^3 \frac{c^2}{gb} \quad (178)$$

Pour  $(mx)^3 = 0,014$  :  $\frac{c^2}{gb} = 0,16$

$$\Delta_1 = n \times 0,00036$$

soit 0,0018 pour  $n = 5$ , c'est-à-dire pour le cas du fond bombé.

Pour le cas du fond plat, nous avons dit qu'il était rationnel de prévoir une valeur double, mais nous avons trouvé de meilleures coïncidences dans l'ensemble des faits observés, en admettant que pour le fond plat, il faut tripler cette valeur, soit  $\Delta_1 = 3 \times 0,00018 = 0,00054$ .

C'est en utilisant cette valeur que nous avons trouvé le point A (fig. 58) et que nous avons pu tracer la droite partant du point d'origine et aboutissant en A.

On voit que jusqu'à l'abscisse 0,04, il y a une coïncidence remarquable entre valeurs calculées et valeurs observées, si l'on tient compte de la dispersion due à l'erreur relative qui va grandissant rapidement à mesure que la puissance totale diminue (comme le cube de la vitesse).

Jusqu'à 0,04 l'effet de l'interférence entre la vague avant et la vague de dépression arrière est nul ; l'amortissement est tel qu'il n'y a aucun relèvement du plan d'eau. Il n'en est plus de même dans le cas de trois vagues, et encore moins dans le cas de deux vagues et de une vague, le phénomène d'induction déclenché par la superposition de la vague avant avec le phénomène

Tableau VII

	Cargo	Europa	Normandie	Queen Elisabeth	U. S. A.
L, au plan d'eau .....	60	277	294	306	300
d, largeur au maître-couple .....	10	31	36,2	36,0	30
H, tirant d'eau .....	5	10,4	11,2	12,0	10,0
Sm <sup>2</sup> , section au maître-couple .....	48,5	310	390	423	300
Déplacement .....	2256	55.000	66.700	85.000	55.000
n, vitesse en nœuds .....	10,5	27,0	29,5	29,5	36,0 (*)
HP, puissance en service .....	776	105.000	160.000	158.000	197.000
η, rendement de l'hélice .....	0,65	0,72	0,72	0,72	0,76
Ne, puissance utile .....	505	75.600	115.000	114.000	150.000
c, vitesse en m/sec. ....	5,40	13,90	15,20	15,20	18,50
$S \frac{\delta}{g} c^3$ .....	780.000	8.758.000	14.300.000	15.500.000	19.800.000
C <sub>t</sub> , coefficient de résistance .....	0,0487	0,0646	0,0605	0,0554	0,0563
$\frac{1}{m}$ .....	6,00	8,95	8,15	8,50	10,0
$\frac{1}{mx}$ .....	4,15	4,90	5,10	5,31	6,65
(mx) <sup>3</sup> .....	0,058	0,0416	0,0387	0,0355	0,0226
(mx) <sup>3</sup> .....	0,014	0,00855	0,00750	0,00665	0,00340
$\frac{c^2}{gb}$ .....	0,0675	0,131	0,128	0,122	0,172
C <sub>t</sub> , coefficient de résistance à l'origine .....	0,0380	0,0374	0,00376	0,0380	0,0415

(\*) Vitesse aux essais; en service  $n = 33,0$ , HP = 144.000.

de dépression s'amorçant au point d'inflexion arrière, entraîne une augmentation considérable du coefficient de résistance C<sub>t</sub>.

Etant donné les faits observés, l'explication n'est toutefois pas douteuse; tout l'accroissement du coefficient C<sub>t</sub> au-delà de ce que nous appellerons le phénomène statique, est commandé par l'interférence et le coefficient supplémentaire qui résulte de l'effet dynamique, doit varier par paliers.

### § 3. — Etude de l'effet d'interférence

Nous n'avons pas poussé le calcul théorique de Δ<sub>1</sub> jusqu'au bout, mais ce que nous avons pu en amorcer, nous a montré que les valeurs de Δ<sub>1</sub> croissaient linéairement par paliers, en fonction de :

$$\frac{1}{r} (mx)^3 \frac{c^2}{gb}$$

comme nous l'avons établi pour les termes de complément qui se rapportent à la vague statique.

Cette remarque nous a permis de tracer le diagramme de C<sub>t</sub> dans toute l'étendue des abscisses, grâce aux données expérimentales qu'a bien voulu nous confier le Chantier Naval de la Société Cockerill pour trois navires de grand allongement et de haute performance qui sont rappelées au tableau VI, les valeurs inscrites correspondant aux observations en service.

Comme pour ces trois navires, le rapport  $r$  est pratiquement égal à  $\frac{1}{3}$ , nous pourrions déterminer les valeurs C<sub>t</sub> à l'origine, en partant de la formule établie antérieurement :

$$C_t = 0,842 \frac{8}{9} \times 0,365 (mx)^2 + 2,06 \times 2 k_1'' \frac{1}{mx} \quad (179)$$

Pour le calcul de  $2 k_1''$ , nous avons admis que la rugosité des parois de ces paquebots était égale à 12 fois la rugosité du fer.

Ce chiffre a été déduit à la fin de la Troisième Partie, en partant d'une donnée indiquée sur le diagramme de la figure 48, à propos de l'Europa, et tirée de l'ouvrage *Weerstand en Voortstuwing van Schepen* de Dr Ir. W. P. A. van Lammeren.

En appliquant la formule (131), nous avons pu déduire :

$$2 k_1'' = 0,00257$$

Le tableau VII donne, dans la dernière ligne, les valeurs de C<sub>t</sub> à l'origine, calculées au moyen de la formule (179) et du coefficient  $2k_1'' = 0,00257$ .

Voici à présent comment nous avons procédé pour tracer le diagramme complet.

Partant du bateau à fond bombé de même allongement 4,15 que le bateau hollandais à fond plat, nous avons trouvé dans le calcul précédent pour le rapport  $r = 1/3$ , l'ordonnée à l'origine qui est de 0,0388.

Pour calculer l'accroissement dû au phénomène statique, il suffit que nous prenions la valeur calculée antérieurement pour  $r = 1/2$ , soit 0,018 et que nous la multiplions par  $\frac{3}{2}$  soit 0,027. Nous avons donc porté en ordonnée 0,0388 + 0,027 = 0,0415 pour l'abscisse 0,16 et trouvé le point B.

La droite partant de l'ordonnée 0,0388 et passant par B, définit le point C.

L'accroissement Δ à partir de C peut être calculé en observant que les accroissements correspondant pour le fond plat doivent être divisés par 2 (puisqu'en passant de  $r = 1/2$  à  $r = 1/3$ , il faut multiplier les valeurs observées par  $\frac{3}{2}$  et que les valeurs de Δ correspondant au fond plat sont admises comme trois fois plus grandes que pour le fond bombé, à égalité de rapport  $r$ . ( $\frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ ).

Les points D et E ont été obtenus de cette manière.

Pour calculer le point G correspondant à l'allongement du Normandie, nous avons appliqué la relation qui fait varier les valeurs de Δ pour une même abscisse, comme  $(mx)^3$ . Partant de Δ fixé par le point E correspondant à  $(mx)^3 = 0,014$ , nous avons déterminé le point G en admettant une réduction dans le rapport  $\frac{0,00755}{0,0140}$ , 0,00755 correspondant à  $(mx)^3$  pour le Normandie. Cela nous a permis, tenant le point expérimental pour bon, de tracer la droite GH passant par le point expérimental.

L'ordonnée BH correspond à Δ pour l'abscisse 0,16, nous pouvons en déduire l'ordonnée correspondant à l'allongement 4,15, puis 4,90, 5,31 et enfin 6,65 du U. S. A.

La droite EF complétant le diagramme initial s'en est suivie, de même que les droites G'H, G''J, G''S donnent le diagramme dans la dernière partie pour les bateaux d'allongement 4,90, 5,31 et 6,65.

Nous ne soulignerons pas que ces droites passent par les points expérimentaux de l'Europa et du Queen Elisabeth, les valeurs de  $b$  ne nous étant connues qu'avec une approximation trop incertaine, mais les écarts qui sont très faibles ici, ne pourraient pas être modifiés sensiblement pour les valeurs réelles de  $b$  qui ne peuvent s'écarter beaucoup des valeurs admises.

En prolongeant la droite G''S de l'U. S. A., nous avons trouvé la valeur de C<sub>t</sub> correspondant à l'abscisse 0,172 établie pour la vitesse aux essais de 36 nœuds.

La puissance calculée de 197.000 chevaux (tableau VII) qui en résulte tombe à 144.000 chevaux à la vitesse de service qui est vraisemblable-

ment de 33 nœuds, et c'est cette puissance qu'il faut comparer aux 105.000 HP de l'Europa, bateau de même tonnage et presque de même longueur, mais dont la vitesse n'a pu dépasser 27 nœuds.

Un écart de cette importance au point de vue de la puissance installée et utilisée en service, peut s'expliquer par les progrès qui ont été réalisés sur le poids de l'appareil moteur et sur le poids du bateau lui-même.

Cette dernière conclusion n'est acceptable, il est vrai que, si l'on admet que par un tracé parfait utilisant l'allongement optimum, il a été effectivement possible de ramener, comme le montre notre calcul, la valeur de C<sub>t</sub> à la vitesse

de 36 nœuds, à 0,0563 pour  $\frac{c^2}{gb} = 0,172$ , car si

l'on s'en était tenu aux tracés antérieurs, cette valeur du coefficient pour la même abscisse serait passée à 0,0763 rendant vraisemblablement toute réalisation, pratiquement impossible.

*L'influence prépondérante de l'allongement est ainsi mise lumineusement en évidence.*

### § 4. — Recherche de la solution la plus favorable

Nous pouvons nous demander ce qui se passe au-delà de  $\frac{c^2}{gb} = 0,16$ , au point de vue de l'interférence.

Pour  $x = \frac{b}{3}$ , c'est-à-dire pour  $\frac{c^2}{gb} = \frac{4}{3} \frac{1}{2\pi} = 0,213$  la crête de la vague arrière se présentera (fig. 59a) non plus dans le plan A<sub>1</sub>B<sub>2</sub>, mais dans un plan situé à l'extrémité, au-delà de A<sub>1</sub>. Dans le plan A<sub>1</sub>B<sub>2</sub>, la dénivellation du fait de la vague dynamique, sera nulle. On peut donc comprendre que la droite G''S (fig. 58) ne se prolongera pas au-delà de l'abscisse 0,16, et qu'à partir de 0,16, la loi pourra être donnée par une droite telle que BT, T correspondant à l'abscisse 0,213 (fig. 60).

Cette limite inférieure ne pourra toutefois être atteinte parce que, au-delà de A<sub>1</sub>B<sub>2</sub>, la vague reprend son amplitude normale et provoque quand même une surpression arrière favorisant un écoulement complémentaire; on peut néanmoins prévoir que le point figuratif dont l'abscisse est égale à 0,172, correspondant au paquebot U. S. A. se trouvera déplacé vers le bas, et pourrait à la limite, tomber en U, ce qui amènerait une puissance à la vitesse limite, de 179.000, au lieu de 195.000 chevaux.

Cette remarque fait comprendre pourquoi les constructeurs ont adopté des proportions telles

que  $\frac{c^2}{gb}$  dépasse nettement la valeur 0,16, afin de pouvoir profiter de cette chute de C<sub>t</sub>.



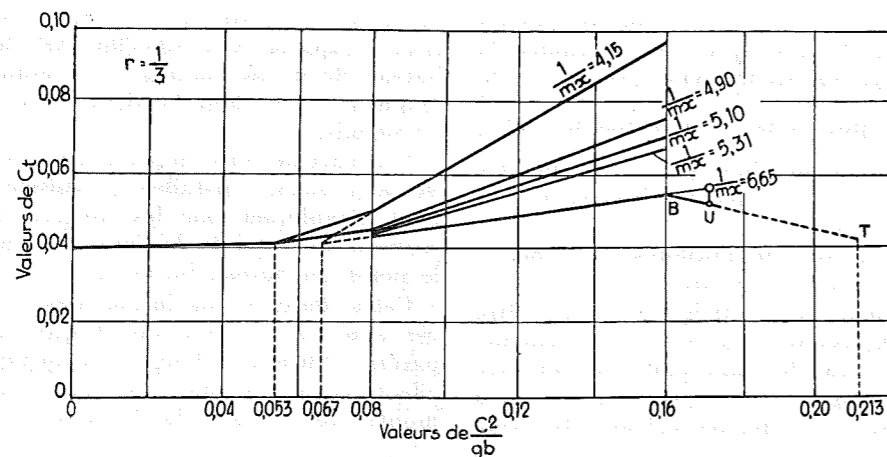


Fig. 60.

Lorsqu'on s'en tient à des valeurs  $\frac{c^2}{gb}$  inférieures à 0,16, la solution la plus favorable peut être recherchée, en passant du diagramme de la figure 58, en fonction de  $\frac{c^2}{gb}$ , au diagramme en

On arrive ainsi à des courbes qui passent par un minimum et sont toutes asymptotiques à la droite OB, qui donne, en fonction de  $\frac{1}{mx}$ , la valeur du terme  $C_2$ . Il est évident que la solution optimum n'est pas

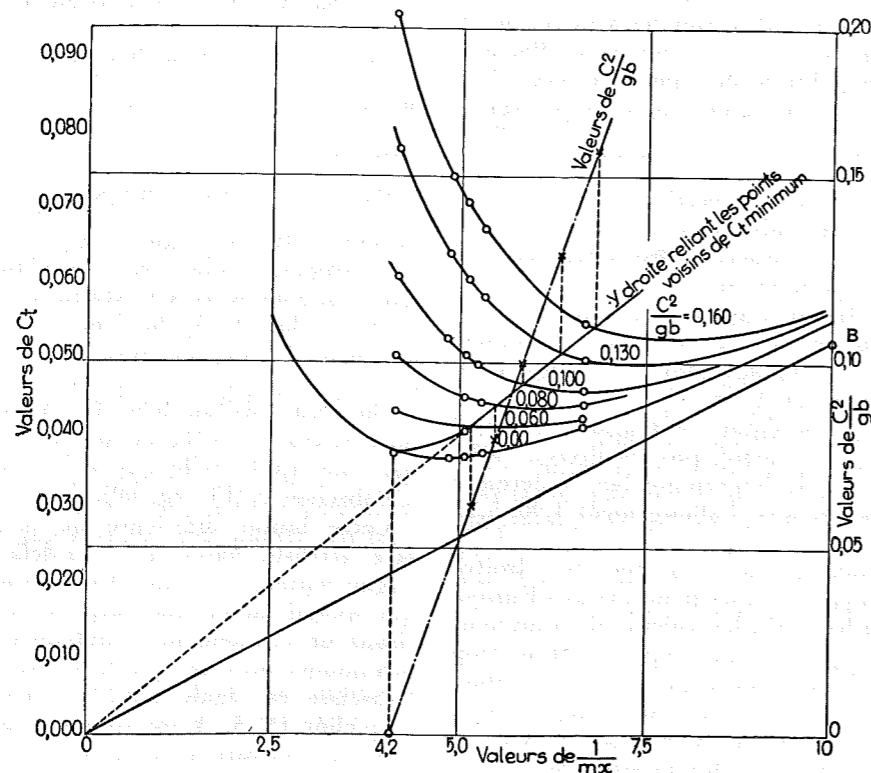


Fig. 61.

fonction de  $\frac{1}{mx}$  (fig. 61). Les points indiqués par un cercle sont obtenus directement en relevant les valeurs de  $C_t$  pour une même valeur de  $\frac{1}{mx}$ .

donnée par la valeur strictement minimum  $C_t$ . Si nous traçons une droite telle que OY qui relie les points situés tous en deçà des valeurs correspondant au minimum, nous pourrions considérer que nous réaliserons la valeur de  $C_t$  la plus favorable.

Si, nous portons en ordonnées les valeurs de  $\frac{c^2}{gb}$  correspondant aux points d'intersection, nous trouverons que  $\frac{c^2}{gb}$  est donné en fonction de  $\frac{1}{mx}$ , par une loi linéaire :

$$\frac{c^2}{gb} = \left( \frac{1}{mx} - 4,1 \right) 0,06 \quad (180)$$

applicable entre  $\frac{1}{mx} = 5$  et  $\frac{1}{mx} = 7$ .

On voit que l'allongement efficace  $\frac{1}{mx}$  doit varier avec la valeur de  $\frac{c^2}{gb}$ .

Rappelons que la jauge  $J_1$  en kg est égale à :

$$J_1 = \delta S \times L \times \varphi = \delta \left( r \varphi \frac{1}{m} \right) d^3 \quad (181)$$

$\varphi$  étant un coefficient de réduction qui tient compte du tracé du bateau.

Si nous désignons par Z le coefficient :

$$Z = C_t \times \frac{c^2}{gb} \quad (182)$$

nous pouvons montrer que Z est proportionnel au nombre de kgm dépensé par tonne de marchandises transportées sur 1000 m., car :

$$75 Ne = \left( S \frac{\delta}{g} c^2 \right) C_t \times c \quad (183)$$

relation dont on peut tirer :

$$\frac{75 Ne \times 1000}{\left( \frac{S \times b \times \delta}{1000} \right) \times c} = C_t \times \frac{c^2}{gb} \times 10^6 = 10^6 Z \quad (184)$$

$\frac{1000}{c}$  représentant le temps mis à parcourir 1000 m.

La connaissance de la fonction Z est donc importante. Or, si tenant compte de la relation (180), nous faisons le produit  $\frac{c^2}{gb}$  par la valeur  $C_t$  correspondant à une valeur de  $\frac{1}{mx}$ , nous voyons que Z apparaît comme une fonction linéaire de  $\frac{c^2}{gb}$ , à partir d'une abscisse égale à 0,06 (fig. 62).

$$Z = \left( \frac{c^2}{gb} - 0,020 \right) 0,062 \quad (185)$$

Il serait assez facile d'établir que le coût de la tonne transportée sur 1000 m., est une fonction de Z et passe par un minimum pour une valeur de Z donnée.

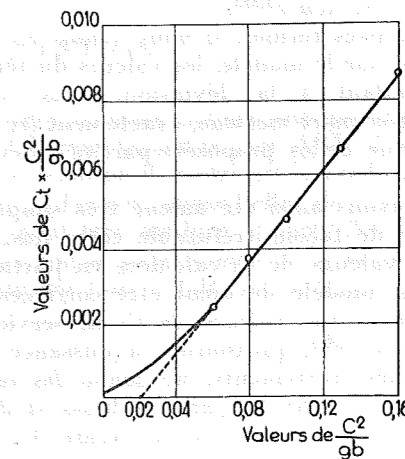


Fig. 62.

Il s'ensuit que  $\frac{c^2}{gb}$  est connu :

$$\frac{c^2}{gb} = \frac{Z}{0,062} + 0,02 \quad (186)$$

Connaissant  $\frac{c^2}{gb}$ , la formule (180) fait connaître

$\frac{1}{mx}$  et la relation (181) donne d, la largeur au maître-couple, en fonction de la jauge  $J_1$  qui est évidemment une donnée.

On voit que le problème est entièrement déterminé : à chaque valeur de  $J_1$  correspond un allongement déterminé et une vitesse optimum.

### § 5. — Conclusions

Nous voudrions souligner ici, dans les conclusions, combien la mise au point du problème de la détermination correcte du coefficient de frottement  $2k_1''$  pour les surfaces lisses et pour les surfaces rugueuses, que nous avons traité dans la Troisième Partie, a été décisive au point de vue de la présentation nouvelle de l'étude publiée dans le n° 3, de la 9<sup>e</sup> série, tome IX de la R. U. M., parue en 1953.

Il apparaît, en effet, clairement à présent, que, en appliquant nos formules, et en ne faisant intervenir comme surface active que la surface comprise entre les points d'inflexion, on retrouve exactement les valeurs de  $C_2$  proposées par les auteurs des essais sur le modèle de 4,50 m., en partant d'une relation vraie mais seulement dans la région des valeurs de Re correspondant

au modèle. Dans la région des valeurs de  $Re$  correspondant à des bateaux normaux, il faut se servir des données de la science actuelle, qui implique une valeur de  $2k_1''$  variable avec  $Re$  et avec la rugosité et exige l'introduction du facteur  $c^3$  et non  $c^{2,825}$ .

En d'autres termes, si nous avons eu à tirer des essais sur le modèle, les valeurs du terme  $C_l$  correspondant à la déviation, nous eussions obtenu, avec notre méthode, exactement les mêmes valeurs que celles proposées par les auteurs des essais.

Nous avons ainsi été amené très simplement à établir de façon irréfutable cette fois, pourquoi les valeurs de  $C_l$  calculées en partant des essais sur modèle devaient être corrigées, pour donner les vraies valeurs de  $C_l$  en service : la formule en  $c^{2,825}$ , qui fournit la puissance absorbée par les frottements, ne donne des résultats corrects, que pour les surfaces lisses et dans la région des valeurs de  $Re$  de l'ordre  $3 \times 10^5$  à  $4 \times 10^5$ .

Pour les surfaces rugueuses et les valeurs de  $Re$  de l'ordre de  $10^7$  à  $10^8$ , il faut partir de l'expression en  $c^3$ , et adopter :

1° pour surface efficace la surface comprise entre les points d'inflexion ;

2° pour valeur de  $2k_1''$  les valeurs données par la formule (131), en adoptant pour  $\frac{e_1}{e}$  un rapport  $\frac{1}{10}$  à  $\frac{1}{12}$ .

A partir de ce moment, toute contradiction cesse, et la coïncidence entre valeurs calculées et valeurs observées en service, ne dépend plus que du choix de  $\frac{e_1}{e}$ .

On pourrait se proposer, en partant d'essais systématiques sur la rugosité, de déterminer ce rapport, que provisoirement nous proposons de prendre égal, suivant les cas, à une valeur comprise entre  $\frac{1}{8}$  et  $\frac{1}{12}$ .

Le lecteur pourrait s'étonner qu'il ait été possible d'arriver à une connaissance aussi parfaite de la question, en partant de moyens aussi simples. Cela tient comme nous l'avons montré à plusieurs reprises à la valeur du théorème de la quantité de mouvement sur lequel tout le calcul s'appuie.

Nous disposons ainsi d'une nouvelle preuve de la solidité et de la fécondité de la méthode adoptée ici.

## CINQUIÈME PARTIE

### ÉTUDE DE LA SUSTENTATION

#### CHAPITRE I

#### EXPRESSION DE $c_z$ POUR LES VALEURS NORMALES DE $c$

##### § 1. — Valeur du coefficient de portance $c_z$

Nous avons abordé cette étude, il y a une dizaine d'années, et en 1947, nous l'avons présentée sous la forme actuelle, dans l'ouvrage intitulé « Hommage de la Faculté des Sciences appliquées à l'Association des Ingénieurs sortis de l'École de Liège, à l'occasion de son centenaire », ouvrage édité par les soins de la Faculté des Sciences appliquées de l'Université de Liège.

En nous reportant au chapitre I, § 5, de la Première Partie, nous voyons que l'on peut évaluer la poussée  $P$  créée par un flux de vitesse  $c$  à l'entrée, d'épaisseur  $e$ , de profondeur  $a$ , en écrivant (fig. 10) :

$$P = \left( \frac{\delta}{g} S c^2 \right) c_z$$

$S$  désignant ici la surface de l'aile,  $\alpha$  l'angle de déviation.

Le coefficient de portance  $c_z$  peut se mettre sous la forme :

$$c_z = k' \sin \alpha$$

avec :

$$k' = \frac{e}{a}$$

Lorsqu'on opère au tunnel avec une masse d'air pratiquement illimitée par rapport à la profondeur  $a$ , la continuité exige qu'un redressement se produise à l'arrière à partir de l'angle  $(\beta_1 + \gamma)$  (fig. 11), l'angle de déviation passant de  $\alpha$  à  $(\beta_1 + \gamma)$ .

La valeur de  $c_z$  doit dès lors s'écrire :

$$c_z = k' F(z) \sin \alpha$$

en adoptant pour  $\alpha$  la valeur de  $(\beta_1 + \gamma)$  (fig. 63).

Le problème revient à déterminer la valeur de  $F(z)$  en fonction des éléments caractéristiques de l'aile.

En appliquant la notion des trajectoires concentriques, nous arrivons à schématiser le

phénomène comme il est indiqué figure 63, l'arc CGB remplaçant le plan AGB. A vrai dire, une perturbation doit être créée par la déviation brusque à l'entrée, mais l'effet de cette perturbation peut être analysé à part. Nous pouvons dire que tout se passe comme si la déviation était produite par l'arc AGB.

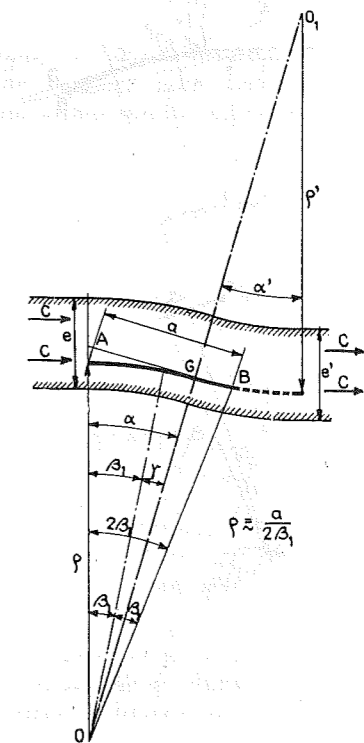


Fig. 63.

L'arc de redressement sera fixé par la condition de continuité  $e = e'$  et par la constance du rapport :

$$\frac{e}{\rho \alpha} = \frac{e'}{\rho' \alpha'} = \pi$$

ce qui conduit à :

$$\rho' = \rho$$

Le rayon  $\rho$  pourra être donné par la relation :

$$\rho = \frac{a}{2\beta_1}$$

mais son centre ne sera connu que si  $\gamma$  est déterminé.

La valeur de  $\gamma$  est celle que nous avons établie au chapitre IV, §1, de la Première Partie, c'est-à-dire que pour le plan et pour la plaque courbe à simple courbure :

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{2}$$

L'expérience montre, en effet, que quand on fait pivoter l'aile autour de son arête d'entrée A (fig. 64), et que l'on désigne par  $i$  l'angle que fait la corde avec la direction du flux à l'entrée, tout se passe comme si l'on avait affaire

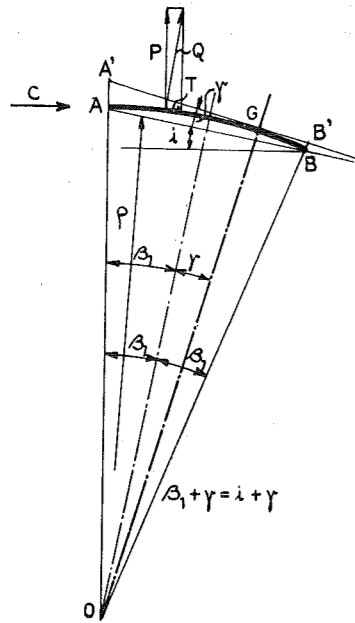


Fig. 64.

à un plan  $A'B'$  tangent en G faisant avec cette corde un angle  $\gamma$ , l'angle de déviation  $\alpha$ , prenant la valeur  $i + \gamma$ , ce qui revient à écrire :

$$\alpha = i + \gamma = \beta_1 + \gamma$$

Pour la position de nulle portance, on trouvera  $\alpha = 0$  et  $i = -\gamma$ , ce qui conduit à la figure 65 identique à la figure 17, qui nous a permis d'établir la valeur de :

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{2}$$

Entre la position de l'aile AB de la figure 64 et la position  $A'B'$  de l'aile de la figure 65, on peut dessiner une position intermédiaire correspondant à un angle de déviation  $\alpha' = (\beta' + \gamma')$  plus petit que  $\alpha = (\beta_1 + \gamma)$ , (fig. 66), le rayon  $\rho$  devenant égal à :

$$\rho' = O'A$$

de façon que  $O'$  étant situé sur la verticale, l'arc de rayon  $\rho'$  soit tangent à la direction de la vitesse  $c$  du flux à l'entrée.

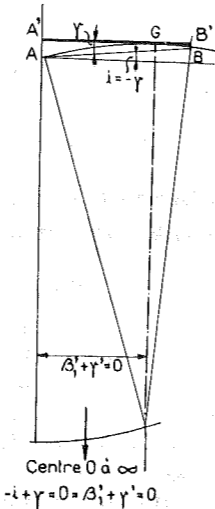


Fig. 65.

Faire varier l'angle  $\alpha'$  reviendra par ce procédé, à faire varier le rayon  $\rho'$ , qui passera

de  $\rho = AO$  pour  $\alpha = (\beta_1 + \gamma)$  figure 64,

à  $\rho' = \infty$  pour  $\alpha = 0$  figure 65,

et à  $\rho' = AO'$  pour  $\alpha = (\beta' + \gamma')$  figure 66.

Les filets déviés par l'arc AG donnent lieu à une résultante  $Q'$  appliquée suivant la bissectrice de l'angle  $(\beta_1' + \gamma')$ ; les filets redressés par l'arc GB détermineront une réaction  $Q''$  dirigée en sens inverse, orientée suivant la bissectrice de l'angle  $(\beta_1' - \gamma')$  [sur la figure et par erreur indiqué  $(\beta_1' - \gamma)$ ].

Comme les considérations précédentes ne valent que pour des angles de déviation faibles, nous confondrons les sinus avec les angles, et les cosinus avec l'unité.

Dans ces conditions :

$$P = Q' - Q''$$

$$Q' = \left(\frac{\delta}{g} Sc^2\right) \frac{e}{a} (\beta_1' + \gamma') \quad (186)$$

$$Q'' = \left(\frac{\delta}{g} Sc^2\right) \frac{e}{a} (\beta_1' - \gamma') \quad (186)$$

A vrai dire, nous ne tenons pas compte ainsi d'un phénomène local de rabattement par l'arc GB (fig. 66b) d'une fraction  $e'$  de l'épaisseur totale  $e$  du flux dévié, l'épaisseur  $e'$  étant déterminée pour le surplus par la relation fondamentale (24) :

$$e' = k'a' = k'a \frac{\beta_1' - \gamma'}{2\beta_1'} \quad (188)$$

dans laquelle :

$$A = \frac{\beta_1' - \gamma'}{\beta_1' + \gamma'} \quad (192)$$

$$B = \frac{2(\beta_1' - \gamma')}{2\beta_1'} \quad (193)$$

Les rapports  $A$  et  $B$  peuvent en effet, être calculés en fonction des angles  $\beta_1$  et  $\gamma$  puisque le rapport  $\frac{\gamma}{\beta_1}$  a la même valeur que celui qui est déterminé en fonction de  $\beta_1'$  et  $\gamma'$ .

Nous donnerons sous la remarque I, dans le § suivant, la signification de  $\frac{k_1'}{k_1}$ .

Remarque. — En raisonnant comme nous venons de le faire pour l'évaluation de  $Q'''$ , nous avons admis implicitement que nous avions

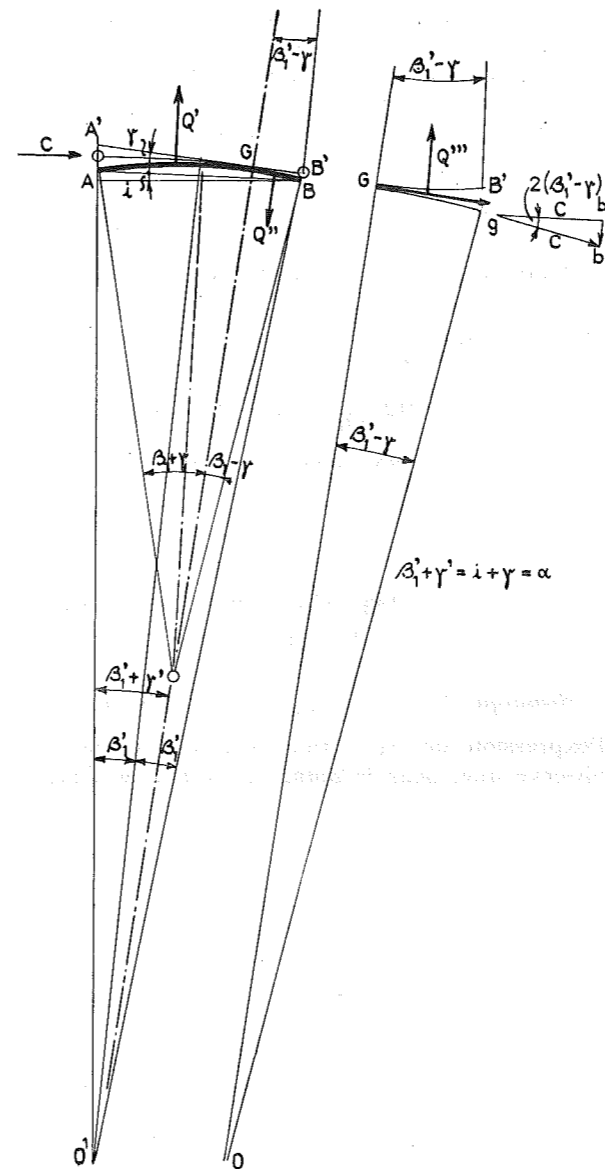


Fig. 66-66b.

Ce rabattement d'une fraction du flux crée une force  $Q'''$  que l'on peut évaluer en partant de la relation ci-dessus,

$$Q''' = \left(\frac{\delta}{g} Sc^2\right) \frac{e}{a} \left(\frac{\beta_1' - \gamma'}{2\beta_1'}\right) \times 2(\beta_1' - \gamma') \quad (189)$$

Dans ces conditions, la valeur de  $P$  pourra se mettre sous la forme :

$$P = Q' - Q'' + Q''' = \left(\frac{\delta}{g} Sc^2\right) k' (Fz) \sin \alpha \quad (190)$$

en représentant par  $\sin \alpha$ , l'angle de déviation variable  $(\beta' + \gamma')$  et par  $F(z)$

$$F(z) = 1 - A + AB \frac{k_1'}{k_1} \quad (191)$$

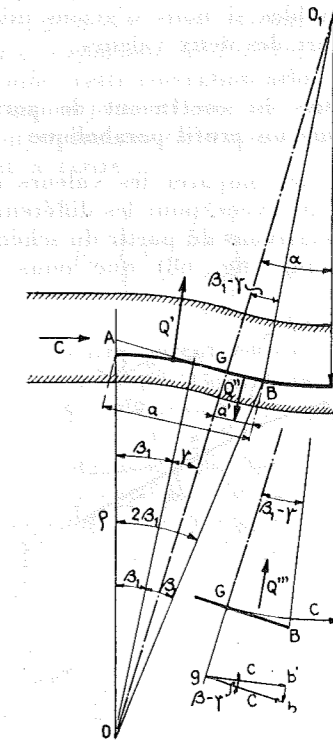


Fig. 67-67b.

affaire à une plaque courbe AB et non à un plan. Si, en effet, la partie GB était plane, ce rabattement prendrait la forme indiquée figure 67b, si bien que l'angle de rabattement que nous avons évalué à  $2(\beta_1' - \gamma')$  figure 66b, devient, figure 67b, pour le plan  $(\beta_1' - \gamma')$ , [indiqué sur cette figure par erreur  $(\beta - \gamma)$  dans le triangle des vitesses  $(gb'b)$ ].

Cela conduit pour le plan (puisque  $\gamma/\beta_1 = \frac{1}{2}$ ), à :

$$A = \frac{\beta_1 - \gamma}{\beta_1 + \gamma} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, \quad B = \times \frac{\beta_1 - \gamma}{2\beta_1} = \frac{1}{12}$$

soit :

$$F(z) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = 0,75 \quad (194)$$

alors que pour la plaque courbe à une seule courbure :

$$F(z) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{12} = \frac{5}{6} = 0,832 \quad (195)$$

Pour ces deux cas, le rapport  $\frac{k_1'}{k'}$  dont nous donnerons la signification dans la remarque ci-après, peut être pris égal à l'unité.

Les résultats observés au tunnel ne seraient pas coordonnables si nous n'avions mis en évidence cet écart des deux valeurs.

### § 2. — Valeur du coefficient de portance $c_z$ pour un profil parabolique

Pour pouvoir comparer les valeurs calculées aux valeurs observées, pour les différents profils présentés, nous avons dû partir du schéma d'une aile parabolique (fig. 68) que nous pouvons

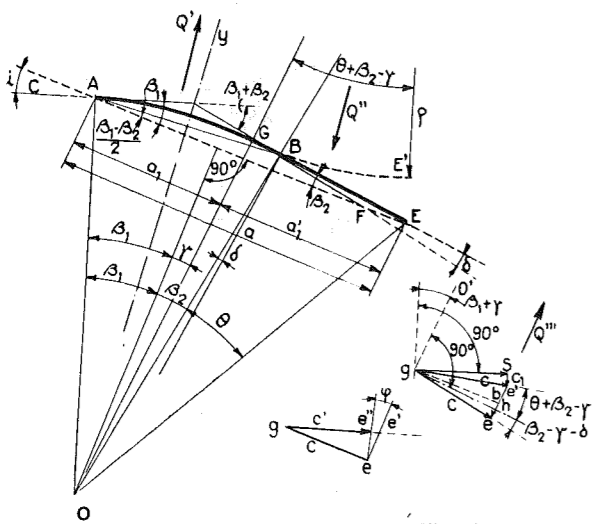


Fig. 68.

Fig. 69.

la regarder comme constituée d'un arc de cercle AB, d'angle au centre  $(\beta_1 + \beta_2)$  suivi d'une tangente BF en B.

Pour rester encore plus général, nous avons supposé que la partie arrière de l'aile, était relevée d'un angle  $\delta$ , de telle sorte que le profil est représenté par AGBE.

Le raisonnement que nous avons tenu pour aborder le cas le plus simple de l'aube à une seule courbure, nous conduit, pour le premier terme, à la même expression.

Pour le second terme, il faut écrire :

$$Q'' = \left(\frac{\delta}{g} Sc^2\right) \frac{e}{a} (\theta + \beta_2 - \gamma) \quad (196)$$

Enfin, pour le troisième terme, il vient :

$$Q''' = \left(\frac{\delta}{g} Sc^2\right) \frac{e}{a} \frac{\theta + \beta_2 - \gamma}{\theta + \beta_1 + \beta_2} \times [(2(\beta_2 - \gamma) + (\theta - \delta))] \quad (197)$$

ce qui conduit aux valeurs suivantes :

$$A = \frac{\theta + \beta_2 - \gamma}{\beta_1 + \gamma} \quad (198)$$

$$B = \frac{2(\beta_2 - \gamma) + (\theta - \delta)}{\theta + \beta_1 + \beta_2} \quad (199)$$

Remarque I. — Le rapport  $\frac{k_1'}{k_1}$  qui figure dans l'expression de  $F(z)$ , tient compte de ce fait observé que, pour le plan, et au-delà de l'angle

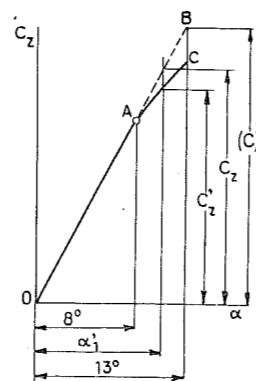


Fig. 70.

de déviation  $\alpha$  de  $8^\circ$ , la valeur de  $k'$  diminue, si bien que la valeur de  $c_z$  n'est plus donnée par une droite en fonction de l'angle  $\alpha$ , passant par l'origine, mais par ligne brisée, OAC (fig. 70). Comme les angles de rabattement atteignent pour certains profils étudiés des valeurs supérieures à  $8^\circ$ , nous avons voulu introduire une correction faible d'ailleurs mais non négligeable. Nous avons, pour cela, remplacé  $k'$  par  $k_1'$ , dans la relation (188) qui, pour le cas présent, doit s'écrire :

$$e' = k_1' a \frac{\theta + \beta_2 - \gamma}{\theta + \beta_1 + \beta_2} \quad (200)$$

ce qui revient à introduire dans la valeur de  $F(z)$  le rapport  $\frac{k_1'}{k'}$  que nous avons admis égal à :

$$\frac{k_1'}{k'} = 1 - 0,08 \frac{\alpha_1' - 8^\circ}{5^\circ} \quad (201)$$

très proche de la valeur que l'on pourrait établir en remarquant que (fig. 70) :

$$\frac{c_z - c_z'}{BC} = \frac{k' \alpha_1' - k_1' \alpha_1'}{BC} = \frac{\alpha_1' - 8}{13 - 8} = \frac{\alpha_1' - 8}{5}$$

L'angle  $\alpha_1'$  pour l'angle maximum de déviation  $(\beta_1 + \gamma)$  peut s'évaluer à :

$$2(\beta_2 - \gamma) + (\theta - \delta)$$

Pour évaluer  $\frac{k_1'}{k'}$ , nous aurons à dresser le tableau des valeurs du rapport (r) :

$$(r) = \frac{2(\beta_2 - \gamma) + (\theta - \delta)}{\beta_1 + \gamma} \quad (203)$$

et à calculer  $\alpha_1'$  pour l'angle  $\alpha$  de déviation qui a servi dans la vérification :

$$\alpha_1' = \alpha \times (r) \quad (204)$$

### § 3. — Vérification expérimentale de la valeur de $c_z$

Nous avons donné dans le tableau I les valeurs caractéristiques des profils qui nous ont servi à la vérification expérimentale de la valeur de  $c_z$ . Nous le complétons en indiquant dans le tableau VIII, dans les colonnes 3 et 4, les valeurs de  $\theta$  et  $\delta$  (d'après les notations de la fig. 69).

Pour pouvoir opérer l'identification des valeurs observées et des valeurs calculées, pour l'angle  $\alpha$  indiqué colonne 5, nous avons déterminé en fonction des valeurs de :

$$\frac{\gamma}{\beta_1}, \quad \frac{\beta_2}{\beta_1}, \quad \frac{\beta_2}{\beta_1}, \quad \frac{\theta}{\beta_1}, \quad \frac{\delta}{\beta_1},$$

tout d'abord :

(r) colonne (6),

$\alpha_1'$  colonne (7),

$\frac{k_1'}{k_1}$  colonne (8),

enfin  $F(z)$  colonne (9).

Nous avons dû tenir compte de ce que les essais ont été faits avec des ailes dont l'enver-

gure était finie en introduisant le coefficient  $k$  d'envergure

$k = 5$ , pour tous les profils, sauf pour les profils minces.

$k = 3$ , pour les profils minces.

Nous avons ainsi trouvé par application de la formule de Betz en fonction de la valeur expérimentale  $c_z$ , la valeur que l'on aurait observé si l'envergure avait été infinie :

$$c_\infty = c_z \frac{k + 0,8}{0,8} \quad (205)$$

Ces valeurs de  $c_z$  et  $c_\infty$  sont indiquées colonnes (10) et (11).

L'identification donne alors la valeur de  $\frac{e}{a}$  pour l'envergure infinie (colonne 12); cette valeur doit toutefois être corrigée pour tenir compte de l'épaisseur de l'aile.

Nous avons admis, à défaut de mieux, et parce que l'auscultation de l'ensemble nous montrait un accord satisfaisant, qu'il fallait soustraire de l'épaisseur du flux influencé, l'épaisseur de l'aile : cette correction arbitraire, la seule que nous ayons faite au cours de cette étude, sans nous appuyer sur des constatations directes, nous a conduit à écrire :

$$k_e' \left(1 - \frac{\frac{e}{a}}{\frac{e}{a}}\right) = \frac{e}{a} \quad (206)$$

Le facteur entre parenthèses a été évalué et porté dans la colonne (14); en divisant par ce facteur, nous avons trouvé  $k_e'$  inscrit dans la colonne (15).

Nous ferons remarquer, tout d'abord, que pour le plan caréné, nous avons ainsi trouvé, comme moyenne entre Naca et Rhodes :

$$\frac{3,25 + 3,02}{2} = 3,14 = \pi$$

c'est-à-dire la valeur théorique fournie par la théorie classique.

Pour l'aile courbe à une seule courbure (numérotées 12 et 13), nous avons trouvé 2,982 comme valeur moyenne.

Celle-ci doit être corrigée parce que la valeur  $\pi$  que nous venons de noter pour le cas du plan, n'est réalisée que quand :

$$\Phi_1 = \frac{\beta_1 + \gamma}{\beta_1 + \beta_2} = \frac{\beta_1 + \gamma}{2\beta_1} = 0,75.$$

Dans le cas présent, la valeur de  $\frac{\gamma}{\beta_1}$  observée est égale à  $\frac{6,2}{13,5}$  pour le profil n° 12 et  $\frac{5,5}{13,5}$  pour

Tableau VIII

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	Désignation	$\theta$	$\delta$	$\alpha$	(r)	$\alpha_1$	$\frac{k'}{k}$	F(z)	$c_z$	$c_z$	$\frac{e}{a}$	$\frac{e}{a}$	$1 - \frac{e}{a}$	$k_e'$	$\Phi$	$\Phi/\Phi_1$	$k'$
1	Rh 16	9,5	0	14	0,853	12,0	0,936	0,573	0,415	0,539	3,825	0,12	0,967	3,945	0,932	1,25	3,15
2	26	10,25	-1,5	14	0,910	12,7	0,925	0,506	0,423	0,481	3,935	0,10	0,975	4,035	0,985	1,31	3,12
3	28	7,50	-1,0	12	0,825	10,0	0,968	0,550	0,400	0,464	4,060	0,08	0,980	4,140	0,985	1,31	3,16
4	30	9,50	-1,0	14	0,862	12,0	0,936	0,526	0,450	0,522	4,11	0,10	0,975	4,21	0,982	1,30	3,26
5	32	12,00	-1,0	14	0,852	11,8	0,940	0,540	0,463	0,537	4,11	0,10	0,970	4,23	0,970	1,29	3,24
6	34	13,00	-1,0	14	0,795	11,1	0,950	0,554	0,460	0,534	3,99	0,12	0,960	4,13	0,980	1,30	3,16
7	36	15,50	-1,0	14	0,883	12,4	0,930	0,540	0,430	0,499	3,82	0,16	0,955	4,00	0,943	1,25	3,17
8	N <sup>00</sup> 6	—	—	8	—	—	1,00	0,750	0,288	0,334	3,14	0,06	0,981	3,25	0,750	1,00	3,25
9	18	—	—	8	—	—	1,00	0,750	0,280	0,332	3,17	0,18	0,945	3,25	0,750	1,00	3,25
9bis	Rh 22	—	—	10	—	—	1,00	0,750	0,326	0,378	2,90	0,12	0,958	3,02	0,750	1,00	3,02
10	N <sup>24</sup> 6	2,5	—	8	0,775	6,20	1,00	0,724	0,298	0,346	3,41	0,06	0,981	3,47	0,820	1,09	3,17
11	18	2,5	—	8	0,823	6,55	1,00	0,726	0,286	0,332	3,26	0,18	0,945	3,46	0,802	1,07	3,24
12	N <sup>65</sup> 6	—	—	14	0,745	10,60	0,958	0,820	0,490	0,568	2,87	0,06	0,978	2,93	0,730	0,97	3,02
13	18	—	—	14	0,842	11,80	0,939	0,831	0,467	0,542	2,70	0,18	0,933	2,89	0,705	0,94	3,07
18	Riab 1/16	—	—	12	1,093	13,10	0,919	0,809	0,390	0,494	2,94	0	1,00	2,94	0,646	0,86	3,40
19	1/20	—	—	10	0,983	9,83	0,971	0,823	0,280	0,354	2,48	0	1,00	2,48	0,670	0,89	2,78
20	1/30	—	—	10	0,830	8,30	1,000	0,829	0,275	0,348	2,42	0	1,00	2,42	0,707	0,94	2,57

N. B. — Les calculs ont été faits en partant des valeurs observées au tunnel et indiquées tableau I.

le profil n° 13 (voir tableau I) ; dans ces conditions  $\Phi$  prend la valeur :

$$\Phi = \frac{1 + 0,46}{2} = 0,73 \text{ pour le n° 12}$$

$$\Phi = \frac{1 + 0,407}{2} = 0,705 \text{ pour le n° 13}$$

Pour retrouver la valeur expérimentale qu'il convient de comparer à  $\pi$ , il faut multiplier la valeur  $k_e'$  par le rapport :

$$\frac{\Phi_1}{\Phi} = 1,027 \text{ pour le n° 12}$$

$$\frac{\Phi_1}{\Phi} = 1,062 \text{ pour le n° 13.}$$

Pour les profils paraboliques, nous évaluerons  $\Phi$  par la formule :

$$\Phi = \frac{\beta_1 + \gamma}{\beta_1 + \beta_2'} \quad (207)$$

$\beta_2$  valant

$$\beta_2' = \beta_2 - \delta$$

et nous diviserons les valeurs de  $k_e'$  par  $\frac{\Phi}{\Phi_1}$  inscrit dans la colonne (17).

Les valeurs de  $\Phi$  sont inscrites colonne (16), et les valeurs de  $k'$  colonne (18).

La moyenne pour le groupe des 7 ailes de Rhodes est égale à  $1,01 \pi$ .

Les écarts ne dépassent pas  $3 \frac{1}{2} \%$  en plus ou en moins ; or, entre les essais effectués au Laboratoire de Rhodes et ceux effectués au Laboratoire de Naca, sur deux ailes planes carénées identiquement, la différence a atteint  $\frac{0,23}{3,25}$  soit  $7 \%$ ,

alors que dans ce cas particulier aucune différence ne pouvait venir d'une erreur sur la mesure des angles propres à l'aile.

On voit que nous sommes en droit de dire que les erreurs de calcul qui comprennent nécessairement les erreurs sur la mesure des angles définissant les formes de l'aile, ne dépassent pas les erreurs d'expérience. En d'autres termes, en utilisant la valeur de  $k' = \pi$ , on pourra calculer la valeur de la portance P avec une approximation du même ordre que celle que l'on peut obtenir par les essais au tunnel.

$$P = \left( S \frac{\delta}{g} c^2 \right) \pi \frac{k}{k + 0,8} \left( 1 - \frac{m}{\pi} \right) \frac{\Phi}{0,75} F(z) \sin \alpha \quad (208)$$

pour autant que :

$$m = \frac{e}{a} \text{ ne dépasse pas } 0,18,$$

$k$  le coefficient d'envergure ne tombe pas en dessous de 3.

Tout se passe comme si l'aile, plane ou courbe, à une seule courbure ou à courbure parabolique, était ramenée au tracé de sa colonne vertébrale.

Nous n'avons pas fait intervenir pour les moyennes, les valeurs trouvées par le Laboratoire de Riabouchinsky.

Ces essais qui datent des débuts de l'aviation, ont été effectués avec une soufflerie trop petite pour la profondeur  $a$  des ailes utilisées, ce qui a eu pour effet de réduire l'épaisseur réelle du flux influencé.

Si l'on fait la moyenne des essais numérotés de 18 à 20, on trouve  $0,932 \pi$ , et des écarts beaucoup plus grands qui tiennent aux perturbations importantes créées à l'entrée, par le bord biseauté des plaques minces utilisées dans ces essais.

Remarque I. — Nous tenons à souligner que les calculs de vérification ont été effectués en partant des valeurs expérimentales de  $\gamma$ . La valeur de  $\frac{\gamma}{\beta_1} = \frac{1}{2}$  ne convient que pour le plan

et pour la plaque courbe à une seule courbure, et n'a été établie que pour le profil mince. Pour retrouver les valeurs expérimentales, il faudrait généraliser le raisonnement que nous avons fait, pour le cas des ailes paraboliques, et faire intervenir le rapport  $\frac{e}{a} = m$ .

Remarque II. — La valeur moyenne obtenue pour le profil parabolique de Naca est de  $2 \%$  supérieure à  $\pi$ , tandis que pour le profil à une seule courbure du même Laboratoire, on note une valeur inférieure à  $\pi$  de  $2 \%$ .

## CHAPITRE II

### EXPRESSION DE $c_x$ POUR LES VALEURS NORMALES DE $c$

#### § 1. — Valeur du coefficient de résistance propre de l'aile $c_x$

Si nous voulons à présent évaluer la valeur de la traînée théorique, nous aurons à faire la somme algébrique des projections des forces  $Q'$ ,  $Q''$ ,  $Q'''$  sur la direction du flux à l'entrée.

Les valeurs de  $T'$  et  $T''$  se déduisent directement des valeurs de  $Q'$  et  $Q''$ , en multipliant celles-ci par les sinus des angles correspondant de ces forces avec la verticale :

$$T' = \left( \frac{\delta}{g} S c^2 \right) \frac{e}{a} (\beta_1 + \gamma) \frac{\beta_1 + \gamma}{2} \quad (209)$$

$$T'' = \left( \frac{\delta}{g} S c^2 \right) \frac{e}{a} (\theta + \beta_2 - \gamma) \times \left[ (\beta_1 + \gamma) - \frac{\theta + \beta_2 - \gamma}{2} \right] \quad (210)$$

En ce qui concerne  $T'''$ , nous pourrions nous référer au triangle formé par les directions des vitesses  $ge$  orientées suivant BE (fig. 69) et  $ge'$  dirigée suivant la tangente en E' à l'arc GE', le troisième côté représentant l'accélération résultant de la déviation imposée à la masse M' par le rabattement à l'arrière.

Si nous admettons, en première approximation, que la vitesse  $ge'$  est égale à la vitesse  $ge$  égale à  $c$ , l'évaluation de  $T'''$  sera immédiate :

$$T''' = \left(\frac{\delta}{g} Lc^2\right) \frac{e}{a} \frac{\theta + \beta_2 - \gamma}{\theta + \beta_1 + \beta_2} [2(\beta_2 - \gamma) + (\theta - \delta)] \times \left\{ (\beta_1 + \gamma) - \frac{1}{2} [(\theta + \beta_2 - \gamma) - (\beta_2 - \gamma - \delta)] \right\} \quad (211)$$

Le dernier facteur entre crochets représente la valeur de l'angle que forme le vecteur  $ee'$  (fig. 69) avec la verticale. En effet, en abaissant de  $g$  une perpendiculaire  $gb$  sur  $ee'$ , l'angle que fait la direction du vecteur  $ee'$  avec la direction  $go'$  parallèle à la droite OG (joignant les centres des arcs AB et GE') a pour valeur  $(90^\circ + bgh)$ ,  $gh$  étant perpendiculaire à  $go'$ .

Or :

$$bgh = \frac{(\theta + \beta_2 - \gamma) + (\beta_2 - \gamma - \delta)}{2} - (\beta_2 - \gamma - \delta)$$

soit :

$$bgh = \frac{(\theta + \beta_2 - \gamma) - (\beta_2 - \gamma - \delta)}{2}$$

L'angle de  $ee'$  avec la verticale est donc bien égal à la différence entre crochets, de la relation (211).

Dans ces conditions, la traînée T totale peut se mettre sous la forme :

$$T = 2 \left(\frac{\delta}{g} Sc^2\right) k' F(x) \left(\frac{\beta_1 + \gamma}{2}\right)^2 \quad (212)$$

avec :

$$F(x) = 1 - AA_1 + BB_1 AK' \frac{k'}{k_1} \quad (213)$$

A et B ayant les significations antérieures,  $A_1$  et  $B_1$  étant données par les relations :

$$A_1 = (2 - A) \quad (214)$$

$$B_1 = 2 - \frac{\theta/\beta_1 + \delta/\beta_1}{1 + \gamma/\beta_1} \quad (215)$$

Dès que nous avons tenté une vérification de la formule (212), nous avons vu que la tentative serait vaine, si nous n'introduisions dans le dernier terme de celle-ci, un coefficient  $K'$  dont nous ne connaissions pas alors la signification physique.

En première approximation, nous pouvions dire que  $K'$  était voisin en moyenne de  $\frac{1}{2}$ , mais

il importait d'en trouver la valeur avec une meilleure approximation. Nous avons fait appel à la théorie.

## § 2. — Signification physique de $K'$ et détermination de sa valeur expérimentale

Nous sommes parvenu à donner la signification de ce facteur en nous demandant quelle serait la condition à réaliser pour qu'il ait identité entre la puissance dépensée  $\mathfrak{E}_e$  par seconde pour remorquer l'aile, et l'énergie cinétique dissipée par seconde, par tourbillons.

Examinons tout d'abord la condition à réaliser pour qu'il en soit ainsi, en ce qui concerne les deux premiers termes :

$$\mathfrak{E}_e' + \mathfrak{E}_e'' = (T' + T'')c = \left(\frac{\delta}{g} Lc^3\right) \frac{(\beta_1 + \gamma)^2}{2} \times \left\{ 1 - \frac{\theta + \beta_2 - \gamma}{\beta_1 + \gamma} \left( 2 - \frac{\theta + \beta_2 - \gamma}{\beta_1 + \gamma} \right) \right\} \quad (215)$$

Remarquons que  $\left(\frac{\delta}{g} Lc\right)$  représente la masse M, mise en jeu par seconde ; si nous représentons par  $c_1$ , la composante perpendiculaire à la direction générale du déplacement, à l'entrée, c'est-à-dire à la vitesse  $c$ , dirigée suivant  $ge'$  (fig. 69), nous pourrions écrire :

$$c_1 = c (\beta_1 + \gamma) \left[ 1 - \frac{\theta + \beta_2 - \gamma}{\beta_1 + \gamma} \right] \quad (217)$$

soit :

$$\mathfrak{E}_e' + \mathfrak{E}_e'' = \frac{Mc_1^2}{2} \quad (218)$$

Il suffit donc d'admettre que la composante  $se' = c_1$  de la vitesse à la sortie, est perdue, pour avoir l'égalité entre le travail dépensé par seconde pour la remorque et l'énergie perdue par seconde. Or, cette condition est toujours réalisée quand on a affaire à l'aile remorquée.

Venons-en, à présent, à l'énergie mise en jeu par la composante  $T'''$  de la traînée ; le travail dépensé par seconde peut s'évaluer en écrivant :

$$\mathfrak{E}_e''' = T''' \times c = M' \frac{c^2}{2} (\beta_1 + \gamma)^2 \alpha'' \times \beta'' \quad (219)$$

$M'$  étant la masse rabattue par l'extrémité de l'aile,  $\alpha''$  et  $\beta''$  valant :

$$\alpha'' = \frac{2(\beta_2 - \gamma)}{\beta_1 + \gamma} + \frac{\theta - \delta}{\beta_1 + \gamma} \quad (220)$$

$$\beta'' = 2 - \frac{\theta + \delta}{\beta_1 + \gamma} \quad (221)$$

Cette évaluation est faite dans l'hypothèse d'une vitesse  $c$  dirigée à la sortie suivant  $ge'$  (fig. 69) et égale à  $c$ . Si la vitesse à la sortie tombe

à  $c'$  par suite des pertes par remous, la direction  $ee''$  fera avec  $ee'$  un angle  $\varphi$  (fig. 69) et la valeur de  $\mathfrak{E}_e'''$  pourra s'évaluer par la relation :

$$\mathfrak{E}_e''' = M' \frac{c^2}{2} (\beta_1 + \gamma)^2 \alpha'' \left( \beta'' - \frac{2\varphi}{\beta_1 + \gamma} \right) \quad (222)$$

(le facteur 2 pour le terme  $\varphi$  se justifiant par le fait que dans la représentation du troisième terme de  $T'''$ ,  $\frac{1}{2}$  a été mis en évidence).

La variation d'énergie pour la masse  $M'$  passant de  $c$  à  $c'$  a pour valeur :

$$E = \frac{M'}{2} (c^2 - c'^2) = \frac{M'}{2} c^2 \left[ 1 - \left(\frac{c'}{c}\right)^2 \right] \quad (223)$$

soit en fonction de la différence  $\Delta c = c - c'$  (224)

$$E = \frac{M'}{2} c^2 \times \frac{2\Delta c}{c} \quad (225)$$

Or, en se référant à la figure 69 :

$$\Delta c = c \times \alpha'' (\beta_1 + \gamma) \times \varphi \quad (226)$$

D'où la relation, en écrivant l'égalité de  $\mathfrak{E}_e'''$  et de E :

$$2(2\varphi) = \beta'' (\beta_1 + \gamma)$$

soit :

$$\frac{2\varphi}{\beta''} \frac{1}{\beta_1 + \gamma} = \frac{1}{2} \quad (227)$$

et :

$$K' = \frac{1}{2} \quad (228)$$

$K'$  étant égal au rapport des deux valeurs (222) et (219) de  $\mathfrak{E}_e'''$ .

Cette valeur de  $K' = \frac{1}{2}$  est en quelque sorte une valeur moyenne et l'on peut en déduire que ce résultat montre qu'il n'y a dans le raisonnement une approximation.

En vérité, une partie seulement de la masse  $M'$  participe au rabattement. Par un effet d'induction  $M_x'$ , la valeur de la masse effectivement rabattue est plus grande que  $M'$  quand la masse  $M'$  est importante par rapport à la masse totale  $M$  mise en jeu, ce qui est le cas avec les profils paraboliques.

Désignons le rapport  $\frac{M_x'}{M'}$  par  $\psi$  ; nous pourrions écrire dans ce cas :

$$\frac{M_x'}{2} (c^2 - c'^2) = \frac{M_x'}{2} c^2 (\beta_1 + \gamma)^2 \alpha'' \left[ \beta'' - \frac{2\varphi}{\beta_1 + \gamma} \right] + \frac{M' - M_x'}{2} c^2 (\beta_1 + \gamma)^2 [\alpha'' \beta'']$$

soit :

$$\psi \frac{2\Delta c}{c} = (\beta_1 + \gamma)^2 \left[ 1 - \frac{2\psi}{\beta_1 + \gamma} \frac{\varphi}{\beta''} \right] \beta'' \alpha'' \quad (229)$$

D'où, en remplaçant  $\frac{\Delta c}{c}$  par sa valeur (226)

$$2\psi\varphi = \left[ (\beta_1 + \gamma) - \frac{2\psi\varphi}{\beta''} \right] \beta'' \quad (230)$$

ou encore :

$$4\psi\varphi = (\beta_1 + \gamma) \beta''$$

soit :

$$2\psi \times 2\varphi = \beta'' (\beta_1 + \gamma) \quad (231)$$

On voit que :

$$K' = \frac{\beta'' - \frac{2\varphi}{\beta_1 + \gamma}}{\beta''} = 1 - \frac{1}{2\psi} \quad (232)$$

Si nous voulons procéder à une vérification, nous aurons à évaluer le rapport  $\gamma''$  de  $\frac{M'}{M}$ , (relation 188, généralisée) :

$$\gamma'' = \frac{M'}{M} = \frac{e'}{e} = \frac{\theta + \beta_2 - \gamma}{\beta_1 + \beta_2} \quad (233)$$

et à porter en abscisse  $\gamma''$  et en ordonnées la valeur de  $\psi$ .

Pour le plan et la plaque courbe à une seule courbure  $\gamma'' = 0,25$ , puisque  $\theta = 0$ ,  $\beta_1 = \beta_2$ ,  $\frac{\gamma}{\beta_1} = \frac{1}{2}$ .

La valeur de  $K'$  peut être prise égale à 0,300 (valeur moyenne).

Pour le groupe de Rhodes, la valeur moyenne de  $\gamma''$  peut être prise égale à 0,720 et la valeur de  $K'$  à 0,670.

Pour l'aile parabolique de Naca,  $K' = 0,550$  et  $\gamma'' = 0,460$ .

Cela conduit à une relation linéaire pour  $\psi$  :

$$\psi = 1 + 2,00 (\gamma'' - 0,400) \quad (234)$$

En adoptant cette relation, on est conduit au tableau suivant (tableau IX).

Ainsi, la valeur de la traînée T propre à l'aile est donnée par la relation :

$$T = \left( S \frac{\delta}{g} c^2 \right) 2\pi \frac{k}{k + 0,8} \left( 1 - \frac{m}{\pi} \right) \frac{\Phi}{\Phi_1} F(x) \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (235)$$

### § 3. — Vérification expérimentale des valeurs de $c_x$

La traînée totale  $T_r$  que l'on mesure au tunnel, a pour valeur :

$$T_r = \left( S \frac{\delta}{g} c^2 \right) \times C_x \quad (236)$$

la valeur de  $C_x$  étant donnée par la formule (93),  $k'$  ayant pour expression, d'après la formule (235) :

$$k' = \pi \frac{k}{k + 0,8} \left( 1 - \frac{m}{\pi} \right) \frac{\Phi}{\Phi_1}$$

dans laquelle  $\Phi_1$  doit être pris égal à 0,75.

Une fois  $k'$  calculé et inscrit colonne 5 du tableau IX, nous disposons de tous les éléments pour déterminer  $F(x)$ , porté dans la colonne (6).

Entre ce rapport et celui de  $\frac{F(x)}{F(z)}$ , une relation existe :

$$\frac{F(x)}{F(z)} = \frac{c_x}{c_z} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (237)$$

Les résultats de ce calcul sont inscrits colonne (12) et ont permis d'en déduire  $F(x)$  expérimental.

Dans la dernière colonne, on trouvera inscrites les différences en % entre les valeurs calculées et observées.

Pour le lecteur qui voudrait refaire les calculs, nous signalons que la valeur de  $c_z$  inscrite dans la colonne (10) du tableau VIII pour l'aile n° 9bis (Rh 22-24) correspond à une valeur de

Tableau IX

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
No	Désign.	$\gamma''$	$\psi$	$k'$	Calculé $F(x)$	$\frac{F(x)}{F(z)}$	$\frac{\Phi}{\Phi_1} F(z)$	Mesuré $10^3 c_x$	$\frac{c_x}{c_z}$	$\frac{F(x)}{F(z)}$	Mesuré $F(x)$	Différence %
1	Rh 16	0,725	1,55	0,680	0,357	0,625	0,717	32,7	0,782	0,640	0,366	+2,5
2	26	0,784	1,43	0,650	0,305	0,605	0,662	32,7	0,772	0,633	0,321	+5,0
3	28	0,727	1,55	0,677	0,328	0,595	0,722	25,1	0,627	0,603	0,332	+1,2
4	30	0,773	1,45	0,657	0,314	0,595	0,680	32,5	0,723	0,593	0,312	+0,5
5	32	0,750	1,50	0,668	0,319	0,390	0,696	32,1	0,693	0,565	0,305	-4,2
6	34	0,721	1,72	0,710	0,352	0,632	0,720	32,0	0,695	0,570	0,316	-10,0
7	36	0,755	1,76	0,715	0,355	0,660	0,715	30,0	0,700	0,575	0,310	-14,0
8	N <sub>00</sub> 6	0,250	0,70	0,285	0,484	0,645	0,750	13,1	0,455	0,652	0,490	+1,0
9	18	0,250	0,70	0,285	0,484	0,645	0,750	13,1	0,468	0,667	0,500	+3,0
9bis	Rh 22 24	0,250	0,70	0,285	0,484	0,645	0,750	18,7	0,575	0,652	0,495	+1,0
10	N <sub>24</sub> 6	0,450	1,10	0,545	0,454	0,625	0,790	11,9	0,400	0,572	0,415	-7,0
11	18	0,450	1,10	0,545	0,453	0,623	0,775	11,9	0,426	0,595	0,433	-4,0
12	N <sub>05</sub> 8	0,270	0,74	0,325	0,523	0,630	0,795	35,0	0,713	0,568	0,488	-5,0
13	18	0,270	0,74	0,325	0,520	0,625	0,783	35,0	0,750	0,615	0,512	-1,5

En partant des valeurs reprises au tableau VIII de  $F(z)$  et de  $\frac{\Phi}{\Phi_1}$ , nous pourrions calculer et porter colonnes (7) et (8) :

$$\frac{F(x)}{F(z)} \text{ et } \frac{\Phi}{\Phi_1} F(z)$$

Nous avons relevé sur les diagrammes reproduits figure 20 à figure 27 (et sur d'autres qui n'ont pas été reproduits ici), les valeurs de  $c_x$ , puis celles de  $\frac{c_x}{c_z}$ , calculées en partant des valeurs de  $c_z$  indiquées colonne (10) du tableau VIII.

l'angle 10°, et non 8° comme pour les deux autres profils du même groupe.

Par l'analyse des chiffres de la colonne (13), on se rend compte, qu'à part les valeurs notées pour les profils à grande courbure et à grande épaisseur (profils Rh 34 et 35), les écarts ne dépassent pas disons  $\pm 7\%$ , ce qui est du même ordre que les écarts notés sur les valeurs de  $\pi$  ( $\pm 3 \frac{1}{2}\%$ ), si l'on tient compte de ce que les ordonnées mesurées des valeurs de  $c_x$ , sont au moins dix fois plus petites.

La remarque faite au chapitre IV, § 3, de la Première Partie, explique comment une correction aurait dû être introduite sur la valeur

## CHAPITRE III

### AU SUJET DU TRACÉ DES AILES

#### § 1. — Influence de l'envergure

Si on examine les résultats du relevé des pressions sur une aile d'envergure  $L = 6$ , par exemple, on se rend compte de l'influence des bords : elle va s'atténuant de telle façon qu'à partir de  $\lambda = 0,25 L$  (comptée à partir de l'extrémité) (fig. 71), on peut dire que la distribution des pressions est régulière : toutes les bandes de même largeur 0,1 L pour fixer les idées, comprises entre  $a$  et  $b$ , jouent le même rôle, si bien que nous pouvons admettre qu'entre  $a$  et  $b$ , l'épaisseur  $E$  du flux influencé, est constante.

Entre  $Aa$  et  $bB$ , l'épaisseur va diminuant et, en admettant une variation suivant les ordonnées d'une ellipse, nous pourrions écrire :

$$eL = El + \frac{\pi}{2} \lambda E, \quad (238)$$

et comme  $(L - 2\lambda) = l$  :

$$k' = \frac{e}{a} = \frac{E}{a} \frac{L - \lambda \left( 2 - \frac{\pi}{2} \right)}{L} = \frac{E}{a} \left[ 1 - \frac{\lambda \left( 2 - \frac{\pi}{2} \right)}{L} \right] \quad (239)$$

en désignant par  $k$  le coefficient d'allongement.

En adoptant, comme nous l'indiquons ci-dessus,  $\frac{\lambda}{a} = 0,25 \frac{L}{a}$ , nous pourrions calculer  $k'$

en fonction de  $k$ , en admettant que  $\frac{E}{a}$  est égale à la valeur  $\pi$ , établie par nos calculs et par la théorie classique.

Le tableau X donne les résultats de ce calcul.

Tableau X

1	2	3	4	5
$k$	$\frac{k}{k+m}$	$1 - \frac{\lambda \left( 2 - \frac{\pi}{2} \right)}{L}$	$k'$	$k'$
1	0,555	—	1,74	<b>1,63</b>
2	0,705	—	2,22	<b>2,16</b>
3	0,790	0,784	2,48	2,46
4	0,832	0,838	2,61	2,63
5	0,863	0,871	2,71	2,73
6	0,882	0,892	2,77	2,81
10	0,927	0,935	2,91	2,94
$\infty$	1,000	1,000	3,14	3,14

calculée de  $c_x$  pour tenir compte du phénomène provoqué par l'écoulement latéral résultant de l'épaisseur de l'aile ; cette correction aurait réduit les ordonnées de la courbe de  $c_x$  calculée d'environ 5 %, pour les aubes les plus épaisses. Les écarts dans ces conditions n'auraient nulle part, dépassé 7 %.

En consultant la figure 26 qui se rapporte à l'aile de Naca N<sub>24</sub>—6 et N<sub>24</sub>—18, on pourra se rendre compte de l'importance de l'erreur relative qui a pu être commise en se référant à la courbe 1 ; celle-ci a été tracée en partant de la courbe 2 indiquée en pointillé, de façon à lui être parallèle. Mais cette courbe (2) devrait être tangente *par hypothèse*, à la courbe reliant les points expérimentaux (cercles blancs) pour l'abscisse  $\alpha = \beta_1 + \gamma = 7,75^\circ$ . On voit ainsi clairement qu'elle devrait être tracée nettement plus haute.

Ainsi l'erreur de -7 % qui a été indiquée dans le tableau pour cette aile Naca N<sub>24</sub>—6, pourrait être réduite à -2 %, sans contradiction.

Il nous semble que, compte tenu de ces deux observations, il ne peut rester aucun doute sur la concordance pratiquement parfaite entre valeurs calculées et valeurs observées, tant pour  $F(x)$  que pour  $F(z)$ .

Nous avons fait figurer, colonne (8), les valeurs de  $\frac{\Phi}{\Phi_1} F(z)$  qui pourraient mesurer en quelque sorte, la supériorité relative d'un profil sur l'autre, puisque à angle  $\alpha$  constant, il y aurait en faveur du profil conduisant au plus grand coefficient, une augmentation de la portance.

A ce point de vue, on peut dire :

- 1° que le plan caréné est à rejeter ;
- 2° que le profil parabolique du type Naca pour lequel  $\gamma''$  est très peu supérieur à 0,400, valeur pour laquelle  $\psi = 1$ , donne le meilleur résultat ;
- 3° que le profil à simple courbure ne paraît pas inférieur au profil parabolique.

Si le profil parabolique prévaut dans la pratique, comme il le semble, c'est qu'il s'accommoderait du tracé du carénage que nous avons dessiné (fig. 32), valables pour les vitesses inférieures à celles du son.

La préoccupation majeure, pour ces vitesses, est de faire en sorte qu'il n'y ait pas de décollement à l'arrière, décollement qui amènerait la couche influencée par le carénage, à grandir éventuellement jusqu'à la limite, cette limite pouvant, comme nous l'avons vu, atteindre  $2,09 \frac{a}{x}$ .

Nous avons fait figurer dans la colonne (4), les valeurs fournies par la formule de Betz :

$$k' = \pi \frac{k}{k + 0,8} \quad (240)$$

qui, comme on le voit, fournit des valeurs identiques, peut-on dire, à celles que nous venons d'établir au moyen de notre formule, sauf pour les valeurs de  $k$  inférieures à 3, valeurs pour lesquelles notre formule n'est plus applicable.

Nous pourrions nous demander ce que devient la hauteur moyenne pour  $k=1$  et  $k=2$ , valeurs de  $k$  pour lesquelles les ellipses se recoupent (fig. 71). On arrive ainsi aux deux valeurs indiquées en gras, dans la colonne (5) très voisines, tout au moins pour  $k=2$ , de celles fournies par la formule de Betz.

Nous conserverons celle-ci parce qu'elle est

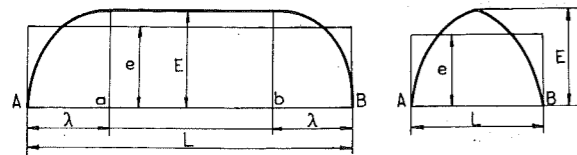


Fig. 71.

classique et qu'elle peut s'appliquer entre les valeurs de  $k=2$  et  $k=\infty$ .

Ces considérations montrent bien que l'interprétation que nous avons donnée du phénomène de l'écoulement le long de la surface de l'aile, est bien conforme à la réalité. L'accroissement d'envergure a pour effet d'augmenter l'épaisseur du flux efficace, et n'a pas d'influence sur l'angle de déviation  $\alpha$ .

En passant de  $k=5$  à  $k=6$ , la portance qui est proportionnelle à  $k'$ , va être accrue de :

$$0,863 \pi \text{ à } 0,882 \pi$$

ce qui n'est pas tout à fait négligeable.

Lorsqu'il s'agit d'appareils à très faible vitesse, comme c'est le cas du planeur, l'accroissement d'envergure a une autre portée ; le coefficient de Reynolds  $R_e$  qui est donné par la formule (123b), est d'autant plus petit, que  $c$  est plus petit, et pour les faibles valeurs de  $R_e$ ,  $2k_1''$  qui fixe le coefficient de résistance  $C_x$ , dû au frottement, devient relativement élevé : il suffit pour s'en rendre compte de consulter le diagramme de la figure 57. Dans la région des valeurs de  $10^5$ , les valeurs de  $2k_1''$  peuvent atteindre le double de celles relevées pour des valeurs de  $R_e$  de l'ordre  $10^6$ , tout au moins s'il s'agit de surfaces lisses.

Or, en doublant la valeur de  $L$ , toutes autres choses restant égales, on double la valeur de  $R_e$ .

L'effet d'un tel accroissement d'envergure dans la région des fortes valeurs de  $R_e$  qui

correspondent aux grandes vitesses  $c$ , est par contre négligeable.

## § 2. — Rôle de l'épaisseur $\epsilon$ et partant de l'allongement $\frac{1}{m}$ pour les vitesses normales

Nous avons vu que la valeur de  $\frac{1}{m}$  la plus favorable pour les vitesses normales, était aux environs de 8 à 10 suivant la valeur donnée, dans le tracé, au rapport  $x = \frac{b}{a}$ ,  $b$  étant la distance des points d'inflexion.

Puisqu'il existe un allongement plus favorable, il est logique de le conserver pour toute l'envergure. Si l'épaisseur  $\epsilon$  peut diminuer en partant de la coque, il est rationnel de faire varier  $a$  comme  $\epsilon$ , de façon à conserver  $\frac{1}{m} = \text{constante}$ .

On arrive ainsi aux ailes dont la projection horizontale a la forme d'un trapèze, et à la limite, la forme en delta.

De toute façon, l'extrémité de l'aile doit être carénée.

Le problème traité dans la Quatrième Partie, permet de comprendre le rôle de ce carénage, et d'en donner la forme.

Le coefficient d'envergure  $k$  étant choisi, la valeur moyenne de  $a$  résultant du tracé, étant déterminée, il sera possible de calculer la surface allaire  $S$  :

$$S = a^2 \times k \quad (241)$$

car la charge  $P$  étant une donnée, la vitesse  $c_a$  au décollage ou à l'atterrissage, étant imposée, on pourra écrire :

$$P = \left( S \frac{\delta_a}{g} c_a^2 \right) \times c_x \quad (242)$$

$\delta_a$  représentant le poids spécifique de l'air au niveau du sol, la valeur de  $c_x$ , résultant de la formule (208), dans laquelle l'angle  $\alpha$  a été porté à son maximum  $\alpha_m$ .

Lorsque l'angle  $(\beta_1 + \gamma)$  qui fixe en quelque sorte la courbure, a été choisi assez faible de l'ordre de 10 à 12°, il est nécessaire pour pouvoir réaliser l'angle maximum  $\alpha_m$ , inférieur de toute façon à 20°, de faire jouer les volets arrière.

Comme on le voit, la valeur de  $\frac{P}{S}$  ainsi trouvée dépend essentiellement de la vitesse d'atterrissage  $c_a$  que l'on peut tolérer, en raison de l'étendue de la piste.

Lorsque l'avion a atteint son altitude de vol normal, pour laquelle le poids spécifique devient  $\delta$  et la vitesse  $c$ , l'angle de vol est réduit à  $\alpha$ ,

puisque l'on ne dispose d'aucun moyen pratique pour réduire  $S$  :

$$\sin \alpha = \sin \alpha_m \left( \frac{c_a}{c} \right)^2 \frac{\delta_a}{\delta} \quad (243)$$

On comprend ainsi l'importance de la vitesse d'atterrissage.

En donnant à  $\alpha_m$  sa valeur maximum, soit 20°, et en négligeant la variation  $\frac{\delta_a}{\delta}$ , on voit que

l'angle  $\alpha$  tombe à 2°  $\frac{3}{10}$  pour un rapport  $\left( \frac{c_a}{c} \right) = \frac{1}{3}$

et à 1°  $\frac{2}{10}$  pour  $\frac{c_a}{c} = \frac{1}{4}$ .

Une conséquence inévitable c'est que la vitesse d'atterrissage devra croître avec la vitesse de vol  $c$ , faute de quoi l'angle de vol s'écartera par trop de l'angle de vol le plus favorable, que nous allons déterminer au § suivant.

Conséquence aussi, si l'on veut améliorer cette situation, puisque aussi bien la réduction de la voilure apparaît comme pratiquement irréalisable, il faut augmenter l'altitude de vol normal, afin de faire croître le rapport  $\frac{\delta_a}{\delta}$ .

Avec  $\frac{\delta_a}{\delta} = 3,57$  qui correspond à un plafond de 10.000 m., l'angle de vol  $\alpha$  passe de 2°  $\frac{3}{10}$  à 8°  $\frac{2}{10}$  pour  $\frac{c_a}{c} = \frac{1}{3}$ , de 1°  $\frac{2}{10}$  à 4°  $\frac{3}{10}$  pour  $\frac{c_a}{c} = \frac{1}{4}$ .

Nous verrons que dans le premier cas, on dépasse ainsi légèrement l'angle de vol le plus favorable.

## § 3. — Angle de vol le plus favorable Rôle de la courbure

Pour obtenir la traînée totale de l'avion  $T_t$ , il faut ajouter à la traînée  $T_r$  fournie par la relation (236), la traînée propre aux parties de l'avion qui présentent une résistance sans portance, telles la coque, les gouvernes, l'empennage arrière, les moteurs.

Si nous représentons par  $S'$  la somme des sections au maître-couple, de ces différentes parties, et par  $C'$  le coefficient de résistance moyen de celles-ci, nous pourrions écrire :

$$T_t = T_r + \left( S' \frac{\delta}{g} c^2 \right) C' = \left( S \frac{\delta}{g} c^2 \right) \left[ C_x + C' \frac{S'}{S} \right] \quad (244)$$

Si nous faisons le rapport de  $T_r$  à  $P$ , nous obtiendrons l'effort total de remorque par kg

enlevé, qui doit être réduit au minimum :

$$\frac{T_t}{P} = k_3 \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{k_1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{k_2 \sin \frac{\beta_1 + \gamma - \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (245)$$

les coefficients ayant les valeurs suivantes :

$$k_3 = \frac{F(x)}{F(z)} \quad (246)$$

$$k_1 = \frac{a}{z k' F(z)} \quad (247)$$

$$k_2 = \frac{b}{2 k' F(z)} \quad (248)$$

$a$  étant mis pour  $0,08 m^2 + 0,00185 + C' \frac{S'}{S}$ ,

$b$  étant mis pour  $0,025 \times 0,6 \left( 1 + n \frac{m}{m_1} \right)$ .

Nous pourrions développer la valeur du sin (en admettant  $\cos \frac{\alpha}{2} = 1$  et  $\cos \frac{\beta_1 + \gamma}{2} = 1$ ); la formule (246) se présenterait alors sous la forme :

$$\frac{T_t}{P} = k_3 \sin \frac{\alpha}{2} - k_2 + \frac{k_1 + k_2 \sin \frac{\beta_1 + \gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (249)$$

Cette valeur passe par un minimum pour :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2 \sin \frac{\beta_1 + \gamma}{2}}{k_3}} \quad (250)$$

Exemple numérique. — Si nous adoptons  $\frac{S'}{S} = 0,12$ ,  $C' = 0,05$ ,  $k = 6$ ,  $\frac{1}{m} = 8$ ,  $(\beta_1 + \gamma) = 10^\circ$ ,  $\frac{1}{m_1} = 16$ ,  $n = \frac{1}{3}$ ,  $\Phi = 0,982$ ,  $F(z) = 0,550$ , nous obtiendrons, en nous référant aux formules (237), pour :

$$k' = 3,50 \quad k' F(z) = 1,92$$

$$k_1 = \frac{0,00125 + 0,00185 + 0,006}{3,84} = 0,00238$$

$$k_2 = \frac{0,025 \left( 1 + \frac{2}{3} \right) \times 0,6}{3,84} = 0,0065$$

$$k_3 = 0,600 \text{ (valeur moyenne)}$$

$$k_2 \sin \frac{\beta_1 + \gamma}{2} = 0,0065 \times \sin 5^\circ = 0,00056.$$



La valeur de  $\alpha$  fournie par la relation (250) atteint dans ces conditions :

$$\alpha = 8^\circ.$$

Si l'angle de vol atteignait  $(\beta_1 + \gamma) = 10^\circ$ , la formule (245) se ramènerait à :

$$\frac{T_r}{P} = k_3 \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{k_1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (251)$$

et l'angle le plus favorable tomberait à :

$$\alpha = 7^\circ.$$

Ainsi, si l'on veut se rapprocher des conditions optima de vol, il faut :

- 1° ne pas exagérer la courbure normale et se limiter à une valeur de  $(\beta_1 + \gamma)$  de l'ordre de  $10^\circ$ ;
- 2° adopter une vitesse d'atterrissage la plus grande possible, compatible avec les possibilités, d'autant plus élevée en tout cas que la vitesse normale est plus élevée;
- 3° faire voler l'avion à une altitude assez grande pour que la valeur de  $\frac{\delta^a}{\delta}$  conduise à un angle de vol normal, se rapprochant autant que possible de l'angle de vol le plus favorable.

#### § 4. — Détermination du centre de poussée

Pour ne pas allonger notre exposé, nous voudrions nous borner à établir la position du centre de poussée pour le cas particulier de l'aile courbe à une seule courbure.

La figure 72 donne la position des forces  $Q'$ ,  $Q''$ ,  $Q'''$  qui entrent en jeu, lorsque  $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{2}$ .

En appliquant l'équation des moments par rapport au bord avant  $i$ , on trouve,  $\varphi$  désignant l'angle correspondant à la résultante  $P$  :

$$P \times \varphi = Q' \frac{\beta_1 + \gamma}{2} - (Q'' - Q''') \left[ (\beta_1 + \gamma) + \frac{\beta_1 - \gamma}{2} \right]$$

D'où la valeur de  $\frac{\varphi}{2\beta_1}$  qui fixe le point d'application de  $P$  :

$$\frac{\varphi}{2\beta_1} = \frac{Q'}{P} \frac{\beta_1 + \gamma}{4\beta_1} - \frac{Q'' - Q'''}{P} \frac{3\beta_1 + \gamma}{4\beta_1} \quad (252)$$

En tenant compte des relations (186), (187) et (189), nous trouvons :

$$\frac{\varphi}{2\beta_1} = \frac{1}{F(z)} \left[ 1 + \frac{1}{2} - \frac{3,5}{6} \right] \times \frac{1}{4} = \frac{5,5}{6} \frac{1}{F(z)} \times \frac{1}{4} = 1,1 \times \frac{1}{4}$$

Pour le plan, le calcul conduit à la même valeur.

Ainsi, pour le profil à une seule courbure, le point d'application de la résultante  $P$ , est à 10 % près, situé au quart avant.

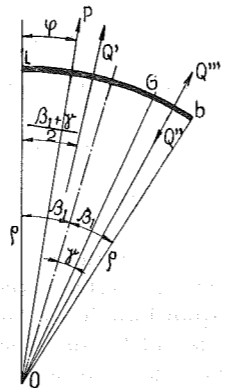


Fig. 72.

Nous pourrions nous demander ce que devient la poussée  $P$  lorsque le redressement à l'arrière ne se produit pas. On trouve immédiatement pour rapport des deux valeurs :

$$\frac{2\beta_1}{(\beta_1 + \gamma) - (\beta_1 - \gamma) (1 - 2(\beta_1 - \gamma) k_1'/k')} \quad (253)$$

le coefficient de portance  $c_z$  est pratiquement doublé.

Quant au point d'application, il passe de  $\frac{1}{4}$  à  $\frac{1}{2}$  de l'arc total  $2\beta_1$ .

Nous pourrions rechercher ce que devient  $c_x$  dans le cas où le redressement à l'arrière ne se produit pas; nous avons trouvé que  $c_x$  est multiplié par 5 en chiffres ronds.

Ceci veut dire que si par suite d'une perturbation importante, le redressement à l'arrière ne se produisait plus, la valeur de  $c_x$  devrait être multipliée par deux et la valeur de  $c_z$  par cinq, le centre de poussée étant déplacé vers l'arrière de telle façon que la distance du bord avant au point

d'application, passerait de  $\frac{1}{2} \times 2\beta_1$  à  $\frac{1}{4} \times 2\beta_1$ .

#### § 5. — Coefficient de finesse

La traînée dans le cas du fonctionnement de l'aile, sans redressement à l'arrière, peut s'écrire :

$$T = P \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad (254)$$

Du rapport  $\frac{T_r}{P}$ , on peut donc déduire le rapport de la traînée réelle à ce que l'on pourrait appeler

la traînée théorique, rapport que nous désignons par  $R_f$ . Comme la valeur de  $\frac{\alpha}{2}$  est toujours relativement petite, nous pourrions écrire :

$$R_f = \frac{T_r}{P \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{F(x)}{F(z)} - \frac{k_2}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{k_1 + k_2 \sin \frac{\beta_1 + \gamma}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (255)$$

en partant de la relation (249).

La connaissance de cette relation permet de calculer la traînée réelle  $T_r$  en partant de la traînée théorique.

Nous l'avions utilisée en 1911, pour mettre en équation le problème du calcul de la poussée et du couple résistant de l'hélice aérienne.

Nous ne lui avons donné alors aucune signification théorique; nous nous étions borné à

constater que l'on pouvait relier d'une façon satisfaisante mais empirique, la valeur de  $T_r$  donnée par les résultats au tunnel sur une aile d'un profil déterminé, à la valeur de  $P \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , au

moyen d'une relation du second degré en  $\sin \frac{\alpha}{2}$ .

Il nous était ainsi possible de passer de la valeur de  $P \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  variant le long de la pale, à la valeur réelle  $T_r$  et de trouver par intégration, le couple réel d'ensemble.

Nous ferons remarquer que s'il n'y avait l'influence du maître-couple apparent, la relation se ramènerait à une fonction à deux termes, le dernier tenant compte du frottement et de la forme du carénage de la pale.

Le premier terme, lui, est lié au profil de l'aile, mais nous avons vu qu'il variait peu avec la forme et restait voisin 0,625 pour le profil parabolique lorsque  $\gamma''$  est de l'ordre de 0,400.

SIXIÈME PARTIE

ÉTUDE DES VALEURS DE  $c_z$ ,  $c_w$ ,  $c_x$  ET  $c_x''$  AUX ENVIRONS DU MUR DU SON

§ 1. — Rappel des notions essentielles

A la faveur de ce que nous venons d'établir, nous allons pouvoir nous faire une idée qualitative, si pas entièrement quantitative, de ce qui se passe aux environs du mur du son.

Nous raisonnerons sur l'aile à une seule courbure et nous tracerons les diagrammes de  $c$  et de  $e$  (vitesse et épaisseur du flux influencé) en prenant pour axe des abscisses, la corde de l'aile.

Nous ne reviendrons pas sur la question de l'équivalence au point de vue des conditions de sollicitation de l'aile, entre le diagramme discontinu et le diagramme continu des valeurs de  $c$  et de  $e$ . Nous nous bornerons à raisonner sur les diagrammes discontinus.

Toutes les déductions qui vont suivre sont basées sur le fait physique qu'à partir de la vitesse du son, l'écoulement ne peut plus se faire par filets concentriques, puisque aussi bien tout accroissement de l'élément de longueur  $dx$  dans la direction  $c$  (fig. 73) conduirait à un phénomène qui se propagerait à l'air libre à une vitesse plus grande que la vitesse du son.

L'équation de continuité que nous avons écrite (112) :

$$c_a \delta a = c \delta$$

pour le cas d'un écoulement à filets concentriques, doit être remplacée par l'équation :

$$c_a \delta a \Delta r = c \delta dr$$

comme nous l'avons vu au § 3 de la Deuxième Partie, cette dernière relation de continuité devant s'écrire, si  $c = c_a$  :

$$\delta a \Delta r = \delta dr.$$

L'épaisseur  $dr$  devra augmenter dans la direction perpendiculaire à la vitesse  $c$  s'il s'agit de la face convexe, et l'énergie potentielle de pression qui, jusque là, s'était transformée partiellement en énergie cinétique, restera à l'état d'énergie potentielle de pression.

Pour rester aussi précis que possible, nous avons réuni dans un tableau, les figures qui se rapportent aux différentes phases du phénomène dans la région de la vitesse du son (350 m/sec au sol, dans les conditions normales).

Si on se reporte aux calculs effectués dans la Deuxième Partie, § 4, on peut voir qu'un

trouble peut être apporté dans l'écoulement sur la face convexe de l'aile pour la valeur du nombre de Mach  $M$  :

$$M = \frac{c_a}{350} = 0,8;$$

nous montrerons plus loin qu'un trouble se produit également mais sur la face concave, lorsque :

$$M = 1,15.$$

Enfin, nous aurons à examiner ce qui se produit pour  $M = 1$ , tant pour  $c_z$  que pour  $c_w$ .

De là, la disposition des figures par groupe I, II, III.

a) Celles du groupe I se rapportant à la distribution des vitesses et la variation de  $e$  pour l'aile :

lorsque  $M = 0,8$  et  $M = 1$  qui intéresse la face convexe ;

lorsque  $M = 1,15$ , qui intéresse la face concave ;

b) Celles du groupe II se rapportant à la distribution des vitesses et à la variation de  $e$  pour ce qui touche le carénage de l'aile.

c) Celles du groupe III donnant les valeurs :

de  $c_z$ ,  $\frac{\varphi}{2\beta_1}$ ,  $c_x$  (dans les deux premières cases) ;

de  $c_x'$  (dans la dernière case).

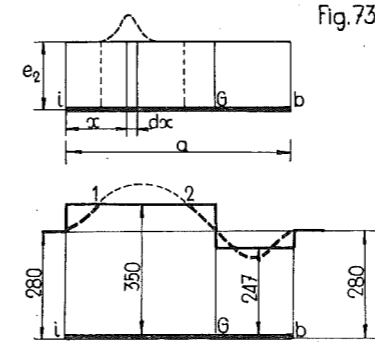
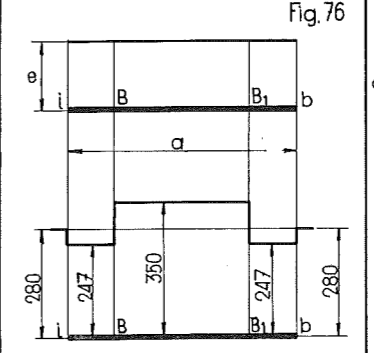
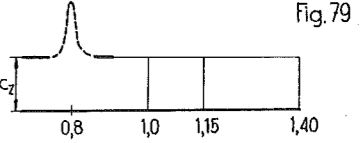
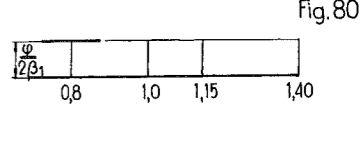
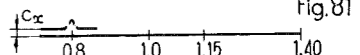
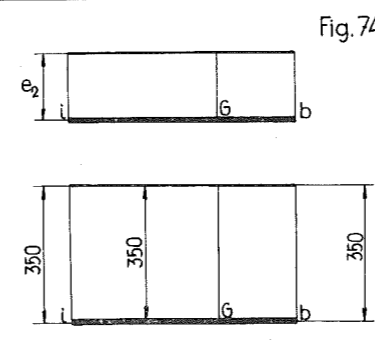
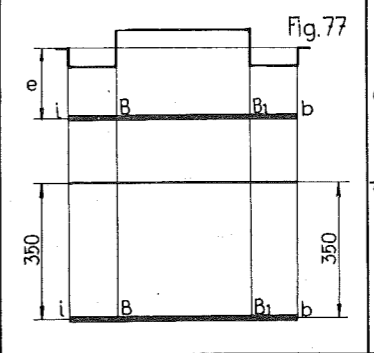
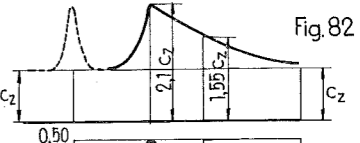
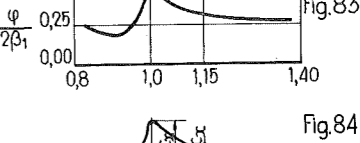
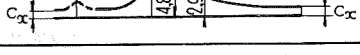
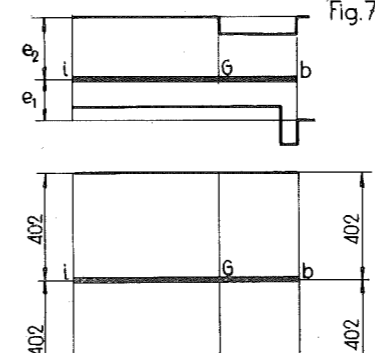
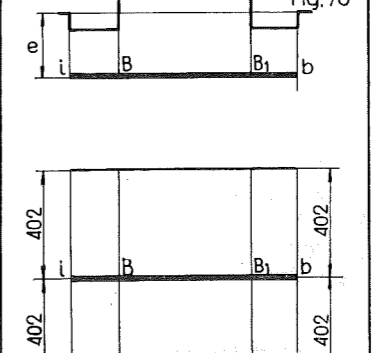
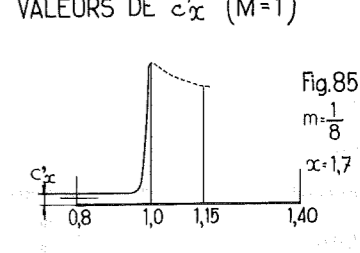
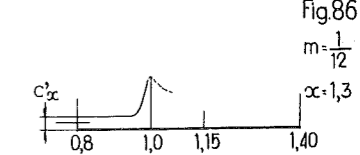
§ 2. — Valeurs de  $c_z$  et de  $c_w$

Ce rappel étant fait, nous voudrions examiner ce qui se passe au sujet du coefficient  $c_z$  lorsque la vitesse sur face convexe, atteint 350 m/sec pour le seul filet qui longe la paroi (1), c'est-à-dire lorsque  $M = 0,8$ .

Si les discontinuités étaient réelles, il ne devrait rien se produire dans le flux d'épaisseur  $e_2$ , jusqu'à cette valeur de  $M$ . Mais la vitesse  $c$  varie avec l'abscisse  $x$  d'une manière continue, en suivant la loi indiquée en pointillé (fig. 73), cette courbe étant tracée de façon à délimiter la même surface que celle de la courbe discontinue.

On voit ainsi que la vitesse réelle devrait dépasser entre 1 et 2, la vitesse du son, ce qui

(1) La pression varie dans l'épaisseur  $e$  linéairement et se trouve minimum pour le filet qui longe la paroi.

	GROUPE I VALEURS DE $c$ & $e$ POUR L'AILE	GROUPE II VALEURS DE $c$ & $e$ POUR LE CARENAGE	GROUPE III VALEURS DE $c_z, \frac{\varphi}{2\beta_1}, c_x$
0,8	Fig. 73 	Fig. 76 	Fig. 79  Fig. 80  Fig. 81 
1,0	Fig. 74 	Fig. 77 	Fig. 82  Fig. 83  Fig. 84 
1,15	Fig. 75 	Fig. 78 	VALEURS DE $c_x'$ ( $M=1$ ) Fig. 85  Fig. 86 

est impossible. C'est dire que pour une valeur légèrement inférieure à  $M = 0,8$ , il doit se produire une perturbation dans l'écoulement, perturbation qui va aller grandissant jusqu'à  $M = 0,8$  pour retomber à une valeur normale un peu au-delà.

Sans prétendre vouloir donner une explication entièrement cohérente de tout ce qui se passe à ce moment, nous ferons observer que l'équilibre que nous avons mis en évidence au § 1 de la Deuxième Partie, entre les forces  $df_1$  et  $df_2$  ne peut se réaliser pendant le changement de régime,

ce qui doit provoquer momentanément tout au moins, une sorte de gonflement de la couche influencée.

Nous devons donc constater un accroissement momentané de  $c_z$  et partant de  $c_w$ , qui, si nous nous en rapportons au diagramme expérimental de la figure 38, passe pour un maximum égal à  $2,5 c_z$  pour  $M = 0,8$  et retombe à la valeur initiale pour  $M = 0,9$ .

C'est ce que nous avons transcrit sur la figure (79) et la figure (81) du groupe III.

Le point d'application de la résultante des

forces appliquées tend à se déplacer, et l'on voit s'amorcer figure (83), une variation de  $\frac{\varphi}{2\beta_1}$  vers le bas, c'est-à-dire un déplacement du point d'application vers l'avant, montrant que c'est bien la partie avant allant de  $i$  à  $G$ , qui est perturbée.

Que se passe-t-il quand la valeur de  $M$  passe de 0,9 à  $M = 1,0$ ? Dans l'épaisseur  $e_2$  influencée, la bande qui a atteint la vitesse de 350 m/sec va augmentant à mesure que la vitesse d'entrée  $c_a$  se rapproche de la vitesse de 350 m/sec; et l'on constate que la valeur de  $c_z$  croît.

L'explication, c'est que la couche animée de cette vitesse de 350 m/sec cesse de prendre la courbure inverse à l'arrière, si bien qu'au moment où  $M = 1$  est réalisé, tout le flux dévié par la face convexe ne prend plus qu'une seule courbure depuis l'entrée jusqu'à la sortie.

Il va en résulter, d'après ce que nous avons vu dans la Cinquième Partie, (§ 5, Chapitre III), que  $c_z$  passera de la valeur normale à deux fois cette valeur, et que  $c_x$  croîtra dans le rapport 5 à 1.

A vrai dire comme ce n'est que le flux d'épaisseur  $e_2$  longeant la face convexe qui entre en jeu ici, le multiplicateur 2 devra être corrigé et remplacé par  $(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$ , tandis que le multiplicateur 5 prendra pour valeur  $(\frac{10}{3} + \frac{1}{3}) = \frac{11}{3}$ .

Plus exactement, nous devrions tenir compte de ce que l'arc actif passant de  $iG$  à  $ib$ , l'épaisseur du flux influencé passera de  $\frac{3}{3}$  à  $\frac{4}{3}$ , ce qui revient à dire que le facteur 2 devra être en définitive, remplacé par  $(\frac{4}{3} \times \frac{4}{3} + \frac{1}{3}) = \frac{19}{9}$  et le facteur 5 par  $(\frac{10}{3} \times \frac{4}{3} + \frac{1}{3}) = \frac{43}{9}$ .

Ce sont ces valeurs que nous avons porté en ordonnées, dans les diagrammes des figures 82 et 84.

Lorsque  $M$  aura atteint 1,15 (1), toute l'épaisseur de la couche qui suit la face concave aura atteint la vitesse du son, et le phénomène que

(1) Pour la face concave  $\frac{e_1}{\rho} = 0,122$  et d'après la formule (111) :

$$\left(\frac{c}{c_a}\right)^2 = \left(\frac{350}{c_a}\right)^2 = \left[1 - 0,244 \times \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_a}{\delta} + 1\right)\right]$$

Si l'on s'adapte  $\frac{\delta_a}{\delta} = 0,87$ , on trouve  $c_a = 400$ , ce qui vérifie la condition  $\frac{c_a}{c} = \frac{\delta}{\delta_a} = 1,15$ .

nous venons d'analyser pour la face convexe, se reproduira pour celle-ci : le redressement cessera d'exister et la valeur de la partie de  $c_z$  qui se rapporte à la face inférieure devra être multipliée par  $(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}) = \frac{8}{9}$ , tandis que pour  $c_x$ , il faudra utiliser le facteur  $(\frac{5}{3} \times \frac{4}{3}) = \frac{20}{9}$ .

Si nous admettons que quand  $M = 1,15$ , la situation normale s'est rétablie pour la face supérieure, la valeur de  $c_z$  totale deviendra  $(\frac{2}{3} + \frac{8}{9}) c_z = \frac{14}{9} c_z$  et celle de  $c_x$   $(\frac{2}{3} + \frac{20}{9}) = \frac{26}{9} c_x$ .

Ce sont ces valeurs que nous avons fait figurer dans les diagrammes des figures 82 et 84, et nous avons retrouvé ainsi l'allure du diagramme expérimental de la figure 38 pour l'abscisse 1,15.

Cette manière d'interpréter les résultats est conforme aux faits observés : non seulement le diagramme calculé de  $c_z$  correspond au diagramme observé, mais la valeur de  $\frac{\varphi}{2\beta_1}$  qui était

normalement égal à  $\frac{1}{4}$  passe à la valeur de  $\frac{1}{2}$  pour  $M = 1$ , ainsi que cela résulte de l'étude du centre de poussée exposée au § 5, de la partie précédente.

A la différence toutefois ce qui a été noté sur le diagramme de la figure 39,  $\frac{\varphi}{2\beta_1}$  après être passé par un maximum égal à  $\frac{1}{2}$  reprend, petit à petit, la valeur  $\frac{1}{4}$  à mesure que  $c_z$  se rapproche de la valeur initiale.

Il y aurait là, si le fait restait établi avec certitude, une contradiction que nous ne voyons pas pour le moment, comment nous la ferions disparaître. Car tout indique qu'une fois que la perturbation déclenchée par le mécanisme que nous allons analyser au § 3, a cessé, tout doit de nouveau se passer au point de vue de la valeur de  $c_z$ , et partant de la valeur de  $c_x$ , comme si l'on avait affaire à un fluide incompressible, ou ce qui revient au même à un fluide animé d'une vitesse assez faible pour que l'on puisse faire abstraction de la variation de  $\delta$  et partant de  $c$ , tout le long du parcours, c'est-à-dire des vitesses comme celles utilisées normalement au tunnel.

### § 3. — Valeurs de $c_x'$

Nous voudrions nous appuyer, pour ce qui va suivre, non seulement sur les chiffres établis antérieurement, mais sur les déductions que nous avons pu tirer de l'analyse des faits.

I. Lorsque nous avons étudié les effets du maître-couple apparent, nous avons été forcé d'admettre « qu'à partir de l'allongement optimum (la seule région qui intéresse la pratique) :

a) l'épaisseur du flux influencé  $e_1$  était commandée par le rayon de courbure de l'aile;

b) que cette épaisseur pouvait varier de 0,024  $\rho$  pour le cas le plus favorable de l'aile carénée à 0,24  $\rho$  et même 0,365  $\rho$  pour le cas où l'arête d'entrée était vive. »

II. Nous avons été forcé d'admettre pour le surplus que l'accroissement de l'épaisseur du flux influencé par le maître-couple apparent, n'avait aucune répercussion sur l'épaisseur du flux influencé par le maître-couple réel.

C'est en nous appuyant sur ces deux faits expérimentaux que nous allons étayer l'explication de la variation brusque de la trainée de profil  $c_x'$ , au passage de la vitesse du son.

Il nous suffira d'admettre que l'effet perturbateur de la pointe carénée, comme il est indiqué figure 45, va jouer, au moment où le mur du son est atteint, le même rôle au point de vue du maître-couple réel que la pointe non carénée jouait pour faire grandir à la limite, l'effet du maître-couple apparent.

Quelle sera cette limite : la totalité de l'épaisseur du flux influencée par la face convexe de l'aile, c'est-à-dire les  $\frac{2}{3}\pi$  de l'arc agissant, soit  $2,09 \frac{a}{x}$ .

C'est sur cette base que nous donnons, figure 43, la variation de  $c_x'$  pour  $\frac{1}{m} = 8$  et pour  $\frac{1}{m} = 12$ , et que nous avons montré l'importance de l'allongement sur la valeur limite de  $c_x'$ . Nous reproduisons, figures 85 et 86, la loi de variation de  $c_x'$  respectivement pour  $\frac{1}{m} = 8$  avec  $x = 1,70$  et  $\frac{1}{m} = 12$  et  $x = 1,30$ .

### § 4. — Forme de l'aile

Que se passe-t-il au-delà du mur du son? Si notre explication est exacte, la valeur de  $c_x'$  ne peut se réduire que si l'importance de la perturbation créée par la pointe peut aller s'atténuant.

Nous ne voyons aucune raison pour qu'il en soit ainsi.

Tout revient donc, pour apporter un remède à cette situation, à réduire le rayon de la pointe (sans tomber à zéro), de façon à limiter la quantité d'énergie mise en jeu par le tourbillon qui s'y amorce, sans provoquer toutefois le phénomène que nous avons rencontré lors de l'étude

du maître-couple apparent, provoqué par l'arête vive d'entrée.

Comme de toute façon, on peut admettre que cette perturbation ne sera pas réduite à zéro, il y a lieu de réduire l'épaisseur de l'aile de façon à augmenter l'allongement au-delà de ce que nous avons établi comme le plus favorable, pour les vitesses inférieures à celle du son.

Nous avons donné, figure 34, le tracé d'une aile destinée à franchir le mur du son, différent de celui utilisé normalement et représenté figure 32.

Lorsque l'aile doit être conçue pour laisser passer le flux d'air nécessaire à l'alimentation d'un turbo-réacteur, logé dans la coque, l'épaisseur de cette aile ne peut être réduite au minimum : le seul moyen d'en sortir à ce moment est d'accroître la profondeur dans la partie proche de la coque. De là, la forme en « delta » utilisée pour les avions rapides, qui s'écarte du tracé en « trapèze » généralement adopté.

### § 5. — Forme de la coque

Pour ce qui est de la coque qui participe aux mêmes phénomènes perturbateurs, il y a lieu de distinguer comme pour l'aile, le cas des vitesses inférieures et celui des vitesses supérieures à celle du son.

Pour les premières, nous avons donné, figure 16 le diagramme des valeurs de  $C$  en fonction de  $\frac{1}{m}$  (courbe II) et partant la solution la plus favorable  $\frac{1}{m} = 6$  avec  $x = 1,50$ .

Le tracé de la figure 87 donne la forme optimum correspondante.

S'il s'agit de vitesses supérieures à celle du son, on peut s'efforcer de réduire l'arrondi de pointe ou mieux encore de prolonger la coque par un solide de révolution se raccordant à celle-ci par un profil en arc de cercle avec un rayon  $\rho_1$ , inférieur de toute façon à  $2\rho$  (fig. 88).

En canalisant les filets vers le point d'inflexion normal B, on peut espérer réduire au minimum l'effet de la perturbation et limiter ainsi l'épaisseur du flux influencé par le maître-couple réel, à une valeur voisine du minimum 0,06  $\rho \alpha$ .

S'il en était ainsi la solution optimum serait donnée par le tracé de la figure 88.

Mais c'est là une limite et l'on peut dire que plus on s'écartera de cette limite, plus la valeur de  $\frac{1}{m}$  devra grandir.

A chaque valeur de  $e_1$ , épaisseur du flux influencé, correspond une valeur  $(\frac{1}{mx})$ , plus favorable.

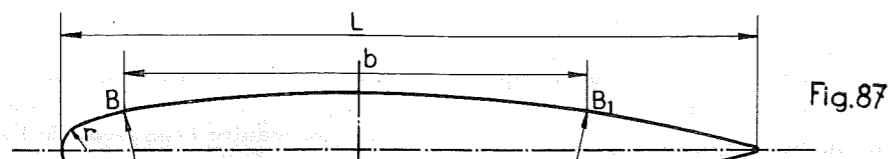


Fig. 87

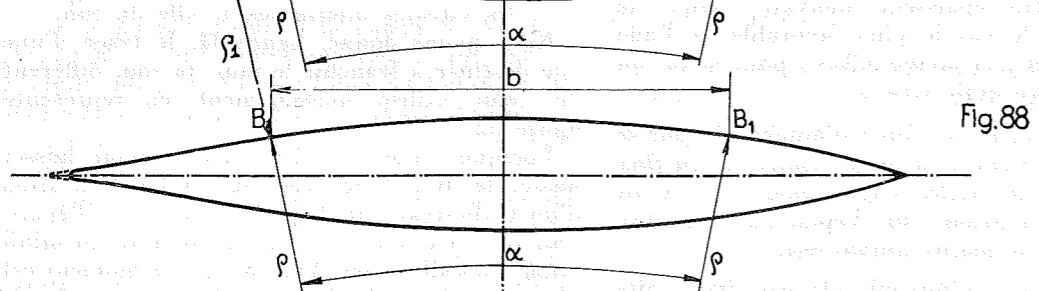


Fig. 88

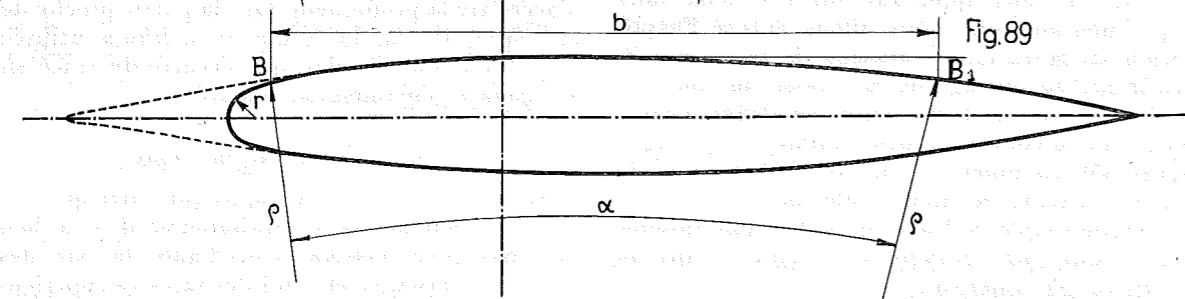


Fig. 89

Il suffirait de se reporter au chapitre III, § 2, de la Première Partie pour trouver la formule donnant  $\left(\frac{1}{mx}\right)$ , pour chaque valeur de  $k$  dans la relation :

$$e_1 = kb$$

( $k$  pouvant aller du minimum 0,06 au maximum 2,09).

Il faudrait naturellement tenir compte de la relation :

$$c_x' = C_r \times m.$$

Le tracé de la figure 89 correspond à  $\frac{1}{m} = 8$  et  $x = 1,35$ .

*Remarque I.* — L'emplacement des ailes par rapport à la coque ne paraît pas avoir une influence importante. Il nous semble qu'il y

aurait avantage à placer l'aile de façon que la partie dorsale soit continue, étant donné que la sustentation est assurée pour les  $\frac{2}{3}$ , par le flux en dépression sur cette face.

Ce sont des considérations d'ordre constructif qui semblent intervenir pour fixer cette position.

*Remarque II.* — Nous n'avons pas fait intervenir dans ces considérations, le coefficient  $c_x''$  qui se rapporte au maître-couple apparent; c'est qu'en vol normal on peut s'arranger pour rendre ce terme très petit en utilisant des ailes à faible courbure [ $(\beta_1 + \gamma) = 10^\circ$ ] et en orientant la tangente au bord d'entrée dans l'axe de la coque. Cela implique un angle de vol relativement grand qui ne peut être réalisé, si la vitesse d'atterrissage n'est pas très élevée, ou l'altitude de vol normal très grande.

## SEPTIÈME PARTIE

### CONCLUSIONS GÉNÉRALES

#### CHAPITRE I

#### POUR CE QUI TOUCHE A LA MÉTHODE

##### § 1. — Deux questions préalables

I. — Nous voudrions, avant de dresser le bilan de cette étude, répondre à une première objection qui est venue, nous en sommes certain, à l'esprit du lecteur bienveillant mais sceptique tout de même :

« Comment se fait-il que, sans erreur appréciable, on puisse considérer que toutes les particules de la masse  $M$  qui participe par seconde au phénomène de la déviation, soient animées de la même vitesse  $c$ . »

Si nous ne considérons que les phénomènes qui se produisent à partir de l'allongement optimum et au-delà, il nous sera aisé de montrer que l'énergie perdue par seconde, par les tourbillons qui s'amorcent aux deux points d'inflexion (avant et arrière) et qui a pour valeur, comme nous l'avons établi (pour l'ensemble des deux) :

$$2 \left( \frac{Mc_1^2}{2} \right)$$

ne représente que deux centièmes de l'énergie mise en jeu par la masse totale  $M$ , participant à la déviation, c'est-à-dire  $\frac{Mc^2}{2}$ .

En effet, pour  $m = \frac{1}{8}$ ,  $\sin \alpha_1 = \frac{2}{3} mx$ , et comme  $x = 1,3$  :

$$c_1 = c \sin \alpha_1 \approx \frac{1}{10} c$$

ce qui correspond à :

$$c_1^2 = \frac{1}{100} c^2.$$

Cette fraction de  $\frac{2}{100}$  de l'énergie totale est incapable de perturber le phénomène fondamental, au point d'affaiblir le raisonnement basé sur l'hypothèse :

$$c = \text{constante.}$$

Bien entendu, lorsque la turbulence résultant de l'apparition des tourbillons aux points d'inflexion, est beaucoup plus grande, il n'en est plus ainsi.

*Premier exemple à l'occasion de l'analyse des résultats observés sur la sphère et sur le cylindre.*

Là pour pouvoir coordonner les observations, on se rappellera qu'il nous a fallu corriger légèrement et un peu arbitrairement, les courbes des pressions relevées au manomètre; c'est que dans cet exemple  $c_1$  avait pour valeur  $0,7 c$  et que partant  $\frac{Mc_1^2}{2}$  représentait  $\frac{50}{100}$  de  $\left(\frac{Mc^2}{2}\right)$ .

Bien entendu, dans ce cas, pour rendre compte des faits observés, nous avons dû admettre que l'écoulement au-delà du premier point d'inflexion se faisait non à la vitesse  $c$ , mais à la vitesse  $c_2$ , composante  $c$  (qui avec  $c_1$  conduisait à la résultante  $c$ ).

*Deuxième exemple, à propos du calcul de  $\frac{\gamma}{\beta_1}$  pour les ailes minces à une seule courbure.*

Nous avons établi que la valeur théorique de ce rapport était égal à  $\frac{1}{2}$ , bien que le diagramme de la figure (18) montre que les valeurs expérimentales pour les ailes minces, en l'absence de tout carénage, tombait de  $\frac{1}{2}$  à  $\frac{1}{4}$ , à mesure que  $\beta_1$  grandissait, la valeur de  $\frac{1}{2}$  n'étant réalisée que pour  $\beta = 0$ , c'est-à-dire pour le cas d'une courbure nulle.

Pour ce cas, en effet, la perturbation déclenchée par le tourbillon amorcé en  $i$ , par la composante de la vitesse  $c$ , perpendiculaire à la trajectoire, est nulle (fig. 19).

Lorsque l'arête n'est pas carénée et que la courbure n'est pas nulle, la turbulence créée par le tourbillon a pour effet de réduire la composante  $c_1$  sur laquelle nous avons compté pour établir les conditions d'équilibre;  $\frac{\gamma}{\beta_1}$  n'est donc

égal à  $\frac{1}{2}$  que si, par suite du carénage, la turbulence redevient négligeable.

Pour le cas limite de l'aile mince non carénée, il serait facile, en partant des valeurs expérimentales de  $\frac{\gamma}{\beta_1}$  en fonction de  $\beta_1$ , de trouver une relation entre la perte de vitesse sur  $c_1$  et l'angle  $\beta_1$ .

Pour le cas de l'arête carénée, l'expérience montre que cette perte sur  $c_1$  est négligeable, quel que soit  $\beta_1$ .

Il nous semble que ces deux exemples suffisent pour montrer les limites d'applicabilité des formules établies, et pour écarter tout doute sur la valeur de la méthode appliquée aux profils carénés dont l'allongement est égal ou supérieur à l'allongement optimum.

II. — La deuxième question à laquelle nous voudrions répondre, avant d'aborder les conclusions, est une de celles qui pourraient venir aisément à l'esprit du lecteur habitué aux raisonnements de l'hydrodynamique classique :

« Quelle est, tout compte fait, dans la pensée de l'auteur, la portée de l'œuvre qu'il a entreprise ainsi, en pionnier isolé. »

Nous voudrions y répondre en disant que, selon nous, cette œuvre est à l'hydrodynamique ce que la résistance des matériaux est à la théorie de l'élasticité.

Faire confiance à la résistance des matériaux n'est pas nier la valeur de la théorie de l'élasticité, ni en discuter l'utilité ou la portée : tout est affaire de limites.

L'une n'a pas remplacé l'autre, que nous sachions, dans la technique et l'admiration que nous professons pour d'illustres collègues dont une partie de l'existence a été consacrée à la mise au point, sans failles, de l'aérodynamique appliquée à l'étude des ailes et des coques, nous ôterait l'envie de poursuivre cette œuvre plus modeste, si celle-ci devait avoir pour conséquence de diminuer la valeur de celle-là.

Mais pourquoi en serait-il ainsi ? Il suffit pour que leur « coexistence » soit assurée, que l'image du phénomène de la déviation tel qu'il résulte des connaissances fournies par l'aérodynamique, contienne comme cas particulier et moyennant certaines simplifications, l'image proposée par nous, en nous en tenant à ce que nous voudrions appeler le domaine de l'hydraulique.

A l'expérimentation de montrer jusqu'à quel point les simplifications admises n'entament pas le phénomène fondamental. De là, notre souci constant de confronter, pas à pas, les résultats calculés et les résultats observés tout au long de cette œuvre : c'était pour nous une nécessité fondamentale et nous pensons n'y avoir pas failli.

La valeur d'une œuvre ainsi conçue ne peut être mesurée, selon nous, qu'en fonction des services qu'elle peut rendre : à chacun d'apprécier, à sa façon, ce qui en est à cet égard.

L'ingénieur qui, par sa profession, est forcé étant donné l'étendue des connaissances de toute nature dont il doit faire JOURNELLE-

MENT la synthèse, s'accommodera plus facilement d'une simplification qui, si elle ne le trompe pas dans les limites d'application, lui apparaîtra, par nécessité, largement suffisante.

C'est sous cet aspect que nous voudrions voir juger notre œuvre; elle nous a été suggérée par nos études antérieures sur les turbo-machines, notamment par l'étude sur les « Hélices aériennes » de 1911 et par celle sur les « Ventilateurs hélicoïdes » de 1947, et elle ne nous a pas déçu.

## § 2. — Deux idées indéfendables

Elle n'a pas la prétention de tout résoudre, mais telle qu'elle est, elle fait disparaître deux idées indéfendables sur la forme simpliste qu'elles prennent dans l'esprit de certains défenseurs, peut-être mal inspirés, de la théorie classique : elles sont à l'origine, en tout cas, de notre volonté d'éclairer la question, il y a une quinzaine d'années au moins.

I. Théoriquement la poussée sur la sphère est nulle lorsqu'elle est soumise à l'action d'un fluide parfait.

Cette proposition part de l'idée que, si le fluide est parfait, la réaction globale venant de la face avant et de la face arrière, doit être nulle.

Car si elle n'était pas nulle, on arriverait à une anomalie : en effet, dans le cas du corps se déplaçant dans un fluide au repos, cette réaction effectuerait un travail, et l'énergie correspondante devrait se dissiper, alors qu'il s'agit d'un fluide parfait, par hypothèse.

Cette manière de raisonner postule l'idée qu'il y a identité entre les deux phénomènes : celui qui se passe lorsque le flux s'écoule en enveloppant l'obstacle au repos, et celui qui se produit lors de la remorque d'un corps dans un flux au repos.

Si le lecteur veut bien se reporter au § 4 du chapitre II (Première Partie) où nous avons analysé la différence essentielle que l'on observe entre les résultats obtenus expérimentalement en écoulement laminaire et en écoulement turbulent, il comprendra que là gît l'origine de l'erreur : admettre, à priori, l'identité entre les deux phénomènes.

Dans le cas de l'obstacle au repos, nous disons qu'il est impossible d'imaginer que la poussée sur la sphère n'existe pas, même s'il s'agit d'un fluide parfait.

II. Pour l'envergure infinie, la résistance propre de l'aile est nulle, s'il s'agit d'un fluide parfait.

Cette affirmation provient de la même idée : l'identification des deux phénomènes.

Comme cette résistance est importante, il suffit pour écarter la contradiction, d'admettre

que cette résistance provient de l'action des extrémités de l'aile qui n'existent évidemment que quand l'envergure est finie.

Physiquement, une telle interprétation est inconcevable. Le phénomène qui se passe au centre d'une plaque de grande envergure, reste identique à lui-même, quand cette envergure grandit encore; la résistance propre à cette région centrale reste donc ce qu'elle était, et partant la dissipation de l'énergie correspondant à cette résistance doit se produire dans la région même où cette résistance s'exerce. Dans la réalité pour un corps remorqué sans frottement, les éléments de fluide qui entrent en jeu, restent au repos, sauf dans la direction perpendiculaire au déplacement, où, pour s'effacer devant le corps qui avance, ils prennent une vitesse qui va grandissant jusqu'au point d'inflexion, point d'inflexion qui existe nécessairement pour un flux enveloppant l'obstacle.

Aucune retransformation, en énergie potentielle de pression, n'étant possible, elle doit donc être perdue.

Et l'on peut dire que cette nécessité une fois admise, tout devient mathématiquement clair, ainsi que nous l'avons montré :

- 1) dans l'analyse des résultats observés pour la sphère et le cylindre;
- 2) dans l'analyse des résultats observés sur l'aile où cette hypothèse nous a permis de donner une signification physique au coefficient  $K'$  que nous avions dû introduire pour rendre compte des résultats observés, et cela bien avant d'en avoir expliqué l'origine.

## CHAPITRE II

### LE BILAN

#### § I. — En ce qui concerne l'aile

Ce n'est qu'après un très long effort que nous avons pu ordonner l'ensemble de nos connaissances sur le sujet présent, en particulier sur l'écoulement le long du cylindre et de la sphère; car nous avons débuté par la recherche des coefficients de portance et de résistance propres aux ailes profilées, avant d'aborder le calcul de la résistance des corps sans portance.

Nous n'avons pas poussé les recherches du rapport  $\frac{Y}{\beta_1}$  au-delà du cas le plus simple, de l'aile mince à une seule courbure, mais nous sommes persuadé qu'il serait possible d'étendre le raisonnement au profil parabolique épais, ce qui rendrait cette fois toute l'étude parfaitement indépendante des recherches au tunnel.

Ceci veut dire que nous aurions réussi alors à mettre tout « l'album à profils » en formules,

en deux formules explicites, que nous transcrivons sous la forme suivante :

$$\frac{P}{S} = \left(\frac{\delta}{g} c^2\right) \times \pi \frac{k}{k+0,8} \left(1 - \frac{m}{\pi}\right) \frac{\Phi}{\Phi_1} F(z) \sin \alpha \quad (I)$$

$$\frac{T}{S} = \left(\frac{\delta}{g} c^2\right) \times 2\pi \frac{k}{k+0,8} \left(1 - \frac{m}{\pi}\right) \frac{\Phi}{\Phi_1} F(x) \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (II)$$

Nous rappellerons ici en une vue d'ensemble, la signification des différents facteurs :

$$F(z) = 1 - A + AB \frac{k_1'}{k'}$$

$$F(x) = 1 - AA_1 + BB_1 AK' \frac{k_1'}{k'}$$

les coefficients  $A, B, A_1, B_1, K_1' \frac{k_1'}{k'}$  prenant les valeurs suivantes :

$$A = \frac{\theta + \beta_2 - \gamma}{\beta_1 + \gamma}$$

$$B = \frac{2(\beta_2 - \gamma) + (\theta - \delta)}{\theta + \beta_1 + \beta_2}$$

$$A_1 = (2 - A)$$

$$B_1 = 2 - \frac{\theta/\beta_1 + \delta/\beta_1}{1 + \gamma/\beta_1}$$

$$K' = 1 - \frac{1}{2\psi}$$

$$\gamma'' = \frac{\theta + \beta_2 - \gamma}{\beta_1 + \beta_2}$$

$$\psi = 1 + 2,00 (\gamma'' - 0,400)$$

Pour le calcul de  $\frac{k_1'}{k'}$ , nous avons utilisé la relation :

$$\frac{k_1'}{k'} = 1 - 0,08 \frac{\alpha_1' - 8^\circ}{5^\circ}$$

avec :

$$\alpha_1' = \alpha \times (r)$$

et :

$$(r) = \frac{2(\beta_2 - \gamma) + (\theta - \delta)}{\beta_1 + \gamma}$$

Pour la valeur  $\Phi$  :

$$\Phi = \frac{\beta_1 + \gamma}{\beta_1 + \beta_2'}$$

avec  $\beta_2' = \beta_2 - \delta$ .

Quant à  $\Phi$ , il doit être pris égal à 0,75.

On pourrait nous reprocher l'abondance des notations, mais il est évident que quelle que soit la méthode adoptée pour la mise en équation, il ne sera jamais possible de trouver des fonctions explicites de :

$$\frac{P}{S}, \frac{T}{P}, R_f,$$

sans faire intervenir tous les facteurs qui définissent :

1) la forme de la colonne vertébrale de l'aile :

$$\beta_1, \beta_2, \delta, \theta,$$

rapportés à la corde du profil ;

2) la forme du carénage définie par :

$$\frac{1}{m} = \frac{a}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad x = \frac{a}{b}$$

qui fixe le rayon de courbure  $\rho$  et les raccords aux extrémités ;

3) la position de la corde par rapport à la direction du flux, c'est-à-dire l'angle  $i$  ce qui conduit à  $\alpha = i + \gamma$  ;

4) la forme de l'aile en projection horizontale, notamment le rapport de la longueur  $L$  à la profondeur, c'est-à-dire le rapport  $k = \frac{L}{a}$ , valeur unique ou valeur moyenne.

Si nous voulons passer à la valeur de  $T_r$  traînée résultant de la somme de la traînée de forme, de la traînée de profil et de la traînée résultant du maître-couple apparent, nous aurons à introduire, les valeurs de  $c_x'$  et  $c_x''$ , coefficients de traînée rapportés à la surface allaire  $S$  ; nous devons, à partir de ce moment faire intervenir le coefficient de frottement  $2k_1''$ .

Pour les allongements plus grands que l'allongement optimum :

$$c_x' = \frac{8}{9} \times 0,365 (mx)_1 m^2 x + \frac{2k_1''}{x}$$

$$c_x'' = 0,025 \times 0,60 \sin \frac{\beta_1 + \gamma - \alpha}{2} \left( 1 + n \frac{m}{m_1} \right)$$

avec :

$$\frac{1}{m_1} = \frac{\beta_1}{(\beta_1 + \gamma)^2}$$

$n = \frac{1}{3}$  pour les profils courbes ;

$n = \frac{2}{3}$  pour les profils à face ventrale plane.

$(mx)_1$  étant donné par la relation :

$$\left( \frac{1}{mx} \right)_1 = \sqrt[3]{\frac{2 \times 8/9 \times 0,365}{2k_1''}}$$

$2k_1''$  étant donné par le diagramme de la figure (52) pour les surfaces lisses, en fonction de  $Re$ .

La valeur de  $x$  peut être prise normalement égale à 1,5 ; sa valeur minimum est de l'ordre de 1,30 ; sa valeur maximum de l'ordre de 1,70 suivant le tracé adopté.

Nous donnons figure (90), les valeurs expérimentales de  $X$  en fonction de  $\frac{\beta_1}{\beta_2}$  ;  $X$  représente

ici le rapport  $\frac{\gamma}{\beta_2}$ , d'où l'on déduit immédiatement :

$$\frac{\gamma}{\beta_1} = X \frac{\beta_2'}{\beta_1}$$

pour les valeurs de  $\frac{\beta_1}{\beta_2}$  plus grandes que 1.

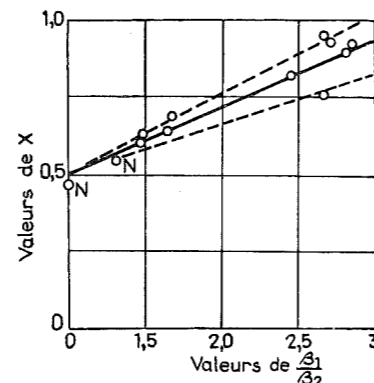


Fig. 90.

Les relations ainsi présentées ne valent que pour les vitesses inférieures à celle du son ; mais en partant de ces relations, il nous a été possible de déterminer par le calcul :

- 1) l'allongement le plus favorable ;
- 2) l'angle de vol le plus favorable ;
- 3) le tracé de l'aile carénée la plus appropriée à des conditions déterminées de service.

### § 2. — En ce qui concerne la coque

En ce qui concerne la coque du navire, il suffira de se reporter à la Quatrième Partie, où la question a été traitée complètement en tenant compte d'un phénomène important qui n'existe pas quand il s'agit de la coque d'un avion, la vague d'accompagnement.

Pour ce qui concerne la coque d'un avion, qui se rapproche suffisamment d'un solide révolution

pour être confondue avec lui, nous avons donné la relation suivante qui se rapporte à des profils dont l'allongement est égal ou plus grand que l'allongement optimum :

$$C_1 = \frac{16}{27} \times 0,76 \times 0,365 (mx)_1 mx + 2 \frac{2k_1''}{mx}$$

avec :

$$(mx)_1 = \sqrt[3]{\frac{2 \times \frac{16}{27} \times 0,76 \times 0,365}{4k_1''}}$$

Nous avons vu que l'allongement optimum avec  $x = 1,5$ , pour fixer les idées, était égal à :

$$\frac{1}{m} = 6.$$

Nous avons indiqué, figure 87, le tracé correspondant à cette valeur, tracé optimum, lorsque l'on a affaire à des vitesses nettement inférieures à celles du son.

### § 3. — En ce qui concerne le mur du son

Nous ne reprendrons pas ici les déductions tirées de l'analyse des phénomènes qui accompagnent le passage à la vitesse du son, analyse que nous avons abordée une première fois à la fin de la Deuxième Partie, puis que nous avons développée dans la partie précédente, grâce à l'appoint fourni par l'étude de la sustentation.

Peut-être ne sera-ce pas le moindre mérite de cette théorie d'avoir clarifié les idées sur ce sujet, et d'avoir montré qu'il y avait tout lieu de croire que l'origine de la perturbation était dans le « gonflement » de l'épaisseur du flux influencé par le maître-couple réel, cette épaisseur étant normalement égale à  $0,06 \rho a$  et pouvant atteindre dans le cas d'une perturbation limite,  $2,09 \rho a$ , c'est-à-dire la totalité de l'épaisseur du flux mis en jeu par la déviation de l'aile elle-même.

$$\left( \frac{2}{3} \pi \right) a = 2,09 \rho a.$$

Nous pourrions compléter notre exposé, en répétant ici l'explication que nous avons déjà donnée de « l'explosion » qui se produit au moment où le nombre de Mach atteint une valeur égale à l'unité.

Au § 5, de la Deuxième Partie, nous avons montré comment l'énergie accumulée au point d'inflexion du flux enveloppant la pointe avant, provoquait une expansion de la couche mise en jeu par l'effet du carénage. Cause et effet se trouvent en quelque sorte superposés, à ce moment, pour provoquer ce qu'on pourrait appeler une réaction en chaîne, dans toute la

masse intéressée, c'est-à-dire sur une épaisseur qui, à la limite, peut atteindre :

$$e_1 = \frac{2}{3} \pi \frac{a}{x}$$

c'est-à-dire une valeur 35 fois supérieure à la valeur initiale.

Si l'explication est exacte, tout revient à essayer de réduire l'influence de cette pointe avant, en lui donnant un rayon de courbure minimum, ce qui ne veut pas dire nul.

Si, par ce moyen, on ne peut supprimer la perturbation totalement, il reste le moyen d'en atténuer l'effet en faisant croître la valeur  $\frac{1}{m}$  de l'allongement, passant de 8 à 12 et davantage.

Nous avons fait ressortir cette conclusion par les figures 32, 33, 34, et nous avons justifié à ce moment le tracé fusiforme de la figure 34 qui se substitue aujourd'hui au profil parabolique de la figure 32 adopté pour les ailes normales.

Nous avons également justifié le tracé de la projection horizontale en trapèze qui peut être poussée jusqu'à la forme en delta, dans le cas limite où l'épaisseur de l'aile à l'endroit du raccord avec la coque, ne peut être réduite à une valeur très faible : il convient à partir de ce moment d'allonger l'aile sur une grande partie de la longueur de la coque pour réaliser à cet endroit un allongement supérieur à 12 ou 15.

Pour expliquer le second « bang » que l'on entend quand  $M$  atteint la valeur de 1,15, il nous suffira de montrer l'analogie du diagramme de  $e$  de la figure 77 qui correspond au premier bang et qui est dû à la forme du carénage, avec celui qui se rattache au phénomène d'écoulement sous la face inférieure de l'aile (fig. 75).

La valeur de  $e_1$  de la couche influencée par la partie concave de l'aile est inférieure à celle influencée par le carénage, même au moment de sa valeur maximum, mais la vitesse atteint à ce moment :

$$1,15 \times 350 = 402 \text{ m. sec.}$$

Si l'on tient compte de ce que  $e_1$  a pour valeur :

$$e_1 = \frac{1}{2} e_2 \times \frac{4}{3}$$

$\left( \frac{4}{3} \right)$  parce que l'arc total  $ib$  est actif à ce moment)

et du rapport du carré des vitesses, on voit que l'énergie mise en jeu n'est pas sensiblement inférieure à celle correspondant au premier bang, puisque :

$$\left( \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \right) (1,15)^2 = 0,88.$$

Tout ce que nous venons de dire pour le carénage de l'aile, vaut pour le carénage de la coque.

La pointe fixant l'importance de la perturbation au passage de la vitesse du son, on comprend que l'effort portera sur la réduction du rayon de cette pointe. Le moyen le plus efficace est de prolonger l'avant du carénage par un solide de révolution tracé de façon à guider les filets vers le point d'inflexion principal B, et de limiter ainsi l'expansion de la couche influencée par le maître-couple réel.

On arrive au tracé de la figure 88.

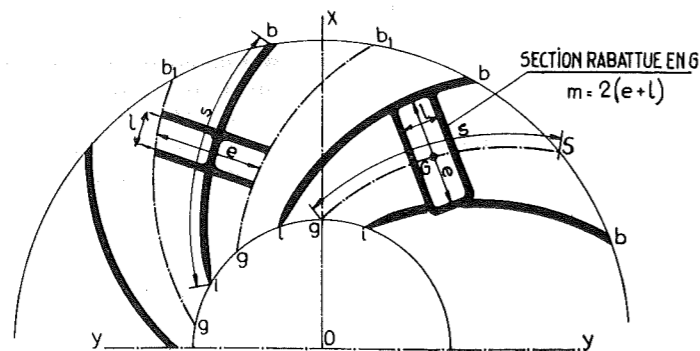


Fig. 91.

Le profil le plus favorable sera évidemment celui qui parviendra à ramener l'épaisseur de la couche influencée à une valeur voisine de celle fixée par le maître-couple, en régime de vitesses normales, c'est-à-dire  $e_1 = 0,06 \frac{a}{x}$ .

Comme il ne peut en être complètement ainsi, l'allongement le plus favorable dépassera l'allongement optimum fixé par le diagramme de la figure 16, qui n'a été établi que pour des vitesses inférieures à celle du son.

La solution donnée par la figure 89 peut donc se justifier, même si les conditions d'exploitation n'exigent pas un allongement plus prononcé que celui de la figure 88.

#### § 4. — En ce qui concerne l'application aux turbo-machines

Il faudrait rédiger un autre fascicule, si nous voulions aborder cet aspect du problème d'une façon vraiment explicite. Nous nous bornerons à signaler ici quelques endroits de la théorie où le bénéfice apporté par cette étude est certain.

1. Nous avons montré que la déviation était commandée par le tracé de la « colonne vertébrale » de l'aile, défini au moyen des angles d'entrée et de sortie rapportés à la corde mais qui, par l'intermédiaire de l'angle  $\gamma$ , peuvent être rapportés à la direction du flux.

Le carénage de l'aile n'intervient que pour réduire la résistance opposée à l'écoulement du fluide.

Le problème du tracé des aubes est donc tout résolu, si l'on s'inspire de cette vue nette et simpliste. La théorie fait connaître les angles d'entrée et de sortie ; les conditions de résistance mécanique fixent l'épaisseur minimum de l'aube ; le tracé de l'aube à l'entrée et à la sortie s'inspirera des règles du carénage, en tenant compte toutefois ici qu'il importe de ne pas trop rétrécir à l'entrée, les canaux formés par les aubes successives (fig. 91).

2. Toute la théorie des turbo-machines, s'appuie sur la connaissance de deux coefficients de perte  $\varphi$  et  $\psi$  qui, introduits vers 1900 pour l'étude des turbines à vapeur, n'avaient à cette époque, d'autre signification que celle-ci :

« La vitesse à la sortie de l'aubage directeur est plus petite que la vitesse théorique ; partant, on peut poser :

$$c_1 = \varphi c$$

$c$  étant la vitesse théorique ; pour les vitesses dans l'aubage mobile, on peut poser de même :

$$w_2 = \psi w_1$$

$w_2$  étant la vitesse relative de sortie.

Dès 1906, nous nous étions efforcé de donner une signification physique à ces deux coefficients, de façon à pouvoir les évaluer en fonction des dimensions de l'aubage et du coefficient de frottement. Nous ne pourrions reproduire ici le raisonnement qui conduit à la relation :

$$\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) = 2 gk \times \frac{1}{3} \left(\frac{m}{\sigma}\right) s.$$

$m$  étant le périmètre de la section moyenne du canal formé par deux aubes voisines (fig. 91),  $s$  la longueur du canal mesuré sur filet moyen entre deux aubes,  $\sigma$  la section moyenne,  $2gk$  étant égal à  $2k_1''$ .

Après l'exposé contenu dans ce fascicule, ce n'est pas le canal formé par deux aubes voisines

qu'il faut envisager, mais la fraction de la roue limitée par les axes  $gb_1$  des deux canaux voisins, comme il est indiqué en point-tiret dans la figure 91 ; la surface de frottement entrant en jeu reste fixée par le produit  $m \times s$ , la section de passage correspondante  $\sigma$  reste la même, mais le rôle de l'aube est mis en évidence, au point de vue de la perte par déviation.

Pour tenir compte de la présence de l'aube pour le calcul de ces pertes, nous avons introduit un coefficient de choc dans la relation qui fixe  $\psi$  ; après l'exposé que nous venons de faire, ce coefficient de choc n'est autre que le coefficient  $C_1$  défini dans l'étude de l'aile carénée.

Nous avons pu, déjà à ce moment, par une évaluation chiffrée, établir les valeurs des coefficients  $\varphi$  et  $\psi$ , et cela nous avait permis de dresser, dès 1906, un diagramme des rendements comparés des différents types de turbines à vapeur, diagramme que nous reproduisons

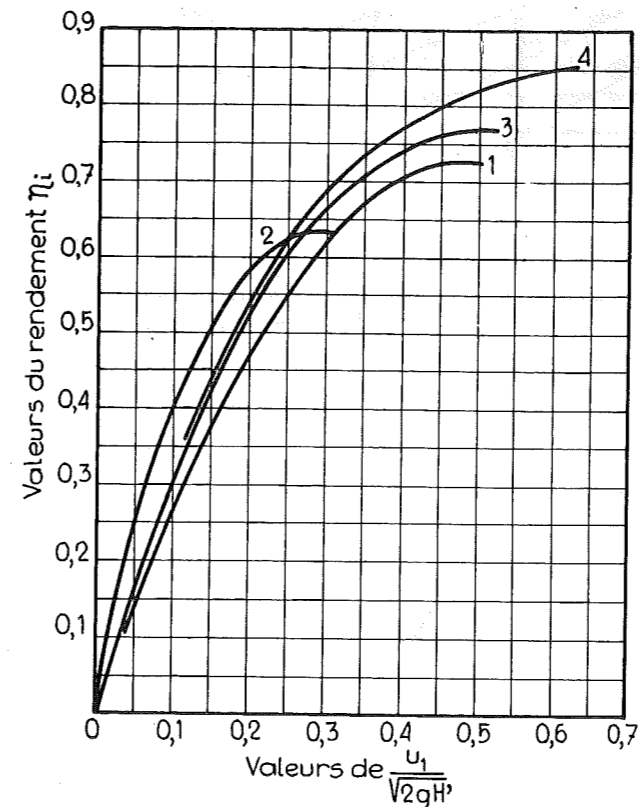


Fig. 92.

figure 92, et qui peut encore être regardé aujourd'hui comme valable.

En abscisse, nous avons porté le rapport :

$$x_1 = \frac{u_1}{\sqrt{2gH'}}$$

proportionnel à la vitesse périphérique  $u_1$ , quand la hauteur de chute thermique  $H'$ , est constante.

Généralement, la variable indépendante choisie était :

$$x = \frac{u_1}{c_1}$$

mais, sous cette forme, les diagrammes ne permettraient pas d'établir une comparaison entre turbines d'action et turbines à réaction.

La courbe 1 se rapporte à la turbine d'action sans récupération à la sortie ;

La courbe 2 se rapporte à la turbine d'action à deux chutes de vitesse sans récupération à la sortie ;

La courbe 3 correspond à la turbine d'action avec récupération à la sortie ;

La courbe 4 à la turbine à réaction, du degré de réaction  $\frac{1}{2}$ .

3. En 1911, nous avons entrepris la théorie des hélices aériennes ; pour pouvoir passer à l'intégration le long du rayon, de la poussée et de la traînée élémentaires, nous avons eu l'idée, en comparant les valeurs expérimentales de la traînée réelle à la traînée théorique pour une plaque courbe, de représenter le rapport de ces deux valeurs par une fonction du second degré en  $\sin \frac{\alpha}{2}$ .

Alors que nous ne donnions à ce rapport, à cette époque, qu'une valeur empirique, destinée à nous tirer d'affaire, sans nous écarter des faits constatés au laboratoire pour la plaque courbe, nous avons vu, par l'exposé du § 5, chapitre III, de la Cinquième Partie, qu'il était possible d'établir ce rapport sur une base mathématique, et de déterminer *a priori*, les trois coefficients qui devront rationnellement entrer dans cette fonction du second degré.

A cette époque lointaine maintenant, où le Capitaine Dorand venait à peine de publier son mémoire sur les résultats obtenus par des essais sur des hélices aériennes en translation, le tout premier du genre, nous avons donné, comme résultats de nos calculs, en fonction de la variable

indépendante  $\frac{c}{\omega R_1}$ , rapport de la vitesse de

translation à la vitesse périphérique, le diagramme reproduit figure 93 ; ce diagramme rendait compte non seulement des résultats obtenus pour le rapport utilisé par le Capitaine Dorand :

$$m = \frac{p}{2\pi R_1} = 0,25$$

( $p$  étant le pas de l'hélice,  $2\pi R_1$  la circonférence du cercle balayé par l'hélice), mais il faisait connaître comment pouvait varier le rendement maximum avec la valeur de  $m$  et pourquoi il

existait une valeur de  $m$  conduisant à un maximum maximorum (fig. 93).

Les courbes en trait fin donnaient la valeur du coefficient  $2 k_m \alpha_1$  qui introduit dans la relation suivante :

$$P = \left( 2 k_m \alpha_1 \right) \frac{\delta}{g} \omega^2 R_1^4$$

faisait connaître la poussée  $P$  de l'hélice à deux pales, dont chacune occupait un angle au centre  $\theta = 20^\circ$ .

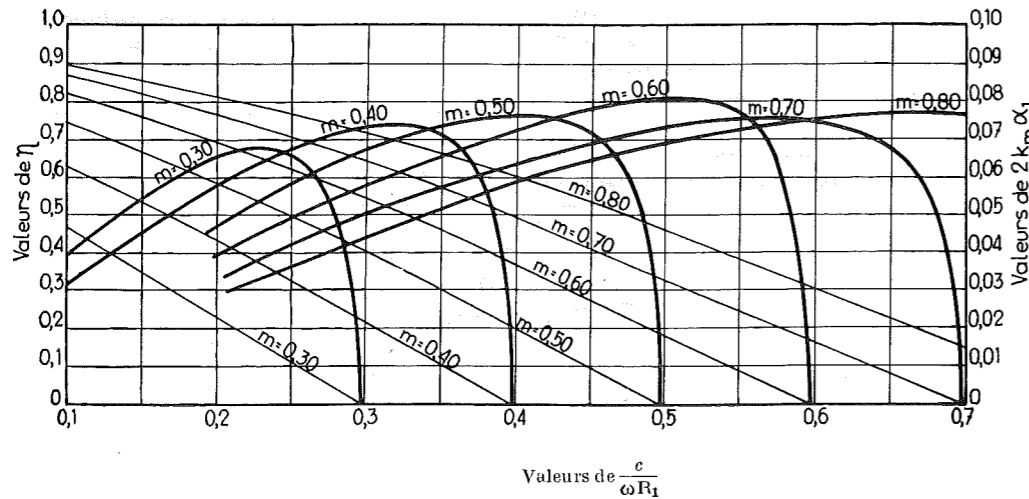


Fig. 93.

4. En 1947, utilisant les résultats que nous avons déjà mis sur pied, pour le calcul des coefficients de portance  $c_z$  et de traînée  $c_w$  et  $c'_w$ , nous avons entrepris la *théorie des ventilateurs hélicoïdes*.

Elle nous avait conduit à donner une expression du coefficient de puissance  $P$  :

$$P = \frac{gTi}{u_1^2}$$

( $Ti$  étant le travail dépensé par kg de fluide débité;  $u_1$  étant la vitesse périphérique).

Cette expression était très différente de celle que l'on peut établir en partant du théorème de Bernouilli, qui ne s'applique en toute rigueur, qu'aux ventilateurs à très grand nombre d'ailes.

Ce coefficient de puissance que nous avons pu établir explicitement, montrait qu'il était une fonction du premier degré en  $x'$ ,  $x'$  désignant le rapport :

$$x' = \frac{c}{u_1}$$

$c$  étant la vitesse d'écoulement axial à l'entrée,  $u_1$  la vitesse périphérique des pales.

Le diagramme de la figure 94, établi à quel point le coefficient de puissance  $P$  est bien une fonction linéaire de  $x'$ .

La valeur de  $P$  ainsi trouvée variait avec le nombre d'aubes, et ne se ramenait à celle établie en partant de la théorie classique basée sur la relation de Bernouilli, que pour un très grand nombre d'aubes.

L'établissement de cette relation fondamentale n'avait été possible qu'à la faveur des

connaissances et des relations que nous avons tirées d'une partie de la présente étude.

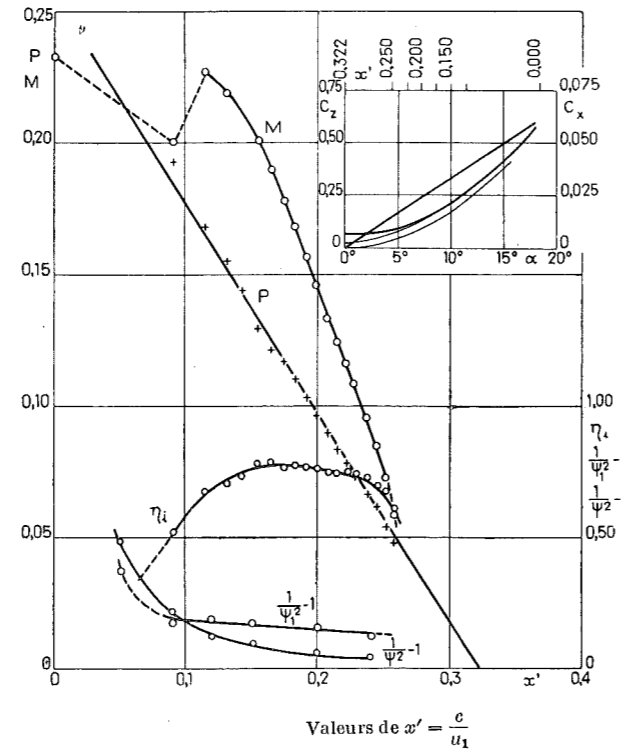


Fig. 94.

### CHAPITRE III POUR CE QUI TOUCHE A LA VALEUR DU PRINCIPE DE BASE

La portée de notre étude, en mettant en évidence de façon irréfutable la valeur du principe de base, par une confrontation constante et sans réserve des résultats observés et des résultats calculés, dépasse peut-être le but que nous nous étions assigné.

Cette étude fait apparaître, en effet, sous un jour nouveau, les possibilités qu'offre le théorème de la quantité de mouvement, pour l'analyse de phénomènes qui ne dépendent chacun, que d'une seule variable du premier degré.

Le phénomène d'ensemble peut être décomposé en phénomènes partiels dont chacun peut être, à son tour, analysé séparément; la loi qui régit le phénomène d'ensemble est donnée par la somme algébrique des lois qui régissent chacun des phénomènes séparés.

Alors qu'il n'existait aucune possibilité de représentation du phénomène d'ensemble, chacun des phénomènes, pris séparément, pourra au contraire donner lieu à une image simple analysable, et la solution du problème pourra ainsi être trouvée.

C'est grâce à cette possibilité qu'offre le théorème de la quantité de mouvement, que nous avons pu apporter une vue d'ensemble cohérente, sans failles et sans contradictions, des phénomènes qui accompagnent la déviation.

Peut-être pourrions-nous souligner que le phénomène simple, peut encore être simplifié, puisque dans ce mémoire, l'analyse a porté sur l'écoulement à filets concentriques, et que les

résultats établis pour ces derniers se sont trouvés valables pour l'écoulement réel.

En nous en remettant à la conception du principe de la conservation de l'énergie énoncée par H. Poincaré, une forme commune à tous les possibles, cette constatation est dans l'ordre :

« Si l'écoulement à filets concentriques est possible, l'analyse de ce dernier vaut pour l'écoulement à filets réels. »

Et l'on arrive ainsi finalement à la notion du vrai qui n'est pas vraisemblable.

Nous nous en excusons, mais nous ne croyons pas, malgré l'effort que nous avons fait pour ordonner les différents chapitres de cette étude, avoir mis le lecteur un peu pressé, dans l'état de se faire une conviction plus déterminée.

L'examen attentif des calculs qui ont conduit à l'évaluation de  $c_z$  et  $c_w$  (Cinquième Partie) et plus particulièrement à la détermination du coefficient  $K'$  que nous avons dû introduire à l'origine, pour faire correspondre les résultats calculés et observés (alors que nous n'en comprenions pas alors la signification), serait de nature à faire naître un premier degré de confiance.

Le calcul du rapport  $\gamma/\beta_1$  et du coefficient de résistance  $c_w''$  dû au maître-couple apparent, avec la confrontation des résultats calculés et observés, pourrait entraîner un degré de confiance supplémentaire.

La détermination, a priori, par le calcul, des nombres de Mach qui correspondent à des troubles particuliers révélés par l'observation, pourrait alors déclencher chez ce lecteur persévérant, une conviction suffisante pour le ramener à un examen plus approfondi de l'ensemble, et à une appréciation plus juste de sa valeur.



TABLE DES NOTATIONS

Lettre	Désignation	Formule	Lettre	Désignation	Formule
$a$	profondeur de l'aile.		$k$	coefficient d'envergure $\frac{L}{a}$ .	
$A, A_1$	fonctions de rapports d'angles.	(198)(214)	$k$	rapport $e_1/\rho$	(84)
$b$	distance entre points d'inflexion dans l'étude du carénage.		$k'$	rapport de $\frac{e}{a}$ .	
$B, B_1$	fonctions de rapports d'angles.	(199)(215)	$k_1'$	rapport de $\frac{e}{a}$ pour le rabattement arrière.	
$c, c_1, c_2$	vitesse absolue	fig. 6	$k_1'$	rapport $\frac{e}{\rho}$ dans le cas du flux frappant obliquement le plan	(19)(27)
$c_x$	coefficient de traînée propre.	(23)	$2k_1''$	coefficient de frottement du fluide	fig. 52
$c_z$	coefficient de portance	(22)	$k$	coefficient de proportionnalité dans l'étude du frottement.	(122)
$c_x'$	coefficient de traînée de profil rapporté à la surface allaire S	(87)(88)	$K'$	coefficient de réduction du 3 <sup>e</sup> terme de la formule donnant $F(x)$	(213)
$c_x''$	coefficient de traînée due au maître-couple apparent rapporté à la surface allaire S	(89)(90)	$L$	longueur du navire; envergure de l'aile.	
$C$	coefficients de traînée rapportés à la section du maître-couple réel	(48)	$m$	inverse de l'allongement $\frac{\varepsilon}{a}$ .	
$C_1$	<i>idem</i> pour le maître-couple apparent	(48)	$m_1$	inverse de l'allongement apparent.	
$C_2$	coefficient de traînée global rapporté à la surface allaire S	(85)	$m$	périmètre de la section du canal	(121)
$C_a$	coefficient de traînée due au maître-couple	(93)	$M$	nombre = $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ suivant qu'il s'agit d'ailes à face ventrale courbe ou à face ventrale plane	(82)(83)
$c_a$	vitesse à l'atterrissage ou vitesse à l'entrée	(242)	$n$	pression effective	
$d$	diamètre de la sphère ou du cylindre; épaisseur au maître-couple	(111)	$P$	pression moyenne sur la face avant du cylindre.	
$d_1$	épaisseur du corps caréné dans la section faite aux points d'inflexion	fig. 6 fig. 15	$P_r$	<i>idem</i> sur la face avant de la sphère.	
$D$	largeur au maître-couple du navire à flancs plats	fig. 56	$P_a$	pression atmosphérique	
$e$	épaisseur totale du flux influencé	fig. 10	$P$	force de sustentation.	
$e_1$	épaisseur sur la face concave.	fig. 10	$Q', Q'', Q'''$	composantes de la force de sustentation.	
$e_2$	épaisseur sur la face convexe.	fig. 10	$(r)$	rapport	(203)
$e'$	épaisseur du flux rabattu à l'arrière	(188)	$r$	rayon.	
$E$	énergie mise en jeu par la vague	(168)	$r$	rapport $\frac{H}{d}$	(138)
$f$	flèche dans l'étude du carénage.		$R$	rayon extérieur	fig. 47
$F$	forces appliquées au corps subissant la déviation.		$R_e$	nombre de Reynolds	(123b)
$F_1$			$R_f$	coefficient de finesse	(255)
$F_2$			$S$	section du maître-couple dans l'étude du carénage.	
$g$	accélération due à la pesanteur.		$S$	surface allaire dans l'étude des ailes.	
$h$	épaisseur du maître-couple apparent, hauteur de la vague dynamique	(121)			
$h_1$	hauteur de charge de la vague statique.	(133)			
$H$	hauteur de la surface immergée	fig. 54			
$i$	angle d'incidence	fig. 64			
$J$	force de résistance tangentielle.	(121)			
$J_1$	jauge en m <sup>3</sup> .				
$J_1$	jauge en kg.				

Lettre	Désignation	Formule	Lettre	Désignation	Formule
$s$	longueur de l'arc parcouru	fig. 91	$\varepsilon$	rugosité de la surface.	
$T$	traînée.		$\varepsilon_1$	rugosité de la surface en fer prise comme terme de comparaison	(124)
$T''T'''T''''$	traînée partielles.		$\lambda$	coefficient de perte de charge.	(124)
$V$	volume déplacé.		$\mu$	coefficient de viscosité absolue dans le système CGS.	
$x$	rapport $\frac{b}{a}$ .		$\pi$	3,1416.	
$x'$	rapport $\frac{c}{u_1}$ (étude du ventilateur hélicoïde).		$\omega$	angle au centre	fig. 7
$y$	ordonnée définissant le flanc d'une carène	fig. 54	$\omega$	vitesse angulaire	(125)
$Z$	$C_l \times \frac{c^2}{gb}$ dans l'étude des carènes.		$\rho$	rayon de courbure.	
$\alpha$	angle de déviation.		$\rho_1$	rayon du cercle d'approche.	
$\alpha_1$	angle correspondant à l'angle d'approche	fig. 6	$\Omega$	surface latérale mouillée, d'un seul côté.	
$\beta, \beta_1, \beta_2$	angles définissant la courbure de l'aile	fig. 68	$\Omega_1$	surface limitée aux points d'inflexion, d'un seul côté.	
$\beta_2'$	$\beta_2' = \beta_2 - \delta$ .		$\theta$	angle complémentaire dans les angles définissant la forme de l'aile	fig. 68
$\gamma$	angle de nulle portance	fig. 17	$\mathfrak{E}$	travail dépensé par sec pour remorquer l'obstacle	(9)(173)
$\delta$	pois spécifique du fluide.		$\varphi$	angle de redressement	fig. 69
$\delta_a$	pois spécifique de l'air à l'entrée.		$\varphi$	angle de la direction de la portance avec le rayon d'entrée	fig. 72
$\delta$	angle définissant la forme arrière de l'aile.		$\Phi$	rapport $\frac{\beta_1 + \gamma}{\beta_1 + \beta_2'}$ .	
$\Delta$	accroissement du coefficient de résistance due à la vague d'accompagnement.		$\Phi_1$	0,75	(207)
$\varepsilon$	épaisseur de l'aile au maître-couple.		$\psi$	coefficients de perte employés dans la théorie des turbo-machines.	

N. B. — L'abondance des notations constitue évidemment une difficulté d'assimilation de la présente étude; mais il faut bien se rendre compte qu'il serait vain de chercher une relation capable de donner la portance et la traînée de l'aile, sans faire entrer dans cette relation, angles et rapports de dimensions qui caractérisent cette aile. Or rien qu'à cette fin, il a fallu réserver pour les angles,  $\beta_1, \beta_2, \theta$  et  $\delta$  (voir fig. 68) l'angle  $i$  d'attaque, l'angle  $\alpha$  de déviation et enfin l'angle  $\gamma$  qui fixe la direction de la corde par rapport à la direction du flux, dans la position de nulle portance.

- Pour apporter le maximum de clarté à ce sujet, nous avons utilisé :
- 1) la lettre  $c$  sans ou avec indice 1, 2, 3,  $a$ ,  $s$  pour désigner la vitesse absolue, ou les composantes de cette vitesse;
  - 2) la lettre  $c$  avec l'indice  $z$  pour désigner le coefficient de portance; avec l'indice  $x$  pour désigner le coefficient de traînée propre;
  - 3) la notation  $c_x'$  pour désigner le coefficient de traînée de profil rapporté à la surface allaire S;  $c_x''$  pour désigner le coefficient de traînée du maître-couple apparent;
  - 4) les lettres  $C$  sans et avec indices 1, 2,  $a$ , pour désigner les coefficients de traînée rapportés à la section du maître-couple;
  - 5) la lettre  $C_x$  pour désigner le coefficient de traînée total rapporté à la surface allaire;
  - 7) la lettre  $e$  sans et avec indice 1, 2, pour désigner l'épaisseur du flux influencé;
  - 8) la lettre  $k$  sans et avec indice pour désigner des rapports, d'une manière générale;
  - 9) la lettre  $2k_1''$  pour désigner le coefficient de frottement du fluide contre une paroi.

TABLE DES MATIÈRES

	Page
Avant-Propos . . . . .	1
PREMIÈRE PARTIE	
ÉTUDE DES PERTES DUES A LA DÉVIATION DANS LE DÉPLACEMENT DES CORPS SANS PORTANCE	
Chapitre I. — Flux d'épaisseur constante	
§ 1. — Plaque plane frappée perpendiculairement . . . . .	1
§ 2. — Dièdre frappé suivant la bissectrice . . . . .	2
§ 3. — Cas du cylindre . . . . .	3
§ 4. — Cas de la sphère . . . . .	4
§ 5. — Plaque plane frappée obliquement . . . . .	5
§ 6. — Conclusions . . . . .	7
Chapitre II. — Vérifications expérimentales des valeurs du coefficient C	
§ 1. — Cas du cylindre en régime turbulent . . . . .	7
§ 2. — Cas de la sphère en régime turbulent . . . . .	10
§ 3. — Cas du cylindre en régime laminaire . . . . .	11
§ 4. — Conclusions . . . . .	12
Chapitre III. — Etude du coefficient de résistance C pour les corps carénés	
§ 1. — Cas du cylindre . . . . .	12
§ 2. — Cas de la sphère . . . . .	14
Chapitre IV. — Etude du coefficient de résistance $C_a$ dû au maître-couple apparent	
§ 1. — Détermination de $\gamma/\beta$ . . . . .	14
§ 2. — Détermination de coefficient $C_a$ . . . . .	16
§ 3. — Vérification expérimentale . . . . .	17-23
Chapitre V. — Valeurs des coefficients $c_x'$ et $c_x''$	
§ 1. — Valeurs de $c_x'$ . . . . .	23
§ 2. — Valeurs de $c_x''$ . . . . .	23
§ 3. — Valeurs de $C_x$ (valeur totale) . . . . .	24
Remarque concernant le rôle de l'épaisseur du profil . . . . .	24-25
Chapitre VI. — Conclusions générales	
DEUXIÈME PARTIE	
COEFFICIENTS DE RÉSISTANCE ET DE PORTANCE AUX ENVIRONS DU MUR DU SON	
§ 1. — Influence de la compressibilité du flux sur la valeur fournie par la relation $p = \frac{\delta}{g} \frac{e}{\rho} c^2$ . . . . .	27
§ 2. — Calcul du rapport $\frac{c}{c_a} = \frac{\delta_a}{c}$ . . . . .	28
§ 3. — Valeur de ce rapport au-delà de la vitesse du son . . . . .	28

	Pages
§ 4. — Distribution des vitesses le long d'une plaque courbe . . . . .	29
§ 5. — Distribution des vitesses le long d'un profil . . . . .	30

TROISIÈME PARTIE

ÉTUDE DU COEFFICIENT DE FROTTEMENT  
UTILISÉ DANS LE CALCUL DES PERTES DE CHARGE  
ET DE LA RÉSISTANCE A L'AVANCEMENT DES CARÈNES

Introduction

§ 1. — Formule utilisée pour les tuyaux lisses et rugueux . . . . .	30
§ 2. — Formule utilisée pour les disques . . . . .	32
§ 3. — Formule utilisée pour les surfaces en translation . . . . .	33
§ 4. — Valeurs limites pour les deux cas $\lambda$ et $2k_1''$ . . . . .	34
§ 5. — Valeurs de $2k_1''$ pour les surfaces rugueuses . . . . .	35
§ 6. — Diagrammes comparés des valeurs de $\lambda$ et $2k_1''$ . . . . .	35
§ 7. — Influence de la rugosité sur le coefficient de résistance à l'avancement des carènes . . . . .	48
§ 8. — Conclusions . . . . .	49

QUATRIÈME PARTIE

ÉTUDE DU COEFFICIENT DE RÉSISTANCE A L'AVANCEMENT DES CARÈNES

Chapitre I. — Tracé rationnel de la coque

§ 1. — Section au maître-couple . . . . .	43
§ 2. — Valeurs caractéristiques pour $r = \frac{1}{2}$ . . . . .	45
§ 3. — Valeurs caractéristiques pour $r = \frac{1}{3}$ . . . . .	45
§ 4. — Tracé de la projection horizontale avec fond bombé . . . . .	45
§ 5. — Tracé de la projection horizontale avec fond plat . . . . .	46

Chapitre II. — Etudes des pertes par déviation et par frottement

§ 1. — Valeur du coefficient $C_1$ dû à la déviation . . . . .	47
§ 2. — Valeur du coefficient $C_2$ dû au frottement . . . . .	48
§ 3. — Valeur du coefficient de résistance totale $C_t$ . . . . .	48

Chapitre III. — Vérification expérimentale des valeurs de  $C_t$

§ 1. — Document expérimental donnant $C_t$ en service . . . . .	48
§ 2. — Conclusions . . . . .	50

Chapitre IV. — Etude des pertes complémentaires

§ 1. — Etablissement de la valeur du premier terme complémentaire . . . . .	52
§ 2. — Etude du mode de dissipation de l'énergie $\frac{1}{2g} c_1^2$ et de la formation de la vague d'accompagnement. Valeur du deuxième terme complémentaire . . . . .	53
§ 3. — Etude de l'effet d'interférence . . . . .	56
§ 4. — Recherche de la solution la plus favorable . . . . .	57
§ 5. — Conclusions . . . . .	59

CINQUIÈME PARTIE  
ÉTUDE DE LA SUSTENTATION

Chapitre I. — Expression de  $c_z$  pour les valeurs normales de  $c$

	Pages
§ 1. — Valeur du coefficient de portance $c_z$ . . . . .	61
§ 2. — Valeur du coefficient de portance $c_z$ pour le profil parabolique . . . . .	64
§ 3. — Vérification expérimentale de la valeur de $c_z$ . . . . .	65

Chapitre II. — Expression de  $c_x$  pour les valeurs normales de  $c$

§ 1. — Valeur du coefficient de résistance propre de l'aile $c_x$ . . . . .	67
§ 2. — Signification physique de $K'$ et détermination de sa valeur expérimentale. . . . .	68
§ 3. — Vérification expérimentale des valeurs de $c_x$ . . . . .	70

Chapitre III. — Au sujet du tracé des ailes

§ 1. — Influence de l'envergure . . . . .	71
§ 2. — Rôle de l'épaisseur $\varepsilon$ et partant de l'allongement $\frac{l}{m}$ pour les vitesses normales . . . . .	72
§ 3. — Angle de vol le plus favorable. Rôle de la courbure . . . . .	73
§ 4. — Détermination du centre de poussée . . . . .	74
§ 5. — Coefficient de finesse . . . . .	74

SIXIÈME PARTIE

ÉTUDE DES VALEURS DE  $c_z$ ,  $c_x$ ,  $c_x'$  ET  $c_x''$  AUX ENVIRONS DU MUR DU SON

§ 1. — Rappel des notions essentielles . . . . .	76
§ 2. — Valeurs de $c_z$ et de $c_x$ . . . . .	76
§ 3. — Valeurs de $c_x'$ . . . . .	78
§ 4. — Forme de l'aile . . . . .	79
§ 5. — Forme de la coque . . . . .	79

SEPTIÈME PARTIE

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Chapitre I. — Pour ce qui touche à la méthode

§ 1. — Deux questions préalables . . . . .	81
§ 2. — Deux idées indéfendables . . . . .	82

Chapitre II. — Le bilan

§ 1. — En ce qui concerne l'aile . . . . .	83
§ 2. — En ce qui concerne la coque . . . . .	84
§ 3. — En ce qui concerne le mur du son . . . . .	85
§ 4. — En ce qui concerne l'application aux turbo-machines . . . . .	86

Chapitre III. — Pour ce qui touche au principe de base

