

Journal de mathématiques
pures et appliquées : ou
recueil mensuel de mémoires
sur les diverses parties des
mathématiques [...]

Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques / publié par Joseph Liouville. 1843.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'œuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisationcommerciale@bnf.fr.

NOTE

SUR UNE FORMULE RELATIVE AUX INTÉGRALES MULTIPLES;

PAR E. CATALAN [*].

Cette Note a pour but la détermination de l'intégrale d'ordre n ,

$$(1) \quad A = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \dots \varphi_n(x_n) f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Considérons d'abord, pour plus de simplicité, l'intégrale double

$$(2) \quad B = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) f(x_1 + x_2) dx_1 dx_2.$$

Afin de pouvoir séparer les variables, j'emploie la formule de Fourier :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha u - \alpha x) f(u) du.$$

Elle donne, en remplaçant x par $x_1 + x_2$,

$$B = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) dx_1 dx_2 \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha u - \alpha x_1 - \alpha x_2) f(u) du.$$

En vertu des relations qui existent entre les lignes trigonométriques et les exponentielles imaginaires, le second membre sera égal à la partie réelle de

$$C = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) dx_1 dx_2 \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha u - \alpha x_1 - \alpha x_2) \sqrt{-1}} f(u) du.$$

[*] Ayant cherché à démontrer le théorème de M. *Tchebichef*, je suis arrivé à la formule (7), laquelle ne diffère de celle de ce géomètre que par la manière dont elle est écrite.

Changeant l'ordre des intégrations, nous aurons

$$(3) \quad G = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du \int_0^{\infty} e^{zu\sqrt{-1}} d\alpha \int_0^{\infty} \varphi_1(x_1) e^{-\alpha x_1 \sqrt{-1}} dx_1 \int_0^{\infty} \varphi_2(x_2) e^{-\alpha x_2 \sqrt{-1}} dx_2.$$

Posons

$$(4) \quad \psi_1(\alpha) = \int_0^{\infty} \varphi_1(x_1) e^{-\alpha x_1 \sqrt{-1}} dx_1, \quad \psi_2(\alpha) = \int_0^{\infty} \varphi_2(x_2) e^{-\alpha x_2 \sqrt{-1}} dx_2,$$

$$(5) \quad F(u) = \int_0^{\infty} e^{\alpha u \sqrt{-1}} \psi_1(\alpha) \psi_2(\alpha) d\alpha,$$

d'où

$$(6) \quad G = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) F(u) du;$$

et la partie réelle de cette dernière intégrale sera la valeur de B.

La méthode que nous venons d'employer est évidemment générale; donc, pour trouver l'intégrale (1), nous ferons

$$\psi_1(\alpha) = \int_0^{\infty} \varphi_1(x_1) e^{-\alpha x_1 \sqrt{-1}} dx_1,$$

$$\psi_2(\alpha) = \int_0^{\infty} \varphi_2(x_2) e^{-\alpha x_2 \sqrt{-1}} dx_2,$$

.....

$$\psi_n(\alpha) = \int_0^{\infty} \varphi_n(x_n) e^{-\alpha x_n \sqrt{-1}} dx_n.$$

$$F(u) = \int_0^{\infty} e^{\alpha u \sqrt{-1}} \psi_1(\alpha) \psi_2(\alpha) \dots \psi_n(\alpha) d\alpha;$$

et nous aurons

$$(7) \quad A = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) F(u) du.$$

pourvu que, dans cette dernière intégrale, nous négligions la partie imaginaire.

