Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques [...]

NOTE

SUR UNE FORMULE RELATIVE AUX INTÉGRALES MULTIPLES;

Par E. CATALAN [*].

Cette Note a pour but la détermination de l'intégrale d'ordre n,

$$(1)\quad A = \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\ldots\varphi_n(x_n) f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Considérons d'abord, pour plus de simplicité, l'intégrale double

$$(2)\qquad B = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) f(x_1 + x_2)\, dx_1\, dx_2.$$

Afin de pouvoir séparer les variables, j'emploie la formule de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha u - \alpha x) f(u)\, du.$$

Elle donne, en remplaçant x par $x_1 + x_2$,

$$B = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\, dx_1\, dx_2 \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha u - \alpha x_1 - \alpha x_2) f(u)\, du.$$

En vertu des relations qui existent entre les lignes trigonométriques et les exponentielles imaginaires, le second membre sera égal à la partie réelle de

$$C = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\, dx_1\, dx_2 \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha u - \alpha x_1 - \alpha x_2)\sqrt{-1}} f(u)\, du.$$

[*] Ayant cherché à démontrer le théorème de M. *Tchebichef*, je suis arrivé à la formule (7), laquelle ne diffère de celle de ce géomètre que par la manière dont elle est écrite.

Changeant l'ordre des intégrations, nous aurons

$$(3)\quad C = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du \int_0^\infty e^{\alpha u\sqrt{-1}}\,d\alpha \int_0^\infty \varphi_1(x_1)\,e^{-\alpha x_1\sqrt{-1}}\,dx_1 \int_0^\infty \varphi_2(x_2)\,e^{-\alpha x_2\sqrt{-1}}\,dx_2.$$

Posons

$$(4)\quad \psi_1(\alpha) = \int_0^\infty \varphi_1(x_1)\,e^{-\alpha x_1\sqrt{-1}}\,dx_1, \quad \psi_2(\alpha) = \int_0^\infty \varphi_2(x_2)\,e^{-\alpha x_2\sqrt{-1}}\,dx_2,$$

$$(5)\quad F(u) = \int_0^\infty e^{\alpha u\sqrt{-1}}\,\psi_1(\alpha)\,\psi_2(\alpha)\,d\alpha,$$

d'où

$$(6)\quad C = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,F(u)\,du;$$

et la partie réelle de cette dernière intégrale sera la valeur de B.

La méthode que nous venons d'employer est évidemment générale; donc, pour trouver l'intégrale (1), nous ferons

$$\psi_1(\alpha) = \int_0^\infty \varphi_1(x_1)\,e^{-\alpha x_1\sqrt{-1}}\,dx_1,$$

$$\psi_2(\alpha) = \int_0^\infty \varphi_2(x_2)\,e^{-\alpha x_2\sqrt{-1}}\,dx_2,$$

. . . .

$$\psi_n(\alpha) = \int_0^\infty \varphi_n(x_n)\,e^{-\alpha x_n\sqrt{-1}}\,dx_n.$$

$$F(u) = \int_0^\infty e^{\alpha u\sqrt{-1}}\,\psi_1(\alpha)\,\psi_2(\alpha)\ldots\psi_n(\alpha)\,d\alpha;$$

et nous aurons

$$(7)\quad A = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,F(u)\,du,$$

pourvu que, dans cette dernière intégrale, nous négligions la partie imaginaire.