Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques [...]

NOTE

SUR UNE FORMULE DE COMBINAISONS;

PAR E. CATALAN.

Ayant remarqué, dans l'un des derniers numéros de ce Journal (page 169), l'énoncé d'un intéressant problème de probabilités, je cherchai à comprendre les calculs de l'auteur, et à refaire ces calculs. Mais je m'aperçus bientôt qu'il s'y est glissé des erreurs, lesquelles, en s'accumulant, rendent fausse la formule principale. Comme il ne m'a pas été possible de saisir parfaitement la marche suivie par l'auteur, j'ai cherché à remplacer sa formule par une autre [*].

Rappelons d'abord deux formules fréquemment employées dans la théorie des combinaisons.

1. En représentant par $C_{m,p}$ le nombre des combinaisons de m lettres, prises p à p, la formule du binôme donne

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + C_{m,i}\,x^i + \ldots,$$

$$(1+x)^{m'} = 1 + \frac{m'}{1}x + \frac{m'(m'-1)}{1.2}x^2 + \ldots + C_{m',i'}\,x^{i'} + \ldots$$

Si l'on multiplie les deux développements, et que l'on ordonne le résultat par rapport à x, le terme contenant x^p, dans $(1+x)^{m+m'}$, sera égal à la somme des produits deux à deux des termes tels que $C_{m,i}\,x^i$, $C_{m',i'}\,x^{i'}$, dans lesquels la somme $i+i'$ des exposants est égale à p. Donc

$$C_{m+m',p} = \sum C_{m,i} \times C_{m',i'},$$

[*] Ma Note a été lue à la Société Philomatique au mois de juillet dernier. Depuis, et sans qu'il ait eu connaissance de cette lecture, M. le capitaine Coste a rectifié les erreurs dont je parle ci-dessus.

ou

(1) $$C_{m+m',p} = \sum_0^p C_{m,i} \times C_{m',p-i}.$$

Cette formule suppose $p < m$, $p < m'$.

2. La formule du binôme donne aussi

$$\frac{1}{(1-x)^m} = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + C_{m+i-1,i}\,x^i + \ldots,$$
$$\frac{1}{(1-x)^{m'}} = 1 + \frac{m'}{1}x + \frac{m'(m'+1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + C_{m'+i'-1,i'}\,x^{i'} + \ldots$$

On aura donc, en faisant le produit, et en supposant $i+i'=p$,

(2) $$C_{m+m'+p-1,p} = \sum_0^p C_{m+i-1,m-1} \times C_{m'+p-i-1,m'-1}.$$

3. En prenant successivement $m' = 1, 2, 3, \ldots$, on obtient, à l'aide de cette dernière formule, celles qui suivent :

(3) $$\left\{\begin{aligned} C_{m+p,p} &= \sum_0^p C_{m+i-1,m-1}, \\ C_{m+p+1,p} &= \sum_0^p C_{m+i-1,m-1} \times C_{p-i+1,1}; \\ C_{m+p+2,p} &= \sum_0^p C_{m+i-1,m-1} \times C_{p-i+2,2}; \\ C_{m+p+3,p} &= \sum_0^p C_{m+i-1,m-1} \times C_{p-i+3,3}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

4. Proposons-nous actuellement de transformer la quantité

$$A = C_{m,m-p} \times C_{m'+1,p'} + C_{m-1,m-p} \times C_{m'+2,p'} + \ldots + C_{m-p,m-p} \times C_{m'+p+1,p'},$$

ou

(4) $$A = \sum_0^p C_{m-i,m-p} \times C_{m'+i+1,p'}.$$

Pour comprendre le but de la transformation cherchée, il faut supposer que m, m' et p soient de grands nombres, et que p' soit un petit nombre. Il est bien évident que le calcul numérique de A serait impraticable; or nous voulons remplacer cette quantité par une autre équivalente, mais composée de $p'+1$ termes seulement.

A l'aide des formules (3), le facteur $C_{m+i+1,p'}$ peut se transformer en une somme. Supposons successivement $i=0, 1, 2, \ldots, p$; nous aurons

$$\begin{aligned}
C_{m'+1,p'} &= \sum_0^{p'} C_{m'-l,\,m'-p'},\\
C_{m'+2,p'} &= \sum_0^{p'} C_{m'-l,\,m'-p'} \times C_{l+1,\,1},\\
C_{m'+3,p'} &= \sum_0^{p'} C_{m'-l,\,m'-p'} \times C_{l+2,\,2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_{m'+p+1,p'} &= \sum_0^{p'} C_{m'-l,\,m'-p'} \times C_{l+p,\,p}.
\end{aligned}$$

Substituons ces valeurs dans la formule (4); elle deviendra

$$\begin{aligned}
A = C_{m,\,m-p} \sum_0^{p'} C_{m'-l,\,m'-p'} + C_{m-1,\,m-p} \sum_0^{p'} C_{m'-l,\,m'-p'} \times C_{l+1,\,1} + \ldots\\
+ C_{m-p,\,m-p} \sum_0^{p'} C_{m'-l,\,m'-p'} \times C_{l+p,\,p}.
\end{aligned}$$

Avec un peu d'attention, on verra que cette quantité peut se mettre sous la forme

$$A = \sum_0^{p'} \left(C_{m,m-p} + C_{m-1,\,m-p} \times C_{l+1,\,1} + \ldots + C_{m-p,\,m-p} \times C_{l+p,\,p}\right) C_{m'-l,\,m'-p'}.$$

D'après l'équation (2), la quantité entre parenthèses équivaut à $C_{m+l+1,\,p}$. Donc

$$A = \sum_0^{p'} C_{m'-i,\,m'-p'} \times C_{m+i+1,\,p}. \tag{5}$$

Telle est la formule à laquelle nous voulions arriver.

5. En rapprochant les valeurs (4) et (5), on a cette équation très-symétrique,

$$\sum_0^{p} C_{m-i,\,m-p} \times C_{m'+i+1,\,p'} = \sum_0^{p'} C_{m'-i,\,m'-p'} \times C_{m+i+1,\,p}. \tag{6}$$

6. Comme application et vérification, prenons $m=10$, $p=7$, $m'=10$, $p'=4$; nous devrons avoir

$$\sum_0^{7} C_{10-i,\,3} \times C_{11+i,\,4} = \sum_0^{4} C_{10-i,\,6} \times C_{11+i,\,7}.$$

Le premier membre, étant développé, devient

$$\frac{10.9.8}{1.2.3}.\frac{11.10.9.8}{1.2.3.4}+\frac{9.8.7}{1.2.3}.\frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}+\frac{8.7.6}{1.2.3}\frac{13.12.11.10}{1.2.3.4}$$
$$+\frac{7.6.5}{1.2.3}.\frac{14.13.12.11}{1.2.3.4}+\frac{6.5.4}{1.2.3}.\frac{15.14.13.12}{1.2.3.4}+\frac{5.4.3}{1.2.3}.\frac{16.15.14.13}{1.2.3.4}$$
$$+\frac{4.3.2}{1.2.3}.\frac{17.16.15.14}{1.2.3.4}+\frac{18.17.16.15}{1.2.3.4}=120.330+84.495$$
$$+56.715+35.1001+20.1365+10.1820+4.2380+3060$$
$$=39600+41580+40040+35035+27300+18200$$
$$+9520+3060=214\,335.$$

Le second membre a pour valeur

$$\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}.\frac{11.10.9.8}{1.2.3.4}+\frac{9.8.7}{1.2.3}.\frac{12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5}+\frac{8.7}{1.2}.\frac{13.12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5.6}$$
$$+7.\frac{14.13.12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5.6.7}+\frac{15.14.13.12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5.6.7.8}=210.330$$
$$+84.792+28.1716+7.3432+6435=69300+66528$$
$$+48048+24024+6435=214335\;[*].$$

7. La formule (6) démontre une propriété remarquable des puissances négatives entières d'un binôme $(1-x)$.

Remplaçons $m-p+1$ par q, et $m'-p'+1$ par q'. Cette formule pourra d'abord être mise sous la forme

$$\sum\nolimits_0^p \mathrm{C}_{p+q-1+i,\,p-i}\times \mathrm{C}_{p'+q'+i,\,q'+i}=\sum\nolimits_0^{p'} \mathrm{C}_{p'+q'-1-i,\,p'-i}\times \mathrm{C}_{p+q+i,\,q+i}.$$

[*] La formule citée au commencement de cette Note donnerait, au lieu du second membre que nous venons de calculer, la quantité

$$\frac{11.10.9.8}{1.2.3.4}\left[\frac{8.9.10.11}{1.2.3.4}+\frac{12}{5}.\frac{8.9.10}{1.2.3}+\frac{12.13}{5.6}.\frac{8.9}{1.2}+\frac{12.13.14}{5.6.7}8+\frac{12.13.14.15}{5.6.7.8}\right]$$
$$=330\left[330+288+\frac{936}{5}+\frac{416}{5}+\frac{39}{2}\right]=330\,.\,618+66\,.\,1352+165\,.\,39$$
$$=103\,940+89232+6435=199607.$$

Posons ensuite

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^q} &= 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p + \ldots, \\
\frac{1}{(1-x)^{p'+1}} &= 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{q'} x^{q'} + \ldots, \\
\frac{1}{(1-x)^{q'}} &= 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{p'} x^{p'} + \ldots, \\
\frac{1}{(1-x)^{p'+1}} &= 1 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots + d_q x^2 + \ldots.
\end{aligned}$$

Nous aurons, au moyen de l'équation ci-dessus,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
& a_p b_{q'} + a_{p-1} b_{q'+1} + \ldots + a_1 b_{p+q'-1} + b_{p+q'} = c_{p'} d_q + c_{p'-1} d_{q+1} + \ldots \\
& \qquad + c_1 d_{p'+q-1} + d_{p'+q}.
\end{aligned}\right.$$

Cette équation exprime la propriété annoncée.

8. Afin d'arriver à un résultat symétrique, nous avons transformé le facteur $C_{m'+i+1,p'}$ de la formule (4). Or, comme ce facteur peut, de différentes manières, être égalé à une somme de produits, la formule (6) peut également être remplacée par d'autres formules que nous n'indiquerons pas ici, parce qu'elles sont plus compliquées que cette dernière.