# Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

blait animée d'un mouvement propre, en sens inverse du mouvement diurne. Cette apparition pourrait être ce que M. Philippe Breton a appelé la *fausse comète* des essaims d'étoiles filantes. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Note sur les nombres de Bernoulli;* par M. E. CATALAN.

I. — La relation fondamentale, donnée par Moivre, est

$$(A)\quad \frac{2q+1}{1}B_{2q-1}+\frac{(2q+1)2q(2q-1)}{1.2.3}B_{2q-3}+\ldots+\frac{(2q+1)2q}{1.2}B_1=\frac{2q-1}{2}\ (^*).$$

D'autre part, la formule de Cauchy

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{B_1}{1.2}x^2+\frac{B_3}{1.2.3.4}x^4+\ldots+\frac{B_{2q-1}}{1.2\ldots 2q}x^{2q}+\theta\,\frac{B_{2q+1}}{1.2\ldots(2q+2)}x^{2q+2}$$

donne, comme l'on sait,

$$(B)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{(2q+2)(2q+1)}{1.2}B_{2q-1}\\&+\frac{(2q+2)(2q+1)2q(2q-1)}{1.2.3.4}B_{2q-3}+\ldots+\frac{(2q+2)(2q+1)}{1.2}B_1=q.\end{aligned}\right.$$

Des égalités (A), (B) on conclut par soustraction

$$(C)\quad \frac{2q+1}{1}B_1+\frac{(2q+1)2q(2q-1)}{1.2.3}B_3+\ldots+\frac{(2q+1)2q}{1.2}B_{2q-1}=\frac{1}{2}.$$

Cette relation, que je crois nouvelle, paraît remarquable, surtout si on la compare à celle de Moivre.

» II. — On a

$$B_{2q-1}=\pm 4q\int_0^\infty \frac{t^{2q-1}\,dt}{e^{2\pi t}-1}\ (^{**});$$

(*) LACROIX, t. III, p. 84.

(**) Dans cette formule et dans toutes celles qui vont suivre, les signes supérieurs répondent au cas de *q impair.*

donc, par la substitution dans (C),

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\left[\frac{2q+1}{1} - \frac{(2q+1)2q(2q-1)}{1.2.3}2t^3\right.\\ &\qquad\left. + \frac{(2q+1)\ldots(2q-3)}{1\ldots5}3t^5 \pm \frac{(2q+1)2q}{1.2}qt^{2q-1}\right] = \frac{1}{8}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait $t^2 = x$, cette équation devient

$$(2)\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{e^{2\pi\sqrt{x}}-1}\mathrm{P} = \frac{1}{4};$$

pourvu que l'on suppose

$$(3)\qquad \mathrm{P} = \mathrm{C}_{2q+1,1} - \mathrm{C}_{2q+1,3}\,2x + \mathrm{C}_{2q+1,5}\,3x^2 - \ldots \pm \mathrm{C}_{2q+1,2}\,qx^{q-1}$$

on trouvé aisément

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathrm{P} = {}&\frac{(1+\sqrt{x}\sqrt{-1})^{2q+1} - (1-\sqrt{x}\sqrt{-1})^{2q+1}}{4\sqrt{x}\sqrt{-1}}\\ &+ (2q+1)\frac{(1+\sqrt{x}\sqrt{-1})^{2q} + (1-\sqrt{x}\sqrt{-1})^{2q}}{4} \pm (q+1)x^q.\end{aligned}\right.$$

» III. — Soit maintenant

$$x = \operatorname{tang}^2\theta;$$

d'où

$$dx = 2\operatorname{tang}\theta\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}.$$

Le polynôme devient

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}\frac{\sin(2q+1)\theta}{\cos^{2q+1}\theta\operatorname{tang}\theta} + \frac{1}{2}(2q+1)\frac{\cos 2q\theta}{\cos^{2q}\theta} \pm (q+1)\operatorname{tang}^{2q}\theta;$$

et la formule (1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(e^{2\pi\operatorname{tang}\theta}-1)\cos^{2q+2}\theta}\left[\sin(2q+1)\theta + (2q+1)\sin\theta\cos 2q\theta \pm 2(q+1)\sin^{2q+1}\theta\right] = \frac{1}{4}$$

ou, par le changement de $\theta$ en $\frac{\pi}{2} - \varphi$,

$$(\mathrm{D})\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(e^{2\pi\cot\varphi}-1)\sin^{2q+2}\varphi}\left[2(q+1)\cos\varphi\cos 2q\varphi - \sin\varphi\sin 2q\varphi - 2(q+1)\cos^{2q+1}\varphi\right] = \mp\frac{1}{4}.$$

» IV. — J'ai trouvé, autrefois, la formule

$$(\mathrm{E})\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2q\varphi\, d\varphi}{(e^{2\pi\cot\varphi}-1)\sin^{2q+2}\varphi} = \pm \frac{2q-1}{4(2q+1)}\ (^*).$$

» Par son moyen, la relation (D) se réduit à

$$(\mathrm{F})\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(e^{2\pi\cot\varphi}-1)\sin^{2q+3}\varphi}(\cos\varphi\cos 2q\varphi - \cos^{2q+1}\varphi) = \mp \frac{1}{4(q+1)(2q+1)},$$

formule remarquable.

» V. — Si on la combine avec (E), on obtient ce résultat encore plus simple

$$(\mathrm{G})\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(e^{2\pi\cot\varphi}-1)\sin^{2q+3}\varphi}[\cos(2q+1)\varphi - \cos^{2q+1}]\varphi = \mp \frac{q}{4(q+1)}.$$

» VI. — Enfin de (G) on conclut aisément

$$(\mathrm{H})\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2q-1)\varphi\, d\varphi}{(e^{2\pi\cot\varphi}-1)\sin^{2q+1}\varphi} = \pm \frac{(q-1)+B_{2q}}{4q}. \text{ »}$$

EMBRYOGÉNIE. — *Des formes larvaires des Bryozoaires.* Note de M. J. BARROIS, présentée par M. Milne Edwards.

« Au type représenté par l'*Alcyonidium* se rattache une nombreuse série dont l'ensemble constitue notre *première forme larvaire*. Chez tous les représentants de deux grandes divisions de Bryozoaires, les *Chilostomes* et les *Cténostomes* (*Alcyonidiens* et *Vésiculaires*), le développement présente, comme chez l'*Alcyonidium*, trois phases principales : 1° segmentation jusqu'au stade trente-deux ; 2° formation de la *gastrula*, et production du *stade en forme de cloche;* 3° différenciation histologique et achèvement des organes.

» Les deux premières phases sont partout identiques, et, toujours, le stade en forme de cloche est reproduit avec la même régularité. La troisième phase peut, au contraire, différer suivant les genres et selon l'importance plus ou moins grande des changements qui s'y produisent; on passe par tous les états de transition, depuis les formes les plus simples, re-

(*) *Mélanges mathématiques*, p. 125.