

Comptes rendus
hebdomadaires des séances
de l'Académie des sciences /
publiés... par MM. les
secrétaires perpétuels

Académie des sciences (France). Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels. 1835-1965.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisationcommerciale@bnf.fr.

blait animée d'un mouvement propre, en sens inverse du mouvement diurne. Cette apparition pourrait être ce que M. Philippe Breton a appelé la *fausse comète* des essaims d'étoiles filantes. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Note sur les nombres de Bernoulli;*
par M. E. CATALAN.

I. — La relation fondamentale, donnée par Moivre, est

$$(A) \quad \frac{2q+1}{1} B_{2q-1} + \frac{(2q+1)2q(2q-1)}{1.2.3} B_{2q-3} + \dots + \frac{(2q+1)2q}{1.2} B_1 = \frac{2q-1}{2} \quad (*)$$

D'autre part, la formule de Cauchy

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1}{1.2} x^2 + \frac{B_3}{1.2.3.4} x^4 + \dots \\ + \frac{B_{2q-1}}{1.2\dots 2q} x^{2q} + \theta \frac{B_{2q+1}}{1.2\dots (2q+2)} x^{2q+2}$$

donne, comme l'on sait,

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(2q+2)(2q+1)}{1.2} B_{2q-1} \\ + \frac{(2q+2)(2q+1)2q(2q-1)}{1.2.3.4} B_{2q-3} + \dots + \frac{(2q+2)(2q+1)}{1.2} B_1 = q. \end{array} \right.$$

Des égalités (A), (B) on conclut par soustraction

$$(C) \quad \frac{2q+1}{1} B_1 + \frac{(2q+1)2q(2q-1)}{1.2.3} B_3 + \dots + \frac{(2q+1)2q}{1.2} B_{2q-1} = \frac{1}{2}.$$

Cette relation, que je crois nouvelle, paraît remarquable, surtout si on la compare à celle de Moivre.

» II. — On a

$$B_{2q-1} = \pm 4q \int_0^\infty \frac{t^{2q-1} dt}{e^{2t}-1} (**);$$

(*) LACROIX, t. III, p. 84.

(**) Dans cette formule et dans toutes celles qui vont suivre, les signes supérieurs répondent au cas de *q* impair.

donc, par la substitution dans (C),

$$(1) \quad \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2qt}-1} \left[\frac{2q+1}{1} - \frac{(2q+1)2q(2q-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2t^3 + \frac{(2q+1)\dots(2q-3)}{1 \dots 5} 3t^5 \pm \frac{(2q+1)2q}{1 \cdot 2} qi^{2q-1} \right] \right. = \frac{1}{8}.$$

Si l'on fait $t^2 = x$, cette équation devient

$$(2) \quad \int_0^\infty \frac{dx}{e^{2q\sqrt{x}}-1} P = \frac{1}{4};$$

pourvu que l'on suppose

$$(3) \quad P = C_{2q+1,1} - C_{2q+1,3} 2x + C_{2q+1,5} 3x^2 - \dots \pm C_{2q+1,2} qx^{q-1}$$

on trouve aisément

$$(4) \quad \left\{ P = \frac{(1 + \sqrt{x}\sqrt{-1})^{2q+1} - (1 - \sqrt{x}\sqrt{-1})^{2q+1}}{4\sqrt{x}\sqrt{-1}} + (2q+1) \frac{(1 + \sqrt{x}\sqrt{-1})^{2q} + (1 - \sqrt{x}\sqrt{-1})^{2q}}{4} \pm (q+1)x^q. \right.$$

» III. — Soit maintenant

$$x = \text{tang}^2 \theta;$$

d'où

$$dx = 2 \text{tang} \theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}.$$

Le polynôme devient

$$P = \frac{1}{2} \frac{\sin(2q+1)\theta}{\cos^{2q+1}\theta \text{tang} \theta} + \frac{1}{2} (2q+1) \frac{\cos 2q\theta}{\cos^{2q}\theta} \pm (q+1) \text{tang}^{2q}\theta;$$

et la formule (1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(e^{2q \text{tang} \theta} - 1) \cos^{2q+1}\theta} [\sin(2q+1)\theta + (2q+1) \sin \theta \cos 2q\theta \pm 2(q+1) \sin^{2q+1}\theta] = \frac{1}{4}$$

ou, par le changement de θ en $\frac{\pi}{2} - \varphi$,

$$(D) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(e^{2q \text{cot} \varphi} - 1) \sin^{2q+1}\varphi} [2(q+1) \cos \varphi \cos 2q\varphi - \sin \varphi \sin 2q\varphi - 2(q+1) \cos^{2q+1}\varphi] = \mp \frac{1}{4}.$$

» IV. — J'ai trouvé, autrefois, la formule

$$(E) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2q\varphi d\varphi}{(e^{2\pi \cot \varphi} - 1) \sin^{2q+2} \varphi} = \pm \frac{2q-1}{4(2q+1)} (*)$$

» Par son moyen, la relation (D) se réduit à

$$(F) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(e^{2\pi \cot \varphi} - 1) \sin^{2q+2} \varphi} (\cos \varphi \cos 2q\varphi - \cos^{2q+1} \varphi) = \mp \frac{1}{4(q+1)(2q+1)},$$

formule remarquable.

» V. — Si on la combine avec (E), on obtient ce résultat encore plus simple

$$(G) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(e^{2\pi \cot \varphi} - 1) \sin^{2q+2} \varphi} [\cos(2q+1)\varphi - \cos^{2q+1} \varphi] \varphi = \mp \frac{q}{4(q+1)}$$

» VI. — Enfin de (G) on conclut aisément

$$(H) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2q-1)\varphi d\varphi}{(e^{2\pi \cot \varphi} - 1) \sin^{2q+1} \varphi} = \pm \frac{(q-1) + B_{2q-1}}{4q} \quad »$$

EMBRYOGÉNIE. — *Des formes larvaires des Bryozoaires.* Note de
M. J. BARROIS, présentée par M. Milne Edwards.

« Au type représenté par l'*Alcyonidium* se rattache une nombreuse série dont l'ensemble constitue notre première forme larvaire. Chez tous les représentants de deux grandes divisions de Bryozoaires, les *Chilostomes* et les *Cténostomes* (*Alcyonidiens* et *Vésiculaires*), le développement présente, comme chez l'*Alcyonidium*, trois phases principales : 1° segmentation jusqu'au stade trente-deux ; 2° formation de la *gastrula*, et production du stade en forme de cloche ; 3° différenciation histologique et achèvement des organes.

» Les deux premières phases sont partout identiques, et, toujours, le stade en forme de cloche est reproduit avec la même régularité. La troisième phase peut, au contraire, différer suivant les genres et selon l'importance plus ou moins grande des changements qui s'y produisent ; on passe par tous les états de transition, depuis les formes les plus simples, re-

(*) *Mélanges mathématiques*, p. 125.