Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

sairement à celle de la lithine, comme auraient pu le faire croire les analyses des minéraux et des eaux dans lesquels M. Bunsen a découvert ce métal. Je dois ajouter qu'un certain nombre de végétaux dont j'ai analysé les cendres ne paraissent pas contenir de rubidium, bien que plusieurs d'entre eux soient riches en potasse. Je citerai notamment, comme se trouvant dans ce cas, le colza, le cacao, la canne à sucre et quelques espèces de fucus.

» La dissémination du nouveau métal alcalin étant mise hors de doute par les recherches que je viens de résumer, il y a un intérêt évident à étudier à ce point de vue spécial les sols dans lesquels croissent les végétaux dont je viens de parler. J'ai entrepris dans ce but des expériences et des analyses que je poursuis aussi activement que le permet la nature de ces études, par elle-mêmes longues et délicates. Je ne me décide à soumettre à l'Académie les résultats incomplets dont je viens d'avoir l'honneur de l'entretenir, que pour me réserver la possibilité de continuer librement des travaux qui exigent beaucoup de temps et présentent des difficultés réelles. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les Nombres de Bernoulli, et sur quelques formules qui en dépendent; par* **M. E. Catalan.**

(Commissaires précédemment nommés : MM. Bertrand, Serret.)

« VIII. *Développement de* $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. — L'identité

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\operatorname{tang}x+\frac{1}{\cos x}$$

donne, au moyen des formules (F), (K), et en mettant pour les coefficients A leurs valeurs :

$$(\mathrm{L})\quad\left\{\begin{aligned}&\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=1+x+\frac{1}{1.2}x^2+\frac{1}{1.3}x^3+\frac{5}{1.2.3.4}x^4\\&+\frac{4}{1.2.1.3.5}x^5+\frac{61}{1.2.3.4.5.6}x^6+\frac{34}{1.2.3.1.3.5.7}x^7\\&+\frac{1385}{1.2.3\ldots8}x^8+\frac{496}{1.2.3.4.1.3.5.7.9}x^9+\ldots\end{aligned}\right.$$

» IX. *Développement de* $\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. — De

$$\int_0^x\frac{dx}{\cos x}=\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

on conclut

$$\text{(M)}\ \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=x+\frac{1}{1.2.3}x^3+\frac{5}{1.2.3.4.5}x^5+\frac{61}{1.2\ldots7}x^7+\frac{1385}{1.2.3\ldots9}x^9+\ldots$$

» X. *Relation nouvelle entre les Nombres de Bernoulli.* — On a, identiquement,

$$x\cot x.\sin x = x\cos x;$$

donc, à cause de la formule (D) et des équations (C),

$$4^n\frac{B_{2n-1}}{1.2\ldots(2n)}+4^{n-1}\frac{1}{1.2.3}\frac{B_{2n-3}}{1.2\ldots(2n-2)}+\ldots+4\frac{1}{1.2\ldots(2n-1)}\frac{B_1}{1.2}=\frac{2n}{1.2.3\ldots(2n+1)},$$

ou

$$\text{(N)}\quad 4^n\frac{(2n+1)}{1}B_{2n-1}+4^{n-1}\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{1.2.3}B_{2n-3}+\ldots+4\frac{(2n+1)2n}{1.2}B_1=2n.$$

Cette relation générale diffère de celles qui sont indiquées dans Lacroix (*). Si l'on suppose $B_{2n-1}=\frac{B'_{2n-1}}{2^{2n-1}}$, on obtient, au lieu de l'équation (N),

$$\text{(N')}\quad B'_{2n-1}+\frac{2n(2n-1)}{2.3}B'_{2n-3}+\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{2.3.4.5}B'_{2n-5}+\ldots+\frac{2n}{2}B'_1=\frac{n}{2n+1}.$$

» Celle-ci serait précisément la relation connue entre les Nombres de Bernoulli, si l'on supprimait les accents, et si l'on écrivait, au lieu du second membre, $\frac{2n-1}{2(2n+1)}$.

» XI. *Détermination d'une intégrale définie.* — Dans les *Mémoires de l'Académie de Turin* (année 1820), M. Plana démontre la formule

$$B_{2n-1}=\pm 4n\int_0^\infty\frac{t^{2n-1}\,dt}{e^{2\pi t}-1}.$$

Il en résulte, à cause de la relation générale dont il vient d'être question,

$$\int_0^\infty\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\left[\frac{2n}{1}t^{2n-1}-\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}t^{2n-3}+\ldots\pm\frac{2n}{1}t\right]=\pm\frac{2n-1}{4(2n+1)}.$$

(*) Tome III, page 84 (1819). Celles-ci renferment une faute de signe : au lieu de $\left(+\frac{1}{2}\right)$, on doit lire partout $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

La quantité entre parenthèses est égale à $\frac{(t+\sqrt{-1})^{2n}-(t-\sqrt{-1})^{2n}}{2\sqrt{-1}}$. Si l'on suppose $t=\cot\alpha$, on arrive à la formule

$$\text{(P)}\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2n\alpha\, d\alpha}{(e^{2\pi\cot\alpha}-1)\sin^{2n+2}\alpha} = \pm\frac{2n-1}{4(2n+1)},$$

dans laquelle on doit prendre le signe + si n est *impair*.

» XII. *Autres intégrales.* — L'équation (N), traitée de la même manière, donne

$$\text{(Q)}\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2n\alpha\, d\alpha}{(e^{\pi\cot\alpha}-1)\sin^{2n+2}\alpha} = \pm\frac{n}{2n+1}.$$

De plus, la comparaison de cette formule et de la précédente conduit à ce résultat remarquable :

$$\text{(R)}\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2n\alpha\, d\alpha}{(e^{\pi\cot\alpha}-e^{-\pi\cot\alpha})\sin^{2n+2}\alpha} = \pm\frac{1}{4}.$$

» XIII. Si, dans la formule (P), on suppose $n=1, 2, 3, \ldots 2p$, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{(e^{2\pi\cot\alpha}-1)\sin^2\alpha} \sum_1^{2p} \frac{\sin 2n\alpha}{\sin^{2n}\alpha} = \frac{1}{4}\sum_1^{p}\left(\frac{4n-3}{4n-1}-\frac{4n-1}{4n+1}\right).$$

Le second membre a pour valeur

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\ldots-\frac{1}{4p+1}\right),$$

ou

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1+\beta^{4p+2}}{1+\beta^2}\, d\beta.$$

D'un autre côté, à cause de la formule connue :

$$x\sin a + x^2\sin 2a + \ldots + x^{2p}\sin 2pa = x\,\frac{\sin a - x^{2p}\sin(2p+1)a + x^{2p+1}\sin 2pa}{1-2x\cos a+x^2},$$

on a

$$\sum_1^{2p} \frac{\sin 2n\alpha}{\sin^{2n}\alpha} = \frac{1}{\sin^{4p}\alpha}\,\frac{\sin 2\alpha \sin^{4p+2}\alpha - \sin^2\alpha \sin(4p+2)\alpha + \sin 4p\alpha}{1 - 2\cos 2\alpha \sin^2\alpha + \sin^4\alpha}.$$

Par conséquent,

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{(e^{2\pi\cot\alpha}-1)\sin^{4p+2}\alpha}\,\frac{\sin 2\alpha \sin^{4p+2}\alpha - \sin^2\alpha \sin(4p+2)\alpha + \sin 4p\alpha}{1 - 2\cos 2\alpha \sin^2\alpha + \sin^4\alpha} \\ \displaystyle = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{1+\beta^{4p+2}}{1+\beta^2}\,d\beta. \end{array}\right.$$

» On peut observer que, si le nombre entier p augmente indéfiniment, le second membre tend vers $\frac{\pi - 2}{16}$. Il en est donc de même du premier membre, bien que la fonction contenue sous le signe $\int$ n'ait aucune limite déterminée. »

CHIMIE APPLIQUÉE. — *Analyse chimique de l'eau du puits artésien de Passy*; *par* **MM. Poggiale** *et* **Lambert**. (Extrait.)

(Commissaires, MM. Ch. Sainte-Claire Deville, Daubrée.)

« L'eau du puits artésien de Passy, recueillie dans le courant d'octobre, était trouble et ne se clarifiait qu'incomplétement, même après un repos de plusieurs jours. Jetée sur un filtre, elle passait encore légèrement louche; mais celle que nous avons puisée au sommet du tube, le 22 février de cette année, était presque limpide et incolore. Les matières qu'elle laissait déposer par le repos étaient formées d'acide silicique, d'oxyde de fer et d'une petite quantité d'alumine et de chaux.

» Cette eau a une odeur sulfureuse assez prononcée à sa sortie du tube, mais qui disparaît rapidement au contact de l'air. Sa température, prise au sommet du tube, le 22 février, est de 27° centigrades. Elle dissout bien le savon et ne donne qu'un léger précipité par l'oxalate d'ammoniaque, l'azotate d'argent et le chlorure de baryum. Elle est alcaline; elle ne se trouble pas par l'ébullition et laisse dégager des gaz.

» Notre analyse, dont on trouvera les détails dans la présente Note, nous a donné les résultats suivants :