

Comptes rendus
hebdomadaires des séances
de l'Académie des sciences /
publiés... par MM. les
secrétaires perpétuels

Académie des sciences (France). Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels. 1835-1965.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisationcommerciale@bnf.fr.

sairement à celle de la lithine, comme auraient pu le faire croire les analyses des minéraux et des eaux dans lesquels M. Bunsen a découvert ce métal. Je dois ajouter qu'un certain nombre de végétaux dont j'ai analysé les cendres ne paraissent pas contenir de rubidium, bien que plusieurs d'entre eux soient riches en potasse. Je citerai notamment, comme se trouvant dans ce cas, le colza, le cacao, la canne à sucre et quelques espèces de fucus.

» La dissémination du nouveau métal alcalin étant mise hors de doute par les recherches que je viens de résumer, il y a un intérêt évident à étudier à ce point de vue spécial les sols dans lesquels croissent les végétaux dont je viens de parler. J'ai entrepris dans ce but des expériences et des analyses que je poursuis aussi activement que le permet la nature de ces études, par elle-mêmes longues et délicates. Je ne me décide à soumettre à l'Académie les résultats incomplets dont je viens d'avoir l'honneur de l'entretenir, que pour me réserver la possibilité de continuer librement des travaux qui exigent beaucoup de temps et présentent des difficultés réelles. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les Nombres de Bernoulli, et sur quelques formules qui en dépendent; par M. E. CATALAN.*

(Commissaires précédemment nommés : MM. Bertrand, Serret.)

« VIII. Développement de $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$. — L'identité

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \operatorname{tang} x + \frac{1}{\cos x}$$

donne, au moyen des formules (F), (K), et en mettant pour les coefficients A leurs valeurs :

$$(L) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 1 + x + \frac{1}{1.2} x^2 + \frac{1}{1.3} x^3 + \frac{5}{1.2.3.4} x^4 \\ + \frac{4}{1.2.1.3.5} x^5 + \frac{61}{1.2.3.4.5.6} x^6 + \frac{34}{1.2.3.1.3.5.7} x^7 \\ + \frac{1385}{1.2.3.4.5.6.7.8} x^8 + \frac{496}{1.2.3.4.1.3.5.7.9} x^9 + \dots \end{array} \right.$$

» IX. Développement de $\log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$. — De

$$\int_0^x \frac{dx}{\cos x} = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

on conclut

$$(M) \log \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) = x + \frac{1}{1.2.3} x^3 + \frac{5}{1.2.3.4.5} x^5 + \frac{61}{1.2...7} x^7 + \frac{1385}{1.2.3...9} x^9 + \dots$$

» X. *Relation nouvelle entre les Nombres de Bernoulli.* — On a, identiquement,

$$x \cot x \cdot \sin x = x \cos x;$$

donc, à cause de la formule (D) et des équations (C),

$$4^n \frac{B_{2n-1}}{1.2...(2n)} + 4^{n-1} \frac{1}{1.2.3} \frac{B_{2n-3}}{1.2...(2n-2)} + \dots + 4 \frac{1}{1.2...(2n-1)} \frac{B_1}{1.2} = \frac{2n}{1.2.3...(2n+1)},$$

ou

$$(N) \quad 4^n \frac{(2n+1)}{1} B_{2n-1} + 4^{n-1} \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{1.2.3} B_{2n-3} + \dots + 4 \frac{(2n+1)2n}{1.2} B_1 = 2n.$$

Cette relation générale diffère de celles qui sont indiquées dans Lacroix (*). Si l'on suppose $B_{2n-1} = \frac{B'_{2n-1}}{2^{2n-1}}$, on obtient, au lieu de l'équation (N),

$$(N') \quad B'_{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{2.3} B'_{2n-3} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{2.3.4.5} B'_{2n-5} + \dots + \frac{2n}{2} B'_1 = \frac{n}{2n+1}.$$

» Celle-ci serait précisément la relation connue entre les Nombres de Bernoulli, si l'on supprimait les accents, et si l'on écrivait, au lieu du second membre, $\frac{2n-1}{2(2n+1)}$.

» XI. *Détermination d'une intégrale définie.* — Dans les *Mémoires de l'Académie de Turin* (année 1820), M. Plana démontre la formule

$$B_{2n-1} = \pm 4n \int_0^\infty \frac{t^{2n-1} dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

Il en résulte, à cause de la relation générale dont il vient d'être question,

$$\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \left[\frac{2n}{1} t^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3} t^{2n-3} + \dots + \frac{2n}{1} t \right] = \pm \frac{2n-1}{4(2n+1)}.$$

(*) Tome III, page 84 (1819). Celles-ci renferment une faute de signe : au lieu de $\left(+ \frac{1}{2} \right)$, on doit lire partout $\left(- \frac{1}{2} \right)$.

(1061)

La quantité entre parenthèses est égale à $\frac{(t + \sqrt{-1})^{2n} - (t - \sqrt{-1})^{2n}}{2\sqrt{-1}}$. Si l'on suppose $t = \cot \alpha$, on arrive à la formule

$$(P) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2n\alpha d\alpha}{(e^{2\pi \cot \alpha} - 1) \sin^{2n+2} \alpha} = \pm \frac{2n-1}{4(2n+1)},$$

dans laquelle on doit prendre le signe + si n est impair.

» XII. *Autres intégrales.* — L'équation (N), traitée de la même manière, donne

$$(Q) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2n\alpha d\alpha}{(e^{\pi \cot \alpha} - 1) \sin^{2n+2} \alpha} = \pm \frac{n}{2n+1}.$$

De plus, la comparaison de cette formule et de la précédente conduit à ce résultat remarquable :

$$(R) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2n\alpha d\alpha}{(e^{\pi \cot \alpha} - e^{-\pi \cot \alpha}) \sin^{2n+2} \alpha} = \pm \frac{1}{4}.$$

» XIII. Si, dans la formule (P), on suppose $n = 1, 2, 3, \dots, 2p$, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{(e^{2\pi \cot \alpha} - 1) \sin^2 \alpha} \sum_1^{2p} \frac{\sin 2n\alpha}{\sin^{2n} \alpha} = \frac{1}{4} \sum_1^p \left(\frac{4n-3}{4n-1} - \frac{4n-1}{4n+1} \right).$$

Le second membre a pour valeur

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots - \frac{1}{4p+1} \right),$$

ou

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1 + \beta^{4p+2}}{1 + \beta^2} d\beta.$$

D'un autre côté, à cause de la formule connue :

$$x \sin a + x^2 \sin 2a + \dots + x^{2p} \sin 2pa = x \frac{\sin a - x^{2p} \sin(2p+1)a + x^{2p+1} \sin 2pa}{1 - 2x \cos a + x^2},$$

on a

$$\sum_1^{2p} = \frac{\sin 2n\alpha}{\sin^2 n\alpha} = \frac{1}{\sin^4 p\alpha} \frac{\sin 2\alpha \sin^{4p+2}\alpha - \sin^2\alpha \sin(4p+2)\alpha + \sin 4p\alpha}{1 - 2\cos 2\alpha \sin^2\alpha + \sin^4\alpha}$$

Par conséquent,

$$(S) \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(e^{2\pi \cot \alpha} - 1) \sin^{4p+2}\alpha} \frac{\sin 2\alpha \sin^{4p+2}\alpha - \sin^2\alpha \sin(4p+2)\alpha + \sin 4p\alpha}{1 - 2\cos 2\alpha \sin^2\alpha + \sin^4\alpha} \\ & = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{1 + \beta^{4p+2}}{1 + \beta^2} d\beta. \end{aligned} \right.$$

» On peut observer que, si le nombre entier p augmente indéfiniment, le second membre tend vers $\frac{\pi-2}{16}$. Il en est donc de même du premier membre, bien que la fonction contenue sous le signe \int n'ait aucune limite déterminée. »

CHIMIE APPLIQUÉE. — *Analyse chimique de l'eau du puits artésien de Passy;*
par MM. POGGIALE et LAMBERT. (Extrait.)

(Commissaires, MM. Ch. Sainte-Claire Deville, Daubrée.)

« L'eau du puits artésien de Passy, recueillie dans le courant d'octobre, était trouble et ne se clarifiait qu'incomplètement, même après un repos de plusieurs jours. Jetée sur un filtre, elle passait encore légèrement louche; mais celle que nous avons puisée au sommet du tube, le 22 février de cette année, était presque limpide et incolore. Les matières qu'elle laissait déposer par le repos étaient formées d'acide silicique, d'oxyde de fer et d'une petite quantité d'alumine et de chaux.

» Cette eau a une odeur sulfureuse assez prononcée à sa sortie du tube, mais qui disparaît rapidement au contact de l'air. Sa température, prise au sommet du tube, le 22 février, est de 27° centigrades. Elle dissout bien le savon et ne donne qu'un léger précipité par l'oxalate d'ammoniaque, l'azotate d'argent et le chlorure de baryum. Elle est alcaline; elle ne se trouble pas par l'ébullition et laisse dégager des gaz.

» Notre analyse, dont on trouvera les détails dans la présente Note, nous a donné les résultats suivants :