Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

droite, mais un cercle tangent à la direction primitive. Dans la région boréale, ce cercle est placé de telle sorte que le mobile dévie à droite de la ligne d'impulsion, relativement à un observateur placé au point de départ. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les Nombres de Bernoulli et sur quelques formules qui en dépendent; par* **M. E. Catalan.**

(Commissaires, MM. Bertrand, Serret.)

« L'une des savantes Notes ajoutées, par MM. Hermite et Serret, au *Traité élémentaire* de Lacroix, a rappelé mon attention sur quelques résultats assez simples, auxquels j'étais parvenu depuis longtemps. Je demande à l'Académie la permission de les lui soumettre.

» I. *Expression générale des Nombres de Bernoulli.* — M. Serret reproduit, à peu de chose près, le calcul donné autrefois par Lacroix, d'après Laplace. Ce calcul est assez compliqué, et la formule à laquelle il conduit n'est pas la plus simple que l'on puisse employer quand on veut calculer *directement* le $p^{\text{ième}}$ Nombre de Bernoulli. Dans une Note insérée au Journal de M. Tortolini (*), j'ai démontré la formule :

$$B_p = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Delta(1^p) + \frac{1}{4}\Delta^2(1^p) - \ldots \pm \frac{1}{p+2}\Delta^p(1^p),$$

laquelle équivaut à

$$(A)\quad \left\{ \begin{aligned} B_p &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(2^p - 1^p) + \frac{1}{4}\left(3^p - \frac{2}{1}2^p + 1^p\right) - \ldots \\ &\pm \frac{1}{p+2}\left[(p+1)^p - \frac{p}{1}p^p + \frac{p(p-1)}{1.2}(p-1)^p - \ldots \pm 1^p\right] \text{ (**)}. \end{aligned} \right.$$

» Dans la même Note, j'ai indiqué un procédé qui permet de calculer de proche en proche, et très-simplement, les différences successives de 1^p.

» II. *Développement de* $\frac{x}{e^x - 1}$. — On peut, de bien des manières, prouver

---

(*) Juillet-août 1859.

(**) A l'exemple de Lacroix (*Calcul des différences*, t. III, p. 84), j'appelle B_p *le coefficient de n dans le développement de*

$$1^{p+1} + 2^{p+1} + \ldots + n^{p+1},$$

ordonné suivant les puissances de n. D'ailleurs $B_p = 0$ lorsque p est pair et *plus grand que zéro.* M. Serret désigne par B_n ce qui, avec notre notation, serait $(-1)^{n-1} B_{2n-1}$.

que, pour des valeurs réelles ou imaginaires de x dont le nombre soit suffisamment petit, l'on a

$$(\mathrm{B}) \qquad \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \mathrm{A}_2 x^2 + \mathrm{A}_4 x^4 + \mathrm{A}_6 x^6 + \ldots,$$

les coefficients A_2, A_4, A_6,... étant donnés, en fonction des Nombres de Bernoulli, par les formules :

$$(\mathrm{C}) \qquad \mathrm{A}_2 = \frac{\mathrm{B}_1}{1.2}, \quad \mathrm{A}_4 = \frac{\mathrm{B}_3}{1.2.3.4}, \quad \mathrm{A}_6 = \frac{\mathrm{B}_5}{1.2.3.4.5.6}, \ldots.$$

» III. *Développement de* $x \cot x$. — Si, dans l'équation (B), on change x en $x\sqrt{-1}$, on obtient, comme l'on sait,

$$(\mathrm{D}) \qquad x \cot x = 1 - 4\mathrm{A}_2 x^2 + 4^2 \mathrm{A}_4 x^4 - 4^3 \mathrm{A}^6 x^6 + \ldots.$$

» IV. *Développement de* $\frac{x}{\sin x}$. — On a, identiquement,

$$\cot\frac{1}{2}x - \cot x = \frac{1}{\sin x};$$

donc, à cause de la formule (D),

$$(\mathrm{E}) \quad \frac{x}{\sin x} = 1 + 2(2-1)\mathrm{A}_2 x^2 - 2(2^3-1)\mathrm{A}_4 x^4 + 2(2^5-1)\mathrm{A}_6 x^6 - \ldots.$$

» V. *Développement de* $\operatorname{tang} x$. — On a aussi

$$\cot x - 2\cot 2x = \operatorname{tang} x;$$

d'où l'on conclut

$$(\mathrm{F}) \quad \operatorname{tang} x = 4(4-1)\mathrm{A}_2 x - 4^2(4^2-1)\mathrm{A}_4 x^3 + 4^3(4^3-1)\mathrm{A}_6 x^5 - \ldots \quad (^*).$$

» VI. *Développement de* $\sin^m x$. — 1° L'exposant m étant entier positif, ce développement aura la forme

$$x^m + \mathrm{C}_2 x^{m+2} + \mathrm{C}_4 x^{m+4} + \ldots + \mathrm{C}_{2p} x^{m+2p} + \ldots.$$

(*) M. Schlömilch s'est occupé de cette série (*Archives mathématiques de Grunert*, t. XVI).

Si, après avoir remplacé $\sin x$ par $\dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, on applique le théorème de Mac-Laurin, on trouve aisément

$$(\mathrm{G}) \qquad C_{2p} = \frac{(-1)^p . 2^{2p}}{1.2.3\ldots(m+2p)} \Delta^m \left[\left(-\frac{m}{2}\right)^{m+2p}\right].$$

D'ailleurs,

$$\Delta^m \left[\left(-\frac{m}{2}\right)^{m+2p}\right] = \left(\frac{m}{2}\right)^{m+2p} - \frac{m}{1}\left(\frac{m}{2}-1\right)^{m+2p} + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{m}{2}-1\right)^{m+2p} - \ldots$$
$$\pm \frac{m}{1}\left(-\frac{m}{2}+1\right)^{m+2p} \mp \left(-\frac{m}{2}\right)^{m+2p}.$$

» 2° Si l'on suppose

$$(a) \quad \sin^{m+1} x = \sin^m x . \sin x = x^{m+1} + D_2 x^{m+3} + \ldots + D_{2p} x^{m+2p+1} + \ldots,$$

on a

$$(b) \quad D_{2p} = C_{2p} - \frac{1}{1.2.3} C_{2p-2} + \ldots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots(2p-1)} C_2 \mp \frac{1}{1.2.3\ldots(2p+1)}.$$

D'un autre côté, en égalant les dérivées des deux membres de l'équation (a), et remplaçant $\cos x$ par son développement, on trouve une seconde valeur de D_{2p}. Il en résulte

$$(\mathrm{H}) \quad pC_{2p} + \frac{m+1-p}{1.2.3} C_{2p-2} - \frac{m+2-p}{1.2.3.4.5} C_{2p-4} + \ldots \mp \frac{pm}{1.2.3\ldots(2p+1)} = 0.$$

Cette relation générale donne, successivement,

$$(c) \quad C_2 = -\frac{m}{6}, \quad C_4 = \frac{m(5m-2)}{360}, \quad C_6 = -\frac{m(35m^2 - 42m + 16)}{45360}, \ldots.$$

» 3° En comparant la valeur de C_2 à celle qui résulte de la formule (G), on conclut cette réduction assez remarquable :

$$\left(\frac{m}{2}\right)^{m+2} - \frac{m}{1}\left(\frac{m}{2}-1\right)^{m+2} + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{m}{2}-2\right)^{m+2} - \ldots$$
$$\pm \frac{m}{1}\left(-\frac{m}{2}+1\right)^{m+2} \mp \left(-\frac{m}{2}\right)^{m+2} = \frac{m}{24} 1.2.3\ldots(m+2).$$

» 4° Du reste, on peut retrouver les valeurs (c) en partant de l'identité

$$\sin^m x = [x - (x - \sin x)]^m,$$

et en y remplaçant $x - \sin x$ par son développement en série.

» VII. *Développement de* $\frac{1}{\cos x}$. — Parmi les différentes manières de l'obtenir, la plus simple (quant à présent) nous paraît consister à écrire

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{P_2 x^2}{1.2} + \frac{P_4 x^4}{1.2.3.4} + \frac{P_6 x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots,$$

ou

$$1 = \left(1 + \frac{P_2 x^2}{1.2} + \frac{P_4 x^4}{1.2.3.4} + \frac{P_6 x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right)\left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\right).$$

Il résulte, de cette égalité :

$$P_2 - 1 = 0, \quad P_4 - \frac{4.3}{1.2} P_2 + 1 = 0, \quad P_6 - \frac{6.5}{1.2} P_4 + \frac{6.5}{1.2} P_2 - 1 = 0, \ldots;$$

et, en général,

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} P_{2n} - \frac{2n(2n-1)}{1.2} P_{2n-2} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4} P_{2n-4} - \ldots \\ \qquad \pm \frac{2n(2n-1)}{1.2} P_2 \mp 1 = 0. \end{cases}$$

Conséquemment,

$$\text{(K)} \quad \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{1.2} x^2 + \frac{5}{1.2.3.4} x^4 + \frac{61}{1.2.3.4.5.6} x^6 + \frac{1385}{1.2\ldots8} x^8 + \ldots (*) \text{»}$$

M. Guirette soumet au jugement de l'Académie un *appareil inhalateur* de son invention, destiné à faire pénétrer dans les poumons un volume d'air supérieur à celui qui, dans certains cas pathologiques, y entrerait en vertu des mouvements naturels d'inspiration. L'auteur annonce que l'emploi méthodique de cet appareil a donné dans certains cas de phthisie d'excellents résultats, constatés par divers médecins de Paris, de Pau et de Bruxelles.

(Renvoi à l'examen d'une Commission composée de MM. Andral et Rayer.)

M. Lameyre présente la figure et la description d'un *appareil de perspective* à l'usage des peintres et spécialement destiné au dessin des monuments.

(Renvoi à l'examen de M. Chasles.)

(*) M. Schlömilch a également traité cette série dans le Recueil déjà cité.