Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

» On pourrait croire que la valeur précédente de H_2 convient quelle que soit la fonction K_2, aux systèmes triplement orthogonaux que nous étudions; et, en effet, une valeur de H_2 qui convient aux deux premières des équations (5) satisfait aussi, en général, aux deux autres; toutefois il y a une exception, et cette exception se présente lorsque $\frac{u}{v_1}$ est indépendant de ρ_2, ce qui est précisément le cas dont il s'agit ici. Il faut donc encore assujettir H_2 à vérifier la troisième des équations (5); on trouve ainsi pour déterminer K_2 l'équation

$$\frac{d^2 K_2}{d\rho\, d\rho_1} + \frac{d.l.\frac{u}{v_1}}{d\rho_1} \frac{dK_2}{d\rho} + v_1 \frac{d.\frac{v_2}{u}}{d\rho_1} K_2 = 0,$$

laquelle ne contient pas ρ_2 et donne, par conséquent, pour K_2 une valeur contenant deux fonctions arbitraires. »

THÉORIE DES NOMBRES. — *Note sur l'équation du troisième degré;* par M. E. CATALAN.

(Renvoi à la Section de Géométrie.)

« I. En désignant par A_n la somme des puissances $n^{ièmes}$ de l'équation

$$(1) \qquad x^3 + px + q = 0,$$

on a, comme l'on sait,

$$(2) \qquad A_n = -pA_{n-2} - qA_{n-3},$$

à partir de $n = 3$. En même temps,

$$A_0 = 3, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = -2p.$$

» II. Si l'on forme successivement les valeurs de A_3, A_4, A_5, ..., on trouve bientôt qu'elles sont comprises dans les deux formules

$$(3) \begin{cases} \pm A_{2k+1} = (2k+1)\left[p^{k-1}q - \frac{(k-2)(k-3)}{2 \cdot 3} p^{k-4}q^3 + \frac{(k-3)(k-4)(k-5)(k-6)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} p^{k-7}q^5 \right. \\ \qquad \left. - \frac{(k-4)(k-5)(k-6)(k-7)(k-8)(k-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} p^{k-10}q^7 + \ldots \right], \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \pm A_{2k} = 2 . p^k - (2k)\left[\frac{k-2}{2} p^{k-3}q^2 - \frac{(k-3)(k-4)(k-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4} p^{k-6}q^4 \right. \\ \qquad \left. + \frac{(k-4)(k-5)(k-6)(k-7)(k-8)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} p^{k-9}q^6 - \ldots \right], \end{cases}$$

dont la vérification est facile. (On doit prendre les signes supérieurs si k est *pair.*)

» III. Le cas particulier de $p = 1$, $q = -1$ conduit à un résultat curieux. On trouve en effet, à cause de

$$A_n = -A_{n-2} + A_{n-3} : \tag{5}$$

$A_2 = -2$, $A_3 = 3$, $A_4 = 2$, $A_5 = -5$, $A_6 = 1$, $A_7 = 7$,
$A_8 = -6$, $A_9 = -6$, $A_{10} = 13$, $A_{11} = 0$, $A_{12} = -19$, $A_{13} = 13$,
$A_{14} = 19$, $A_{15} = -32$, $A_{16} = -6$, $A_{17} = 51 = 17.3$,
$A_{18} = -26$, $A_{19} = -57 = -19.3$, $A_{20} = 77$, $A_{21} = 31$,
$A_{22} = -134$, $A_{23} = 46 = 23.2$, $A_{24} = 165$, $A_{25} = -180$,
$A_{26} = -119$, $A_{27} = 345$, $A_{28} = -61$,
$A_{29} = -464 = -29.16$, ...

» Ainsi, au moins jusqu'à une certaine valeur de n, *le nombre entier* A_n *est ou n'est pas divisible par* n, *suivant que* n *est ou n'est pas premier.* Au moyen de la formule (3), on démontre aisément la première partie de cette proposition. Si la seconde partie était également démontrée, on aurait un *criterium* analogue au théorème de Wilson [mais incomparablement plus simple (*)], pour reconnaître si un nombre est premier ou non premier.

» Si l'on suppose $p = -1$, $q = -1$, on trouve des résultats analogues à ceux qui viennent d'être indiqués :

$A_2 = 2$, $A_3 = 3$, $A_4 = 2$, $A_5 = 5$, $A_6 = 5$, $A_7 = 7$,
$A_8 = 10$, $A_9 = 12$, $A_{10} = 17$, $A_{11} = 22 = 11.2$, $A_{12} = 29$,
$A_{13} = 39 = 13.3$; .... »

CHIMIE APPLIQUÉE. — *Note sur le pigment des Touracos* (*Musophaga*); *par* **M. Anatole Bogdanow.**

(Renvoi à l'examen des Commissaires précédemment nommés : MM. Chevreul, Pelouze, Regnault et Blanchard en remplacement de feu M. Is. Geoffroy-Saint-Hilaire.)

« Dans une Note sur le pigment du *Calurus auriceps*, présentée à l'Académie des Sciences en 1858, et publiée dans les *Comptes rendus*, j'ai fait con-

(*) Les valeurs de A_n croissent très-lentement : $A_{23} = 3$, $A_{53} = -26924$.