

Comptes rendus  
hebdomadaires des séances  
de l'Académie des sciences /  
publiés... par MM. les  
secrétaires perpétuels

Académie des sciences (France). Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels. 1835-1965.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [reutilisationcommerciale@bnf.fr](mailto:reutilisationcommerciale@bnf.fr).

» On pourrait croire que la valeur précédente de  $H_2$  convient quelle que soit la fonction  $K_2$ , aux systèmes triplement orthogonaux que nous étudions; et, en effet, une valeur de  $H_2$  qui convient aux deux premières des équations (5) satisfait aussi, en général, aux deux autres; toutefois il y a une exception, et cette exception se présente lorsque  $\frac{u}{v_1}$  est indépendant de  $\rho_2$ , ce qui est précisément le cas dont il s'agit ici. Il faut donc encore assujettir  $H_2$  à vérifier la troisième des équations (5); on trouve ainsi pour déterminer  $K_2$  l'équation

$$\frac{d^2 K_2}{d\rho d\rho_1} + \frac{d \cdot l \cdot \frac{u}{v_1} dK_2}{d\rho_1 d\rho} + v_1 \frac{d \cdot \frac{u}{v_1} K_2}{d\rho_1} = 0,$$

laquelle ne contient pas  $\rho_2$  et donne, par conséquent, pour  $K_2$  une valeur contenant deux fonctions arbitraires. »

THÉORIE DES NOMBRES. — *Note sur l'équation du troisième degré;*  
par M. E. CATALAN.

(Renvoi à la Section de Géométrie.)

« I. En désignant par  $A_n$  la somme des puissances  $n^{\text{ièmes}}$  de l'équation

$$(1) \quad x^3 + px + q = 0,$$

on a, comme l'on sait,

$$(2) \quad A_n = -pA_{n-2} - qA_{n-3},$$

à partir de  $n = 3$ . En même temps,

$$A_0 = 3, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = -2p.$$

» II. Si l'on forme successivement les valeurs de  $A_3, A_4, A_5, \dots$ , on trouve bientôt qu'elles sont comprises dans les deux formules

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \pm A_{2k+1} &= (2k+1) \left[ p^{k-1}q - \frac{(k-2)(k-3)}{2 \cdot 3} p^{k-2}q^3 + \frac{(k-3)(k-4)(k-5)(k-6)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} p^{k-3}q^5 \right. \\ &\quad \left. - \frac{(k-4)(k-5)(k-6)(k-7)(k-8)(k-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} p^{k-4}q^7 + \dots \right], \end{aligned} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \pm A_{2k} &= 2 \cdot p^k - (2k) \left[ \frac{k-2}{2} p^{k-3}q^2 - \frac{(k-3)(k-4)(k-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4} p^{k-4}q^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(k-4)(k-5)(k-6)(k-7)(k-8)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} p^{k-5}q^6 - \dots \right], \end{aligned} \right.$$

dont la vérification est facile. (On doit prendre les signes supérieurs si  $k$  est pair.)

» III. Le cas particulier de  $p = 1$ ,  $q = -1$  conduit à un résultat curieux. On trouve en effet, à cause de

$$(5) \quad A_n = -A_{n-2} + A_{n-3} :$$

$$\begin{aligned} A_2 &= -2, & A_3 &= 3, & A_4 &= 2, & A_5 &= -5, & A_6 &= 1, & A_7 &= 7, \\ A_8 &= -6, & A_9 &= -6, & A_{10} &= 13, & A_{11} &= 0, & A_{12} &= -19, & A_{13} &= 13, \\ A_{14} &= 19, & A_{15} &= -32, & A_{16} &= -6, & A_{17} &= 51 = 17 \cdot 3, \\ A_{18} &= -26, & A_{19} &= -57 = -19 \cdot 3, & A_{20} &= 77, & A_{21} &= 31, \\ A_{22} &= -134, & A_{23} &= 46 = 23 \cdot 2, & A_{24} &= 165, & A_{25} &= -180, \\ A_{26} &= -119, & A_{27} &= 345, & A_{28} &= -61, \\ A_{29} &= -464 = -29 \cdot 16, \dots \end{aligned}$$

» Ainsi, au moins jusqu'à une certaine valeur de  $n$ , le nombre entier  $A_n$  est ou n'est pas divisible par  $n$ , suivant que  $n$  est ou n'est pas premier. Au moyen de la formule (3), on démontre aisément la première partie de cette proposition. Si la seconde partie était également démontrée, on aurait un *criterium* analogue au théorème de Wilson [mais incomparablement plus simple (\*)], pour reconnaître si un nombre est premier ou non premier.

» Si l'on suppose  $p = -1$ ,  $q = -1$ , on trouve des résultats analogues à ceux qui viennent d'être indiqués :

$$\begin{aligned} A_2 &= 2, & A_3 &= 3, & A_4 &= 2, & A_5 &= 5, & A_6 &= 5, & A_7 &= 7, \\ A_8 &= 10, & A_9 &= 12, & A_{10} &= 17, & A_{11} &= 22 = 11 \cdot 2, & A_{12} &= 29, \\ A_{13} &= 39 = 13 \cdot 3; \dots \end{aligned}$$

CHIMIE APPLIQUÉE. — Note sur le pigment des Touracos (*Musophaga*);  
par M. ANATOLE BOGDANOW.

(Renvoi à l'examen des Commissaires précédemment nommés : MM. Chevreul, Pelouze, Regnault et Blanchard en remplacement de feu M. Is. Geoffroy-Saint-Hilaire.)

« Dans une Note sur le pigment du *Calurus auriceps*, présentée à l'Académie des Sciences en 1858, et publiée dans les *Comptes rendus*, j'ai fait con-

(\*) Les valeurs de  $A_n$  croissent très-lentement :  $A_{23} = 3$ ,  $A_{33} = -26924$ .