Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

teur et l'âme de mes expéditions; mais, je le répète avec douleur, tant que celles-ci se résument dans ma seule personne, elles ne sauraient donner que la mesure de mes facultés exclusivement personnelles.

» Quant à la partie zoologique de mon ouvrage, elle n'a aucune prétention de fournir une idée quelconque de la faune de cette contrée. Cependant je crois pouvoir observer que, malgré l'impossibilité où je me suis trouvé de faire des collections zoologiques, le peu que je suis parvenu à réunir semble inspirer une opinion favorable de la richesse ou de l'intérêt que doit posséder cette faune. En effet, sur quatre espèces prises au hasard qui composaient toute ma collection zoologique, deux sont nouvelles (*Felis tulliana*, Val., et *Ovis anatolica*, Val.), et parmi les deux autres, l'une (*Capra ægagrus*) était très-imparfaitement connue, et l'autre (*Capra angorensis*) n'avait encore jamais figuré dans aucun établissement scientifique de l'Europe au moment (en 1847) où je déposais dans le Musée Impérial de Saint-Pétersbourg un très-bel exemplaire de ce ruminant. Lorsqu'une aussi minime collection faite sans recherches, a pu offrir autant d'intérêt, de quelle importance ne devront pas être les résultats que fourniraient des explorations systématiques effectuées par des zoologistes de profession, qui consacreraient leurs études exclusivement à la faune de cette contrée, qu'entre tous les pays du monde la Providence semble avoir choisie pour y concentrer les trésors de son inépuisable libéralité?

» Sans oser beaucoup espérer pour la zoologie de l'Asie Mineure des nouvelles explorations que je me propose d'entreprendre très-prochainement dans cette péninsule, en les étendant jusqu'aux frontières de la Perse et de l'Arabie, j'ai tout lieu de croire qu'elles ne seront pas complétement perdues pour cette science, bien que, comme par le passé, je ne puisse pas la comprendre dans le cercle déjà beaucoup trop étendu de mes études qui seront particulièrement consacrées à la géologie, à la botanique et à quelques branches de la physique. Dans tous les cas, les encouragements bienveillants de l'Académie seront toujours pour moi la récompense la plus flatteuse et le dédommagement le plus généreux de tous les sacrifices que m'impose la pénible carrière à laquelle je me suis voué, et que la mort seule pourra me faire abandonner. »

MATHÉMATIQUES. — *Note sur quelques points de la théorie des séries;* *par* **M. E. Catalan.**

« I. *Nouvelles règles de convergence.* — On peut démontrer, de plusieurs manières, que les séries

$$1 + \frac{1}{2^{1+k}} + \frac{1}{3^{1+k}} + \ldots + \frac{1}{n^{1+k}} + \ldots,$$

$$\frac{1}{2(l2)^{1+k}} + \frac{1}{3(l3)^{1+k}} + \ldots + \frac{1}{n(ln)^{1+k}} + \ldots,$$

$$\frac{1}{2l2(ll2)^{1+k}} + \frac{1}{3l3(ll3)^{1+k}} + \ldots + \frac{1}{nln(lln)^{1+k}} + \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

sont convergentes lorsque k est positif, divergentes si k est nul ou négatif.

» De ce théorème, dû à M. Bertrand, on conclut immédiatement les règles, ou plutôt les conditions de convergence suivantes, applicables à toute série :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

dont les termes sont positifs, du moins à partir d'une certaine valeur de n. Ces conditions, qui probablement ne diffèrent pas, au fond, des règles données par M. Bertrand, ont, sur celles-ci, l'avantage d'une forme plus mnémotechnique. Peut-être aussi sont-elles plus facilement applicables.

CONDITIONS	
nécessaires.	suffisantes.
$\lim nu_n = 0$	$\lim [nu_n . n^k] = A$
$\lim nln . u_n = 0$	$\lim [nln . u_n (ln)^k] = B$
$\lim nln (lln) = 0$	$\lim [nln (lln) u_n (lln)^k] = C$
....	....

» Les conditions nécessaires n'exigent aucune explication (*). La première des conditions suffisantes peut être énoncée ainsi :

» Le produit nu_n ayant pour limite zéro, on le multipliera par n^k. Si, pour une valeur suffisamment petite, mais positive, de l'exposant k, le nouveau produit tend vers une limite finie A, la série proposée sera convergente.

(*) Il est sous-entendu que $\lim u_n = 0$.

» Si le produit $nu_n . n^k$ devient infini avec n, quelque petit que soit k, on ne pourra décider encore si la série est convergente ou divergente. On passera donc à la deuxième condition nécessaire; et ainsi de suite.

» II. *Sur la série harmonique.* — On sait que

$$(1) \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = ln - \varphi(n) = C,$$

$\varphi(n)$ s'annulant quand n devient infini, et C représentant une constante dont la valeur, calculée par Euler et Mascheroni, est

$$C = 0,577\,215\,664\,901\,532\,860\ldots.$$

En remplaçant ln par

$$l\frac{n}{n-1} + l\frac{n-1}{n-2} + \ldots + l\frac{2}{1} + l_1,$$

on a

$$(2) \quad \varphi(n) = C - 1 + \left(l\frac{2}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(l\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(l\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$

Soit

$$u_n = l\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n};$$

il en résulte

$$u_n = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} e^{-n\alpha}(e^\alpha - 1 - \alpha),$$

puis

$$(3) \qquad \varphi(n) = C - 1 + \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha}\left(1 - \frac{\alpha}{e^\alpha - 1}\right)(e^{-\alpha} - e^{-n\alpha}).$$

» Cela posé, en appliquant mot à mot la méthode employée par M. Liouville dans sa *Note sur l'évaluation du produit* $1.2.3\ldots x$, on trouve

$$(4) \qquad \varphi(n) > -\frac{1}{2n}, \quad \varphi(n) < -\frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2};$$

et, par conséquent,

$$(A) \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < ln + \frac{1}{2n} + C,$$

$$(B) \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > + ln\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} + C.$$

Les formules (A) et (B) donnent ainsi deux limites entre lesquelles est comprise la somme S_n des n premiers termes de la série harmonique. Si l'on fait

$$n = 1000,$$

on trouve

$$S_{1000} < 7,48547095, \qquad S_{1000} > 7,48547086.$$

Ce résultat est conforme à celui que donne Lacroix.

» III. — D'après le § I, la série convergente

$$\left(l\frac{2}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(l\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(l\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \ldots$$

a pour *somme*

$$1 - C = 0,422\,784\,335\,098\,476\,139\ldots.$$

» IV. — La série harmonique est très-peu divergente, puisque la somme de ses 1000 premiers termes est à peu près 7,5; mais la série dont le terme général est $\frac{1}{nln}$ diverge encore bien plus lentement. En effet, soient

(5) $$S_n = \frac{1}{2l2} + \frac{1}{3l3} + \ldots + \frac{1}{nln},$$

et

$$n = 2^p;$$

on trouve, très-aisément,

(6) $$S_n < \frac{1}{l2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}\right),$$

(7) $$S_n > \frac{1}{2l2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p}\right);$$

ou, par ce qui précède,

(C) $$S_n < \frac{1}{l2}\left[l(p-1) + \frac{1}{2(p-1)} + C\right],$$

(D) $$S_n > \frac{1}{2l2}\left[lp + \frac{1}{2p} - \frac{1}{12p^2} + C\right].$$

Soit

$$p = 1000,$$

auquel cas

$$n = 2^{1000},$$

nombre de 302 chiffres. On trouve

$$S_n < 11.$$

Ainsi, bien que la série considérée soit divergente, la somme de ses premiers termes, jusqu'à un rang marqué par un nombre de 302 chiffres, est inférieure à 11. On arriverait à des résultats encore plus curieux si l'on considérait la série divergente

$$\frac{1}{2l2(ll2)} + \frac{1}{3l3(ll3)} + \ldots + \frac{1}{nln(lln)} + \ldots . \text{»}$$

MÉTÉOROLOGIE. — *Observations faites à Chios du* 1er *septembre* 1855 *au* 31 *août* 1856; *par* M. CONDOGOURIS.

TEMPÉRATURE MOYENNE de chaque mois.		TEMPÉRATURE MOYENNE de l'année dernière.	JOURS PLUVIEUX de chaque mois.
En Septembre..	23,1	20,9	Deux jours de pluie : les 17 et 28.
Octobre....	21,6	17,4	»
Novembre..	17,9	14,4	Cinq : les 8, 9, 21, 27 et 30.
Décembre..	13,7	10,0	Dix : les 2, 3, 5, 9, 12, 14, 16, 19, 20 et 22.
Janvier.....	11,6	6,1	Sept : les 4, 14, 21, 23, 24, 27 et 28.
Février.....	11,9	11,2	Cinq : les 1, 4, 18, 22 et 25.
Mars......	9,2	12,3	Sept : les 7, 8, 23, 25, 27, 30 et 31.
Avril......	15,3	13,2	Deux : les 8 et 22.
Mai.......	21,4	19,5	»
Juin.......	24,9	24,6	»
Juillet.....	26,4	27,2	»
Aout......	25,8	26,5	»
Température moyenne de toute l'année, 18,56.		Temp. moy. de l'an. dern., 16,9.	Total des jours pluvieux, 38.

« En comparant, dit M. Condogouris, ce tableau à ceux que j'avais précédemment adressés, on verra que le nombre de jours de pluie est bien moindre que celui de l'année dernière (38 au lieu de 52). Les gens du pays m'ont assuré que, de mémoire d'homme, il n'avait fait une si grande sécheresse. Il est vrai qu'il y a eu plusieurs jours de pluie abondante, mais toutes ces pluies étaient de courte durée; aussi, la trop grande sécheresse a fait grand tort aux moissons, et a fait mourir un grand nombre de plantes, tous les ruisseaux et un grand nombre de puits se sont taris, et le manque d'eau se fait sentir de plus en plus à toute l'île. Il n'y a eu aucun ouragan cette année, mais, en revanche, nous avons eu un grand