REMARQUES

SUR

CERTAINES INTÉGRALES DÉFINIES;

PAR

E. CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 2 avril 1887.)

REMARQUES

SUR

CERTAINES INTÉGRALES DÉFINIES.

I. Si la quantité

$$A = \int_0^1 x^\alpha \varphi(x)\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

est *finie*, on a, par le changement de x en x^β, l'*identité*

$$\int_0^1 \left[x^\alpha \varphi(x) - \beta x^{\alpha\beta+\beta-1} \varphi(x^\beta)\right] dx = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

mais, si A est *infinie*, la relation (2) *peut n'être plus exacte*. C'est ce que les exemples suivants vont démontrer.

II. Supposons que, A étant *infinie*, l'intégrale

$$B = \int_0^1 x^\alpha \varphi(x)\, \mathfrak{l}x . dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

soit *finie*. Alors, d'après l'identité (2) :

$$\int_0^1 \left[x^\alpha \varphi(x) - \beta^2 x^{\alpha\beta+\beta-1} \varphi(x^\beta)\right] \mathfrak{l}x . dx = 0 \text{ (*)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

(*) Par le changement de x en x^β, $\mathfrak{l}x$ devient $\beta\mathfrak{l}x$.

III. Le premier membre est la dérivée, relative à α, de

$$\int_0^1 \left[x^\alpha \varphi(x) - \beta x^{\alpha\beta+\beta-1}\varphi(x^\beta)\right] dx.$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 \left[x^\alpha \varphi(x) - \beta x^{\alpha\beta+\beta-1}\varphi(x^\beta)\right] dx = C; \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

C étant une *constante*. La valeur de C, *qui n'est pas nécessairement nulle,* est donnée par la formule

$$C = \int_0^1 \left[\varphi(x) - \beta x^{\beta-1}\varphi(x^\beta)\right] dx \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

IV. Soit $\varphi(x) = \frac{1}{1-x}$. J'observe, d'abord, que les conditions indiquées ci-dessus sont remplies. En effet :

$$1^\circ \int_0^1 \frac{x^\alpha dx}{1-x} = \infty; \qquad 2^\circ \int_0^1 \frac{x^\alpha \,\text{l}x}{1-x} dx = -\sum_1^\infty \frac{1}{(n+\alpha+1)^2} \text{ (*)}.$$

Cela posé, la formule (6) donne

$$C = \int_0^1 \left[\frac{dx}{1-x} - \beta \frac{x^{\beta-1}dx}{1-x^\beta}\right] = \left[\text{l}.\frac{1-x^\beta}{1-x}\right]_0^1.$$

Pour $x = 0$, la fraction se réduit à 1 ; pour $x = 1$, elle prend la forme $\frac{0}{0}$: la vraie valeur est β. Donc

$$C = \text{l}\beta; \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

puis

$$\int_0^1 \left[\frac{x^\alpha}{1-x} - \beta \frac{x^{\alpha\beta+\beta-1}}{1-x^\beta}\right] dx = \text{l}\beta \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

(*) BIERENS DE HAAN, t. CVIII. La première formule est évidente ; la seconde se démontre très facilement.

Je pense que cette remarquable intégrale définie est nouvelle. Quand $\beta = 2$, elle se réduit à

$$\int_0^1 \left[\frac{x^\alpha}{1-x} - 2\,\frac{x^{2\alpha+1}}{1-x^2}\right] dx = \ell 2,$$

ou

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{1-x^2}(1 + x - 2x^{\alpha+1})\,dx = \ell 2;$$

valeur connue (*).

V. Dans l'égalité

$$\int_0^1 \left[x^\alpha \varphi(x) - \beta x^{\alpha\beta+\beta-1}\varphi(x^\beta)\right] dx = C, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5)$$

le second membre est une fonction de β : $C = F(\beta)$. La dérivée de la quantité entre parenthèses est

$$-\,x^{\alpha\beta+\beta-1}\varphi(x^\beta) - \beta\left[(\alpha+1)\,\varphi(x^\beta) + x^\beta\varphi'(x^\beta)\right] x^{\alpha\beta+\beta-1}\,\ell x.$$

Donc

$$\int_0^1 x^{\alpha\beta+\beta-1}\left\{\varphi(x^\beta) + \beta\left[(\alpha+1)\,\varphi(x) + x^\beta\varphi'(x^\beta)\right]\ell x\right\} dx = -\,F'(\beta). \quad . \quad . \quad . \qquad (9)$$

En particulier, si $\varphi(x) = \frac{1}{1-x}$,

$$\int_0^1 \frac{x^{(\alpha+1)\beta-1}}{(1-x^\beta)^2}\left\{1 - x^\beta + \beta\left[(\alpha+1)(1-x^\beta) + x^\beta\right]\ell x\right\} dx = -\frac{1}{\beta} \quad . \quad . \qquad (10)$$

Voici donc une autre intégrale définie, d'apparence compliquée, dont la valeur est fort simple. Lorsque $\alpha = 0$,

$$\int_0^1 \frac{x^{\beta-1}}{(1-x^\beta)^2}\left[1 - x^\beta + \beta\,\ell x\right] dx = -\frac{1}{\beta}\ (^{**}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (11)$$

et, si $\beta = 1$:

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{(1-x)^2}\left\{(1-x)(1 + \overline{\alpha+1}\,\ell x) + x\,\ell x\right\} dx = -\,1.$$

(*) *Note sur une formule de M. Botésu.* Ce cas particulier a été l'occasion du petit travail actuel.

(**) La vérification est facile.

VI. Soit $\varphi(x) = \frac{1}{1-x^m}$, m étant un *nombre entier*, auquel cas :

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{1-x^m} - \frac{\beta x^{\beta-1}}{1-x^{m\beta}}\right] dx = \mathrm{F}(\beta). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Par la théorie connue :

$$\frac{1}{1-x^m} = \frac{1}{m(1-x)} + \frac{x^{m-2} + 2x^{m-3} + 3x^{m-4} + \cdots + (m-1)x^0}{m(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots x + 1)},$$

$$\frac{1}{1-x^{m\beta}} = \frac{1}{m(1-x^\beta)} + \frac{x^{(m-2)\beta} + 2x^{(m-3)\beta} + \cdots + (m-1)x^0}{m[x^{(m-1)\beta} + x^{(m-2)\beta} + \cdots + x^\beta + 1]}.$$

Donc, en négligeant une *intégrale nulle* (1) :

$$\frac{1}{m}\int_0^1 \left[\frac{1}{1-x} - \frac{\beta x^{\beta-1}}{1-x^\beta}\right] dx = \mathrm{F}(\beta);$$

puis, par la formule (8),

$$\mathrm{F}(\beta) = \frac{1}{m}\,\ell\,\beta.$$

Ainsi :

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{1-x^m} - \frac{\beta x^{\beta-1}}{1-x^{m\beta}}\right] dx = \frac{1}{m}\,\ell\,\beta; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

et, plus généralement,

$$\int_0^1 \left[\frac{x^\alpha}{1-x^m} - \frac{\beta x^{\alpha\beta+\beta-1}}{1-x^{m\beta}}\right] dx = \frac{1}{m}\,\ell\,\beta\ (^*) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Par exemple, comme on le vérifie sans difficulté,

$$\int_0^1 \left[\frac{x}{1-x^2} - 2\frac{x^3}{1-x^4}\right] dx = \frac{1}{2}\,\ell\,2.$$

(*) Si l'on suppose $\alpha = m - 1$, on trouve cette formule, presque évidente :

$$\int_0^1 \left[\frac{x^{m-1}}{1-x^m} - \beta\frac{x^{m-1}}{1-x^{m\beta}}\right] dx = \frac{1}{m}\,\ell\,\beta.$$

VII. Dans la relation (8), développons chacune des fractions. La quantité entre parenthèses devient

$$x^{\alpha} + x^{\alpha+1} + x^{\alpha+2} + \cdots - \beta x^{\alpha\beta+\beta-1}(1 + x^{\beta} + x^{2\beta} + \cdots).$$

Nous avons donc,

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}\beta = {} & \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} + \cdots + \frac{1}{(\alpha+1)\beta} - \frac{1}{\alpha+1}\\ & + \frac{1}{(\alpha+1)\beta+1} + \frac{1}{(\alpha+1)\beta+2} + \cdots + \frac{1}{(\alpha+2)\beta} - \frac{1}{\alpha+2}\\ & + \frac{1}{(\alpha+2)\beta+1} + \frac{1}{(\alpha+2)\beta+2} + \cdots + \frac{1}{(\alpha+3)\beta} - \frac{1}{\alpha+3}\\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(*)}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (15)$$

On déduit, de cette formule générale :

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}\beta = {} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{\beta} - 1\\ & + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+2} + \cdots + \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2}\\ & + \frac{1}{2\beta+1} + \frac{1}{2\beta+2} + \cdots + \frac{1}{3\beta} - \frac{1}{3}\\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots ,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}\beta = {} & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2}\\ & + \frac{1}{2\beta+1} + \frac{1}{2\beta+2} + \cdots + \frac{1}{3\beta} - \frac{1}{2}\\ & + \frac{1}{3\beta+1} + \frac{1}{5\beta+2} + \cdots + \frac{1}{4\beta} - \frac{1}{4}\\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots ;\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

(*) Si l'on fait

$$u_n = \frac{1}{(\alpha+n-1)\beta+1} + \frac{1}{(\alpha+n-1)\beta+1} + \cdots + \frac{1}{(\alpha+n)\beta} - \frac{1}{\alpha+n},$$

on trouve, pour $n > 1$:

$$0 < u_n < \frac{1}{(\alpha+n-1)(\alpha+1)}.$$

Conséquemment, la série est convergente.

puis, par exemple :

$$\ell 2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

$$\ell 2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

$$\ell 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Le premier développement est connu ; les autres n'en diffèrent qu'en apparence.

VIII. Supposons $\varphi(x) = \frac{1}{\ell x}$: les formules (4) et (5) deviennent

$$\int_0^1 \left[x^\alpha - \beta x^{\alpha\beta+\beta-1}\right] dx = 0,$$

$$C = F(\beta) = \int_0^1 \frac{x^\alpha - x^{\alpha\beta+\beta-1}}{\ell x}\, dx.$$

La première relation est évidente. Quant à la seconde, elle se réduit à

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - x^{\alpha\beta+\beta-1}}{\ell . x}\, dx = -\ell \beta \,(^*) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

IX. Nous pensons que les applications précédentes suffisent à montrer l'utilité des formules (4) et (5).

Liége, 11 mars 1887.

(*) BIERENS DE HAAN, t. CLXVI.