NOTES

SUR

LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES

ET

SUR CERTAINES SÉRIES;

PAR

E. CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 2 juin 1883.)

NOTES

SUR

LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES

ET

SUR CERTAINES SÉRIES.

I Théorème de Kramp.

1. Lemme. *Soit une fraction continue*

$$x = a,\ b,\ c,\ \ldots,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ \ldots,$$

dont les réduites successives sont

$$\frac{A}{A'},\ \frac{B}{B'},\ \frac{C}{C'},\ \ldots,\ \frac{P}{P'},\ \frac{Q}{Q'},\ \frac{R}{R'},\ \ldots$$

Soit ensuite la fraction continue auxiliaire

$$y = q,\ r,\ s,\ t,\ \ldots$$

Les dénominateurs des réduites de cette fraction ont pour valeurs, respectivement :

$$(PQ' - QP')(-1)^{\lambda},\quad (PR' - RP')(-1)^{\lambda},\quad (PS' - SP')(-1)^{\lambda},\ \ldots;$$

λ *étant le rang du quotient incomplet* p (*).

(*) Pour la démonstration, voir les *Nouvelles Annales* (1849), p. 166.

2. Changeons de notation; et soit

$$x = q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_g,\ \ldots,\ q_h,\ \ldots,\ q_k,\ \ldots \qquad (1)$$

Prenons les trois fractions auxiliaires :

$$y = q_{g+1},\ q_{g+2},\ \ldots,\ q_h;$$
$$z = q_{h+1},\ q_{h+2},\ \ldots,\ q_k;$$
$$u = q_{g+1},\ q_{g+2},\ \ldots,\ q_k.$$

La valeur de y est une fraction ordinaire, *fonction des indices* $g+1, h$. Soient donc

$$y = \frac{N_{g+1,\,h}}{D_{g+1,\,h}},\quad z = \frac{N_{h+1,\,k}}{D_{h+1,\,k}},\quad u = \frac{N_{g+1,\,k}}{D_{g+1,\,k}} \text{ (*)} \qquad (2)$$

En vertu du Lemme :

$$N_gD_h - D_gN_h = (-1)^g D_{g+1,\,h},$$
$$N_hD_k - D_hN_k = (-1)^h D_{h+1,\,k},$$
$$N_kD_g - D_kN_g = (-1)^{g+1} D_{g+1,\,k}.$$

Multipliant par D_k, D_g, D_h, et ajoutant, on trouve

$$0 = D_kD_{g+1,\,h} - D_hD_{g+1,\,k} + (-1)^{h-g}D_gD_{h+1,\,k},$$

ou

$$D_kD_{g+1,\,h} - D_hD_{g+1,\,k} = (-1)^{h-g+1}D_g\,.\,D_{h+1,\,k} \qquad (A)$$

De même,

$$N_kD_{g+1,\,h} - N_hD_{g+1,\,k} = (-1)^{h-g+1}N_gD_{h+1,\,k}\,. \qquad (B)$$

Les relations (A), (B) constituent le *théorème de Kramp* (**).

(*) D'après cette notation, les réduites de x, répondant aux quotients q_g, q_h, q_k, seraient :

$$\frac{N_{1,\,g}}{D_{1,\,g}},\quad \frac{N_{1,\,h}}{D_{1,\,h}},\quad \frac{N_{1,\,k}}{D_{1,\,k}}.$$

Pour simplifier, nous les représenterons par

$$\frac{N_g}{D_g},\quad \frac{N_h}{D_h},\quad \frac{N_k}{D_k}.$$

(**) Je ne connais ce théorème que par la mention qu'en a faite *Lebesgue,* dans le *Journal de Mathématiques* (t. V, p. 286). Il ne m'a pas été possible de consulter l'*Arithmétique universelle,* de Kramp. La démonstration ci-dessus est beaucoup plus simple que celle qui a été insérée aux *Nouvelles Annales*. Enfin, le *défaut de symétrie,* de la formule rapportée par Lebesgue, a disparu.

3. Application. Soit

$$x = 3,\ 2,\ 1,\ 4,\ 2,\ 1,\ 3,\ 5,\ 2,\ 1.$$

Les réduites sont :

$$\frac{3}{1},\ \frac{7}{2},\ \frac{10}{3},\ \frac{47}{4},\ \frac{104}{31},\ \frac{151}{45},\ \frac{557}{166},\ \frac{2\,936}{875},\ \frac{6\,429}{1\,916},\ \frac{9\,365}{2\,791}.$$

Prenons

$$g = 3,\quad h = 7,\quad k = 10;$$

nous aurons

$$N_g = 10,\quad D_g = 3,\quad N_h = 557,\quad D_h = 166,\quad N_k = 9\,365,\quad D_k = 2\,791.$$

Quant aux fonctions

$$D_{g+1,\,h},\quad D_{g+1,\,k},\quad D_{h+1,\,k},$$

elles sont égales, respectivement, aux dénominateurs des fractions

$$4, 2, 1, 3;\quad 4, 2, 1, 3, 5, 2, 1;\quad 5, 2, 1;$$

savoir :

$$11,\qquad 185,\qquad 3.$$

On trouve, conformément au Théorème :

$$2\,791 \,.\, 11 - 166 \,.\, 185 = - 3 \,.\, 3,$$
$$9\,365 \,.\, 11 - 557 \,.\, 185 = - 10 \,.\, 3.$$

II. Fractions périodiques.

4. Lemme. *Soit*

$$y = (a, b, c, d, e)$$

une fraction périodique simple. Soient

$$y_i = \frac{E_i}{E'_i},\quad y_{i+1} = \frac{E_{i+1}}{E'_{i+1}}$$

les réduites que l'on obtient en prenant i *périodes et* i + 1 *périodes.*

On a :

1° $$E_{i+1} = E_1 E_i + D_1 E'_i, \quad E'_{i+1} = E'_1 E_i + D'_1 E'_i; \qquad (3)$$

2° $$D'_1 E_{i+1} - D_1 E'_{i+1} = \pm E_i, \quad E'_1 E_{i+1} - E_1 E'_{i+1} = \mp E'_i \ (^*); \qquad (4)$$

3° $$E_i E'_{i+1} - E'_i E_{i+1} = \pm E'_1 \ (^{**}) \qquad (5)$$

5. Remarques. I. D'après les formules (4), *si,* comme on doit le supposer, E_i, E'_i *sont premiers entre eux,* E_{i+1}, E'_{i+1} *sont également premiers entre eux.*

II. *Tous les dénominateurs* E'_i *sont divisibles par* E'_1 (***).

III. Si, dans l'égalité (5), on remplace E_{i+1}, E'_{i+1} par leurs valeurs (3), on trouve la relation

$$E'_1 E_i^2 + (D'_1 - E_1) E_i E'_i - D_1 E'^2_i = \pm E'_1, \qquad (6)$$

à laquelle satisfont, nécessairement, les valeurs de E_i, E'_i. D'ailleurs, par la remarque précédente, cette relation se réduit à

$$E_i^2 + (D'_1 - E_1) E_i \left(\frac{E'_i}{E'_1}\right) - D_1 E'_1 \left(\frac{E'_i}{E'_1}\right)^2 = \pm 1 \qquad (7)$$

IV. Par conséquent, *si quatre nombres entiers* D_1, D'_1, E_1, E'_1, *sont liés par la condition*

$$D_1 E'_1 - D'_1 E_1 = \pm 1,$$

il suffit, pour résoudre en nombres entiers l'équation

$$z^2 + (D'_1 - E_1) zu - D_1 E'_1 u^2 = \pm 1, \qquad (8)$$

de prendre

$$z = E_i, \quad u = \frac{E'_i}{E'_1} \qquad (9)$$

(*) *Nouvelles Annales,* t. VIII, pp. 177, 178.

(**) Conséquence du premier Lemme (1). Dans l'application de la formule, on devra prendre le signe +, si le nombre des termes de la période est *pair*. Et, si ce nombre est *impair,* on prendra le signe + ou le signe —, selon que *i* sera *pair* ou *impair*.

(***) *Loc. cit.,* pp. 178, 179.

6. Vérifications et applications. Soit

$$y = (3, 2, 1, 1).$$

Les premières réduites sont

$$\frac{3}{1}, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{5};$$

de manière que

$$D_1 = 10, \quad D'_1 = 3, \quad E_1 = 17, \quad E'_1 = 5.$$

Les formules (3) donnent ensuite :

$$E_2 = 339, \quad E_3 = 6\,765, \quad E_4 = 134\,921, \quad E_5 = 2\,691\,657, \quad E_6 = 53\,698\,219,$$
$$E'_2 = 100, \quad E'_3 = 1\,995, \quad E'_4 = 39\,800, \quad E'_5 = 794\,005, \quad E'_6 = 15\,840\,500.$$

Conformément à la Remarque II, tous les dénominateurs sont divisibles par $E'_1 = 5$.

En outre (5) :

$$E_1E'_2 - E'_1E_2 = 17.100 - 5.339 = 1\,700 - 1\,695 = 5,$$
$$E_2E'_3 - E'_2E_3 = 339.1\,995 - 100.6\,765 = 676\,305 - 676\,300 = 5,$$
$$E_3E'_4 - E'_3E_4 = 6\,765.39\,800 - 1\,995.134\,921 = 269\,167\,400 - 269\,167\,395 = 5,$$
$$E_4E'_5 - E'_4E_5 = 134\,921.794\,005 - 39\,800.2\,691\,657$$
$$= 107\,127\,948\,605 - 107\,127\,948\,600 = 5,$$
$$E_5E'_6 - E'_5E_6 = 2\,691\,657.15\,840\,500 - 794\,005.53\,698\,219$$
$$= 42\,636\,654\,577\,100 - 42\,636\,654\,577\,095 = 5.$$

D'après les données, l'équation (8) est

$$z^2 - 14zu - 50u^2 = 1.$$

Celle-ci admet, comme solutions :

$$z = 339, \quad u = 20; \qquad z = 6\,743, \quad u = 399; \qquad z = 134\,921, \quad u = 7\,960;$$

etc. (*).

(*) $$339^2 - 14.339.20 - 50.20^2 = 114\,921 - 94\,920 - 20\,000 = 1,$$
$$6\,763^2 - 14.6\,763.399 - 50.399^2 = 45\,738\,169 - 37\,778\,118 - 7\,960\,050 = 1;$$
etc.

7. Généralisation. On peut, évidemment, réunir deux, trois, quatre, ... périodes, et en former une seule. Les propriétés rappelées dans les Paragraphes 4 et 5 peuvent donc être ainsi généralisées :

1° $$E_{nk}E'_{(n+1)k} - E'_{nk}E_{(n+1)k} = \pm E'_k; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

2° *Tous les dénominateurs* E'_{nk} *sont divisibles par* E'_k *et par* E'_n (*).

III. Série de Lamé.

8. La fraction périodique la plus simple est

$$y = (1),$$

dont les réduites successives sont

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$$

Les dénominateurs de ces réduites (**) donnent lieu à la célèbre série de Lamé ou de *Fibonacci* :

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ \ldots\ldots \quad (11)$$

Si u_p, u_q, u_{pq} sont trois termes de cette série, il résulte, de la dernière proposition, que u_{pq} *est divisible par* u_p *et par* u_q*;* propriété signalée par M. Édouard Lucas, et dont il a déduit des conséquences fort importantes (***). On peut l'énoncer autrement :

Les termes de la série de Lamé, pris de trois en trois, sont divisibles par 2; *pris de quatre en quatre, divisibles par* 3; *pris de cinq en cinq, divisibles par* 5; *pris de sept en sept, divisibles par* 13; etc.

(*) Parce que *l'indice nk est une fonction symétrique* de k et de n. Dans l'exemple ci-dessus, $E'_6 = 15\,840\,300$ est divisible par $E'_2 = 100$ et par $E'_3 = 1\,995$.

(**) Et aussi les numérateurs.

(***) *Sur la théorie des nombres premiers*, p. 5 (1876).

9. On sait, et l'on vérifie aisément, que

$$u_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Donc, d'après la propriété précédente :

$$\frac{1}{2^{p(q-1)}} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{pq} - (1-\sqrt{5})^{pq}}{(1+\sqrt{5})^p - (1-\sqrt{5})^p} = \textit{entier},$$

ou

$$(1+\sqrt{5})^{p(q-1)} + (1+\sqrt{5})^{p(q-2)}(1-\sqrt{5})^p + \cdots + (1-\sqrt{5})^{p(q-1)} = \mathfrak{M} \cdot 2^{p(q-1)};$$

ou encore, par le changement de q en $q+1$:

$$(1+\sqrt{5})^{pq} + (1+\sqrt{5})^{p(q-1)}(1-\sqrt{5})^p + \cdots + (1-\sqrt{5})^{pq} = \mathfrak{M} \cdot 2^{pq} \quad . \quad . \quad (13)$$

10. Généralisation. Soit $y = a$, a étant un nombre entier. On trouve, de la même manière,

$$(a+\sqrt{a^2+4})^{pq} + (a+\sqrt{a^2+4})^{p(q-1)}(a-\sqrt{a^2+4})^p + \cdots + (a-\sqrt{a^2+4})^{pq} = \mathfrak{M} . 2^{pq}. \quad (14)$$

Prenons, par exemple :

$$a = 5, \quad p = 2, \quad q = 3.$$

Nous devons trouver

$$(5+\sqrt{29})^6 + (5+\sqrt{29})^4(5-\sqrt{29})^2 + (5+\sqrt{29})^2(5-\sqrt{29})^4 + (5-\sqrt{29})^6 = \mathfrak{M} . 64$$

ou

$$5^6 + 15 . 5^4 . 29 + 15 . 5^2 . 29^2 + 29^3 + (-4)^2(25+29) = \mathfrak{M} . 32,$$

ou

$$5^6 + 15 . 5^4 . 29 + 15 . 5^2 . 29^2 + 29^3 = \mathfrak{M} . 32.$$

Si l'on remplace 5^2 par -7, 29 par -3, cette égalité devient

$$7^3 + 15 . 49 . 3 + 15 . 7 . 9 + 27 = \mathfrak{M} . 32;$$

ou, après quelques autres réductions,

$$7 . 17 + 15 . 17 - 15 + 27 = \mathfrak{M} . 32,$$

ou enfin

$$340 + 12 = \mathfrak{M} . 32.$$

11. Remarque. Dans l'égalité (14), posons

$$a = 2\cot\varphi.$$

Il résulte de cette transformation :

$$a + \sqrt{a^2+4} = 2\cot\frac{1}{2}\varphi, \qquad a - \sqrt{a^2+4} = -2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi;$$

puis

$$\cot^{pq}\frac{\varphi}{2} + (-1)\cot^{p(q-1)}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}^{p}\frac{\varphi}{2} + \cot^{p(q-2)}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}^{2p}\frac{\varphi}{2} + \cdots + (-1)^{pq}\operatorname{tg}^{pq}\frac{\varphi}{2} = \textit{entier};$$

ou, sous une forme un peu plus simple :

$$\cot^{pq}\frac{\varphi}{2} + (-1)^{p}\cot^{p(q-2)}\frac{\varphi}{2} + \cot^{p(q-4)}\frac{\varphi}{2} + (-1)^{3p}\cot^{p(q-6)}\frac{\varphi}{2} + \cdots + (-1)^{pq}\cot^{-pq}\frac{\varphi}{2} = \textit{entier}. \quad (15)$$

Autrement dit :

Si l'arc φ *est tel que sa tangente soit* $\frac{2}{a}$, a *étant un nombre entier, la fonction*

$$\operatorname{tg}^{-pq}\frac{\varphi}{2} + (-1)^{p}\operatorname{tg}^{-p(q-2)}\frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg}^{-p(q-4)}\frac{\varphi}{2} + \cdots + (-1)^{pq}\operatorname{tg}^{pq}\frac{\varphi}{2}$$

se réduit à un nombre entier.

12. Nous donnerons ici les quarante-cinq premiers termes de la série de Lamé. Ceux de ces termes qui sont *premiers* sont désignés par un astérisque.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
u_n	1*	1*	2*	3*	5*	8	13*	21	34	55	89*	144	233	377	610	987

n	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
u_n	1 597*	2 584	4 181*	6 765	10 946	17 711	28 657*	46 368	75 025	121 393

n	27	28	29	30	31	32	33	34
u_n	196 418	317 811	514 229*	832 040	1 346 269*	2 178 309	3 524 578	5 702 887

n	35	36	37	38	39	40
u_n	9 227 465	14 930 352	24 157 817	39 088 169	63 245 986	102 334 155

n	41	42	43	44	45
u_n	165 580 141	267 914 296	433 494 437	701 408 733	1 134 903 170

13. Remarque. D'après les premières valeurs de u_n, il semblerait que u_n *est premier si n est premier*. Mais il n'en est rien :

$$u_{37} = 24\,157\,817 = 149 \,.\, 162\,133;$$

et, comme l'a trouvé M. Lucas :

$$u_{41} = 165\,580\,141 = 2\,789 \,.\, 59\,369.$$

Quant au nombre 433 494 437, *nous pensons* qu'il est premier (*).

IV. Série des inverses.

14. Pour abréger, nous appelons *série des inverses* celle dont les termes sont *les inverses des dénominateurs des réduites d'une fraction continue illimitée*. S'il s'agit, par exemple, de la fraction (1), qui donne lieu à la série de Lamé, la série des inverses est

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{13},\ \frac{1}{21},\ \ldots \qquad (16)$$

15. Lemme. *La série* (16) *est convergente.*

Cette proposition, bien connue (**), résulte, immédiatement, de ce que

$$\lim \frac{\dfrac{1}{u_{n+1}}}{\dfrac{1}{u_n}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,61\ldots$$

16. Théorème. *Toute série des inverses est convergente.*

Soit, sous forme abrégée,

$$x = a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ \ldots;$$

(*) Si nos calculs sont exacts, ce nombre n'admet aucun diviseur premier, d'où résulterait qu'il est premier.

P. S. Dans le beau Mémoire intitulé : *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise*, M. Lucas arrive à cette même conclusion. Ainsi, le nombre considéré est premier.

(**) *Nouvelles Annales* (1864, p. 260; 1878, p. 253); *Nouvelle Correspondance*, t. III, p. 404; etc.

les termes a, b, c, ..., étant, bien entendu, des *nombres entiers*. Les dénominateurs

$$A', B', C', \ldots$$

surpassent, en tout ou en partie, les termes correspondants de la série de Lamé; donc leurs inverses sont, respectivement, égaux ou inférieurs aux termes de la série (16). Conséquemment, la série

$$\frac{1}{A'}, \quad \frac{1}{B'}, \quad \frac{1}{C'}, \ldots$$

est convergente.

17. Problème (*). *Trouver la limite de la somme des termes de rang impair, dans la série* (16).

Soient, dans la série de Lamé, les termes de rang *impair :*

$$1, 2, 5, 13, 34, \ldots$$

Il est facile de vérifier que, v_n étant le terme général de cette série, on a

$$v_n = 3v_{n-1} - v_{n-2} \text{ (**)}; \qquad (17)$$

et, par conséquent,

$$v_n = A\alpha^n + B\beta^n \qquad (18)$$

Dans cette formule, α, β désignent les racines de l'équation

$$x^2 - 3x + 1 = 0; \qquad (19)$$

savoir :

$$\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = q, \quad \beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{q} \text{ (***)} \qquad (20)$$

(*) Proposé par M. E. Lucas (*Nouvelle Correspondance mathématique*, t. II, p. 223). Nous reproduisons ici, en grande partie, la solution publiée dans les *Nouvelles Annales* (1878, p. 253).

(**) Cette relation est une conséquence de celles-ci :

$$u_i = u_{i-1} + u_{i-2}, \quad u_{i-1} = u_{i-2} + u_{i-3}, \quad -u_{i-2} = -u_{i-3} - u_{i-4}.$$

(***) Comme on pouvait s'y attendre d'après la formule (12),

$$\alpha = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2, \quad \beta = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Déterminant, au moyen des *conditions initiales*, les valeurs des constantes A, B, on trouve, au lieu de la formule (18),

$$v_n = \frac{1 + q^{2n-1}}{(1+q)q^{n-1}},$$

ou

$$\frac{1}{v_n} = (1+q)\frac{q^{n-1}}{1+q^{2n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Telle est, sous la forme la plus simple, l'expression du terme général de la série proposée. Conséquemment, si S est la limite cherchée, on a

$$\frac{S}{1+q} = \sum_1^\infty \frac{q^{n-1}}{1+q^{2n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Or, avec les notations de Jacobi et de M. Bertrand,

$$\frac{1}{1+q} + \frac{q}{1+q^3} + \frac{q^2}{1+q^5} + \cdots = \frac{k\omega}{2\pi\sqrt{q}} \text{ (*)}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Donc aussi

$$S = \frac{1+q}{2\pi\sqrt{q}} k\omega;$$

ou, à cause de

$$\frac{1+q}{\sqrt{q}} = \frac{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} = \sqrt{5}:$$

$$S = \frac{\sqrt{5}}{2\pi} k\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

18. Remarque. Par une autre formule connue :

$$\frac{k\omega}{2\pi} = \sqrt{q}\,(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \cdots)^2 \text{ (**)}.$$

(*) *Fundamenta nova...*, p. 103.

(**) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 2.

En égalant les deux valeurs de $\frac{k\omega}{2\pi}$, on a donc cette *identité*, à peu près évidente :

$$\frac{1}{1+q}+\frac{q}{1+q^3}+\frac{q^2}{1+q^5}+\cdots=(1+q^2+q^6+q^{20}+\cdots)^2 \quad \ldots \quad \text{(C)}$$

19. Problème (*). *Trouver la limite de la somme des termes de rang pair, dans la série* (16).

Désignant par S′ cette limite, et opérant comme ci-dessus, on trouve, au lieu de la formule (22),

$$\frac{S'}{\sqrt{5}}=\sum_1^\infty \frac{q^n}{1-q^{2n}} \quad \ldots \quad (25)$$

J'ai cherché, en vain, la sommation de cette nouvelle série, sommation qui paraît dépendre de celle de la *série de Lambert*.

Soit, en effet,

$$\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{1-q^2}+\cdots+\frac{q^n}{1-q^n}+\cdots=f(q); \quad \ldots \quad (26)$$

et, par conséquent,

$$\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^4}{1-q^4}+\cdots+\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}+\cdots=f(q^2).$$

Il résulte, de ces deux égalités,

$$\sum_1^\infty \frac{q^n}{1-q^{2n}}=f(q)-f(q^2). \quad \ldots \quad (27)$$

20. Remarques. I. *Réciproquement,* si la somme de la série (25) était connue, on pourrait, peut-être, en déduire la somme de la série de Lambert. Car si l'on pose

$$\sum_1^\infty \frac{q^n}{1-q^{2n}}=\varphi(q), \quad \ldots \quad (28)$$

de manière que

$$\varphi(q)=f(q)-f(q^2);$$

(*) Également proposé par M. Lucas (*loc. cit.*).

on aura, à cause de $f(q^\infty) = 0$:

$$f(q) = \varphi(q) + \varphi(q^2) + \varphi(q^4) + \varphi(q^8) + \cdots \quad (29)$$

II. La relation (27) équivaut à

$$\frac{q}{1-q^2} + \frac{q^2}{1-q^4} + \frac{q^3}{1-q^6} + \cdots = \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} + \cdots; \quad (D)$$

identité dont la vérification est facile. Elle est, pour ainsi dire, *conjuguée* de celle-ci :

$$\frac{q}{1+q^2} + \frac{q^2}{1+q^4} + \frac{q^3}{1+q^6} + \cdots = \frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \cdots,$$

donnée par Jacobi (*).

En les combinant par addition, on trouve

$$\frac{q}{1-q} + \frac{q^5}{1-q^5} + \frac{q^9}{1-q^9} + \cdots = \frac{q}{1-q^4} + \frac{q^2}{1-q^8} + \frac{q^3}{1-q^{12}} + \cdots \quad (E)$$

Pour démontrer, directement, cette nouvelle identité, il suffit de développer les deux membres, suivant les puissances entières et positives de la variable : de part et d'autre, *le coefficient de* q^n *est le nombre des diviseurs de* n, *ayant la forme* $4\mu + 1$.

V. Généralisation de la série de Lamé.

21. Théorème. *Soit* a *un nombre entier, supérieur à* 2. *Soit* α *une racine de l'équation*

$$x^2 - ax + 1 = 0 \text{ (**)} \quad (30)$$

La quantité

$$y_n = \frac{1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \cdots + \alpha^{2n-2}}{\alpha^{n+1}} + a\alpha^n \quad (31)$$

est un nombre entier.

(*) *Fundamenta*..., p. 103.

(**) L'équation (19) en est un cas particulier.

On a

$$y_n = \frac{1-\alpha^{2n}}{(1-\alpha^2)\alpha^{n+1}} + a\alpha^n, \quad y_{n+1} = \frac{1-\alpha^{2n+2}}{(1-\alpha^2)\alpha^{n+2}} + a\alpha^{n+1};$$

puis

$$y_{n+1} - \alpha y_n = \frac{1-\alpha^{2n+2} - \alpha^2(1-\alpha^{2n})}{(1-\alpha^2)\alpha^{n+2}},$$

ou

$$y_{n+1} = \alpha y_n + \frac{1}{\alpha^{n+2}}.$$

On conclut, de cette relation générale :

$$y_n = \alpha y_{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}};$$

puis, par l'élimination de $\frac{1}{\alpha^{n+1}}$:

$$y_{n+1} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) y_n - y_{n-1},$$

ou

$$y_{n+1} = a y_n - y_{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Ainsi, les valeurs de y_{n+1} forment une suite *récurrente*. De plus, *si* y_1 *et* y_2 *sont des nombres entiers,* y_{n+1} *est un nombre entier.*

Or :

$$y_1 = \frac{1}{\alpha^2} + a\alpha = \beta^2 + a\alpha = (a\beta - 1) + a\alpha = a^2 - 1,$$

$$y_2 = \alpha(a^2-1) + \beta^3 = (a^2-1)\alpha + (a^2-1)\beta - a = a^3 - 2a;$$

β étant la seconde racine de l'équation (30).

Ces valeurs sont donc entières, et le Théorème est démontré (*).

22. Remarque. Le terme général peut être écrit sous la forme :

$$y_n = \frac{1-\alpha^{2n}}{(1-\alpha^2)\alpha^{n+1}} + (\alpha + \beta)\alpha^n;$$

ou, parce que

$$\alpha\beta = 1,$$

(*) Ou plutôt, la *réduction numérique* est effectuée.

sous celle-ci :

$$y_n = \frac{1 - \alpha^{2n}}{(1 - \alpha^2)\alpha^{n+1}} + \alpha^{n+1} + \alpha^{n-1}.$$

La réduction au dénominateur commun donne enfin

$$y_n = \frac{1 - \alpha^{2n+4}}{(1 - \alpha^2)\alpha^{n+1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

Ainsi, *le second membre est un nombre entier* (*).

23. Théorème. *Soient les séries :*

$$\begin{array}{llllll} u_1, & u_2, & u_3, & \ldots, & u_n, & \ldots \\ \Delta u_1, & \Delta u_2, & \Delta u_3, & \ldots, & \Delta u_n, & \ldots \\ \Delta^2 u_1, & \Delta^2 u_2, & \Delta^2 u_3, & \ldots, & \Delta^2 u_n, & \ldots \end{array}$$

Si l'on veut que la troisième reproduise la première (sauf le premier terme de celle-ci), *on doit prendre :*

$$u_n = Aq^{-n} + Bq^n, \qquad q = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

En effet, la condition

$$\Delta^2 u_n = u_{n+1}$$

équivaut à

$$u_{u+2} - 3u_{n+1} + u_n = 0.$$

Cette *loi de récurrence* donne l'équation (19), puis les formules (34).

24. Remarque. On a

$$\frac{1}{u_n} = \frac{q^n}{A + Bq^{2n}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

Si $A = q$ et $B = 1$, on retrouve le terme général de la série (22). De même, pour $A = 1$, $B = -1$, la formule (35) reproduit la série (25).

(*) Transformation analogue à celle que nous avons indiquée précédemment (9).

VI. Fractions tournantes.

25. Soient deux fractions continues, telles que l'on passe de la première à la seconde en effectuant, sur les termes de la première, une permutation tournante. Par exemple :

$$x = a,\ b,\ c,\ d,\ e; \qquad y = b,\ c,\ d,\ e,\ a.$$

Nous dirons que x, y sont des *fractions tournantes*.

26. Théorème. *Soient deux fractions tournantes, et les deux dernières réduites de chacune : le dernier numérateur et l'avant-dernier dénominateur forment une somme constante.*

Pour fixer les idées, considérons les fractions écrites ci-dessus. Soient

$$\frac{A}{A'},\quad \frac{B}{B'},\quad \frac{C}{C'},\quad \frac{D}{D'},\quad \frac{E}{E'}$$

les réduites de x, et

$$\frac{\beta}{\beta'},\quad \frac{\gamma}{\gamma'},\quad \frac{\delta}{\delta'},\quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon'},\quad \frac{\alpha}{\alpha'}$$

les réduites de y. Soit, en outre, la fraction auxiliaire

$$z = a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ a,$$

ou

$$z = a + \frac{1}{y}.$$

Il est visible que les réduites de z sont :

$$a = \frac{A}{A'},\quad a + \frac{\beta'}{\beta} = \frac{B}{B'},\quad a + \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{C}{C'},\quad a + \frac{\delta'}{\delta} = \frac{D}{D'},\quad a + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{E}{E'},\quad a + \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{Ea + D}{E'a + D'}.$$

Par conséquent :

1° $\quad \beta = B',\quad \gamma = C',\quad \delta = D',\quad \varepsilon = E',\quad \alpha = aE' + D';$

2° $\quad \beta' = B - aB',\quad \gamma' = C - aC',\quad \delta' = D - aD',\quad \varepsilon' = E - aE',\quad \alpha' = (Ea + D) - a\alpha;$

3° $\quad \alpha + \varepsilon' = E + D',$

conformément à l'énoncé.

27. Remarques. I. Si, après avoir formé y au moyen de x, on déduit, de y, une fraction z, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le cycle soit complet; les réduites de ces fractions tournantes dépendent les unes des autres, comme on le voit dans le tableau suivant :

Fractions tournantes.	Réduites.
$x = 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 4;$	$\frac{2}{1},\ \frac{7}{3},\ \frac{9}{4},\ \frac{25}{11},\ \frac{109}{48};$
$y = 3,\ 1,\ 2,\ 4,\ 2;$	$\frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{11}{3},\ \frac{48}{13},\ \frac{107}{29};$
$z = 1,\ 2,\ 4,\ 2,\ 3;$	$\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{13}{9},\ \frac{29}{20},\ \frac{100}{69};$
$u = 2,\ 4,\ 2,\ 3,\ 1;$	$\frac{2}{1},\ \frac{9}{4},\ \frac{20}{9},\ \frac{69}{31},\ \frac{89}{40};$
$v = 4,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2;$	$\frac{4}{1},\ \frac{9}{2},\ \frac{31}{7},\ \frac{40}{9},\ \frac{111}{25};$
$x = 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 4.$	$\frac{2}{1},\ \frac{7}{3},\ \frac{9}{4},\ \frac{25}{11},\ \frac{109}{48}.$

En outre :

$$109 + 11 = 107 + 13 = 100 + 20 = 111 + 9.$$

II. Si la fraction x est périodique, y l'est également; et la propriété précédente subsiste pour chacune des périodes.

Exemple :

$$x = (2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 4), \quad y = (3,\ 1,\ 2,\ 4,\ 2).$$

Les réduites de x sont :

$$\frac{2}{1},\ \frac{7}{3},\ \frac{9}{4},\ \frac{25}{11},\ \frac{109}{48},\ \Big|\ \frac{243}{107},\ \frac{838}{369},\ \frac{1\,081}{476},\ \frac{3\,000}{1\,321},\ \frac{13\,081}{5\,760},\ \Big|\ \ldots;$$

celles de y :

$$\frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{11}{3},\ \frac{48}{13},\ \frac{107}{29},\ \Big|\ \frac{369}{100},\ \frac{476}{129},\ \frac{1\,321}{358},\ \frac{5\,760}{1\,561},\ \frac{12\,841}{3\,480},\ \Big|\ \ldots;$$

et l'on a :

$$109 + 11 = 107 + 13, \quad 13\,081 + 1\,321 = 12\,841 + 1\,561, \ \ldots$$

VII. Développement de $\sqrt{A}$.

28. A étant un nombre entier, soit a la partie entière de $\sqrt{A}$. On sait que

$$\sqrt{A} = a\,(f, g, h, \ldots, m, n, p, q, 2a)\ (^*) \quad \ldots \ldots \quad (36)$$

Afin d'obtenir des résultats simples et d'éviter les discussions relatives aux signes, nous supposons, une fois pour toutes, que *le terme q soit de rang pair :* dans le cas contraire, on prendrait, comme période unique, l'ensemble de deux périodes (7). Soit $\frac{Q_1}{Q'_1}$ la réduite répondant à ce terme q : elle surpasse $\sqrt{A}$.

29. Formules fondamentales. Si nous prenons n périodes, nous aurons

$$\sqrt{A} = a, f, g, \ldots, p, q, 2a, f, g, \ldots, p, q, 2a, \ldots, 2a, f, g, \ldots, p, q, a + \sqrt{A}; \quad . \quad (37)$$

car *le diviseur* $(2a, f, g, h, \ldots, m, n, p, q)$ *égale* $a + \sqrt{A}$.

En conséquence, et par le raisonnement habituel,

$$\sqrt{A} = \frac{Q_n(a + \sqrt{A}) + P_n}{Q'_n(a + \sqrt{A}) + P'_n}; \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

puis

$$P_n = AQ'_n - aQ_n, \quad P'_n = Q_n - aQ'_n; \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

puis encore, par l'élimination de a :

$$Q_n^2 - AQ_n'^2 = +1\ (^{**}) \quad \ldots \ldots \quad (40)$$

30. Suite. Soit

$$\frac{Q_{n-1}}{Q'_{n-1}} = a, f, g, \ldots, p, q, 2a, f, g, \ldots, p, q, 2a, f, g, \ldots, p, q;$$

(*) De plus, $q = f$, $p = g$, ...; en sorte que *la période est symétrique*. Mais cette propriété n'a pas d'influence, croyons-nous, sur les recherches suivantes.

(**) $\frac{Q_1}{Q'_1}$ étant de rang *pair*, $\frac{Q_n}{Q'_n}$ l'est également; donc $\frac{Q_n}{Q'_n} > \sqrt{A}$; etc. Nous avons cru devoir rappeler les relations (38), (39), (40), quoiqu'elles soient bien connues.

la période étant prise $n-1$ fois. La réduite qui suivrait, immédiatement, $\frac{Q_{n-1}}{Q'_{n-1}}$, a pour valeur

$$\frac{Q_{n-1}.2a+P_{n-1}}{Q'_{n-1}.2a+P'_{n-1}}.$$

Dans cette expression, remplaçons $2a$ par $a+\frac{Q_1}{Q'_1}$: nous obtiendrons $\frac{Q_n}{Q'_n}$; savoir :

$$\frac{Q_n}{Q'_n}=\frac{Q_{n-1}a+P_{n-1}+\frac{Q_1Q_{n-1}}{Q'_1}}{Q'_{n-1}a+P'_{n-1}+\frac{Q_1Q'_{n-1}}{Q'_1}};$$

ou, par les formules (39),

$$\frac{Q_n}{Q'_n}=\frac{AQ'_1Q'_{n-1}+Q_1Q_{n-1}}{Q'_1Q_{n-1}+Q_1Q'_{n-1}};$$

puis :

$$Q_n=AQ'_1Q'_{n-1}+Q_1Q_{n-1},\quad Q'_n=Q'_1Q_{n-1}+Q_1Q'_{n-1}; \quad\ldots\ldots \quad (41)$$

et, en outre :

$$Q_1Q_n-AQ'_1Q'_n=Q_{n-1},\quad Q'_1Q_n-Q_1Q'_n=-Q'_{n-1}\ (^*) \quad\ldots\ldots \quad (42)$$

31. Autres relations. 1° Dans la seconde des formules (41), changeons n en $n+1$: elle devient

$$Q'_{n+1}=Q'_1Q_n+Q_1Q'_n.$$

Donc, par la combinaison avec la seconde des égalités (42) :

$$Q'_{n+1}=2Q_1.Q'_n-Q'_{n-1} \quad\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Ainsi, comme l'a fait observer M. Lucas (**), *la loi de récurrence des dénominateurs* $Q'_1, Q'_2, Q'_3, \ldots$, *est celle qui régit les cosinus des multiples d'un arc* x.

2° Les formules (41) donnent, comme cas particulier :

$$Q_2=AQ'^2_1+Q_1^2,\quad Q'_2=2Q_1Q'_1 \quad\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

(*) Ces égalités prouvent que Q_n, Q'_n sont premiers entre eux, si, comme on le doit supposer, Q_{n-1}, Q'_{n-1} le sont.

(**) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. III, p. 375.

D'ailleurs,

$$AQ_1'^2 = Q_1^2 - 1;$$

donc

$$Q_2 = 2Q_1^2 - 1 \; (^*) \quad \ldots \ldots \quad (45)$$

3° Réunissant n périodes, pour en former une, on a ces deux formules générales :

$$Q_{2n} = 2Q_n^2 - 1, \quad Q'_{2n} = 2Q_nQ'_n \quad \ldots \ldots \quad (F)$$

32. Remarque. Il résulte, de celles-ci :

$$\frac{Q_{2n}}{Q'_{2n}} = \frac{1}{2}\left[\frac{Q_n}{Q'_n} + A\frac{Q'_n}{Q_n}\right];$$

ou, sous une forme plus simple,

$$x_{2n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right) \quad \ldots \ldots \quad (46)$$

Ainsi, x_n *étant une valeur approchée de* $\sqrt{A}$, *on obtient une nouvelle valeur, plus approchée, en appliquant la formule* (46) (**). Celle-ci, d'après une remarque de M. Bertrand, s'accorde avec ce que donnerait la formule du binôme.

33. Théorème. *Soient* A_1, A_2, A_4, A_8, ... *une suite de nombres entiers, indéfiniment croissants, satisfaisant à la condition*

$$A_{2n} = 2A_n^2 - 1. \quad \ldots \ldots \quad (47)$$

Soient B_1, B_2, B_4, B_8, ..., *une autre suite de nombre entiers, satisfaisant à la condition*

$$B_{2n} = 2A_nB_n. \quad \ldots \ldots \quad (48)$$

(*) Si la période (f, g, h, ..., n, p, q, $2a$) avait un nombre *impair* de termes, la formule serait

$$Q_2 = 2Q_1^2 + 1.$$

(**) Cette formule a été indiquée par M. Serret (*Journal de Liouville,* t. XII), qui ne paraît pas avoir aperçu la première des relations (F).

1°

$$\frac{A_1^2-1}{B_1^2}=\frac{A_2^2-1}{B_2^2}=\frac{A_4^2-1}{B_4^2}=\cdots=C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

2° *Les fractions*

$$\frac{A_1}{B_1},\quad \frac{A_2}{B_2},\quad \frac{A_4}{B_4},\ \cdots$$

tendent, indéfiniment, vers $\sqrt{C}$.

En effet,

$$\frac{A_{2n}^2-1}{B_{2n}^2}=\frac{4A_n^4-4A_n^2}{4A_n^2B_n^2}=\frac{A_n^2-1}{B_n^2}.$$

34. Remarques. I. Ce théorème constitue, pour ainsi dire, une réciproque de toutes les propositions précédentes.

II. Le nombre C peut être *fractionnaire*.

III. *Si ce nombre est entier, les fractions*

$$\frac{A_1}{B_1},\quad \frac{A_2}{B_2},\quad \frac{A_4}{B_4},\ \cdots$$

sont irréductibles.

IV. Dans le premier cas, *ces fractions ne sont pas, nécessairement, des réduites de la fraction continue équivalente à* $\sqrt{C}$.

35. Applications. I.

$$A_1=2,\quad A_2=7,\quad A_4=97,\quad A_8=18\,817,\ \ldots;$$

$$B_1=1,\quad B_2=4,\quad B_4=56,\quad B_8=10\,864,\ \ldots;$$

$$C=\frac{2^2-1}{1}=\frac{7^2-1}{4^2}=\frac{97^2-1}{56^2}=\frac{18\,817^2-1}{10\,864^2}=\cdots=3.$$

En effet,

$$\sqrt{3}=1\,(1,\,2);$$

d'où les réduites :

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1}\ \Big|\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{4}\ \Big|\ \frac{19}{11},\ \frac{26}{15},\ \frac{71}{41},\ \frac{97}{56}\ \Big|\ \frac{265}{153},\ \frac{362}{209},\ \frac{989}{571},\ \frac{1\,351}{780},\ \frac{3\,691}{2\,131},\ \frac{5\,042}{2\,911},\ \frac{13\,775}{7\,953},\ \frac{18\,817}{10\,864}\ \Big|\ \cdots$$

II.

$$A_1 = 8,\quad A_2 = 127,\quad A_4 = 32\,257,\quad A_8 = 2\,081\,028\,097,\ \ldots;$$

$$B_1 = 3,\quad B_2 = 48,\quad B_4 = 12\,192,\quad B_8 = 786\,554\,688,\ \ldots;$$

$$C = \frac{8^2-1}{3^2} = \frac{127^2-1}{48^2} = \frac{32\,257^2-1}{12\,192^2} = \cdots = 7.$$

Si l'on développe $\sqrt{7}$, en fraction continue, on trouve

$$\sqrt{7} = 2\,(1,\ 1,\ 1,\ 4),$$

puis les réduites :

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{8}{3}\ \Big|\ \frac{37}{14},\ \frac{45}{17},\ \frac{82}{31},\ \frac{127}{48}\ \Big|\ \frac{590}{223},\ \frac{717}{271},\ \frac{1\,307}{494},\ \frac{2\,024}{765},\ \frac{9\,403}{3\,554},\ \frac{11\,427}{4\,319},\ \frac{20\,830}{7\,875},\ \frac{32\,257}{12\,192}\ \Big|\ \cdots$$

III.

$$A_1 = 2,\quad A_2 = 7,\quad A_4 = 97,\quad A_8 = 18\,817,\ \ldots;$$

$$B_1 = 3,\quad B_2 = 12,\quad B_4 = 168,\quad B_8 = 32\,592,\ \ldots;$$

$$C = \frac{2^2-1}{3^2} = \frac{7^2-1}{12^2} = \frac{97^2-1}{168^2} = \cdots = \frac{1}{3}.$$

Le développement de $\frac{1}{\sqrt{3}}$, en fraction continue, donne les réduites

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{7},\ \frac{11}{19},\ \frac{15}{26},\ \frac{41}{71},\ \frac{56}{97},\ \frac{153}{257},\ \ldots,$$

parmi lesquelles ne se trouvent pas les fractions

$$\frac{2}{3},\ \frac{7}{12},\ \frac{97}{168},\ \frac{18\,817}{32\,592},\ \ldots\ (*).$$

IV.

$$A_1 = 3,\quad A_2 = 17,\quad A_4 = 577,\quad A_8 = 665\,857,\ \ldots;$$

$$B_1 = 2,\quad B_2 = 12,\quad B_4 = 408,\quad B_8 = 470\,832,\ \ldots;$$

$$C = \frac{3^2-1}{2^2} = \frac{17^2-1}{12^2} = \frac{577^2-1}{408^2} = \frac{665\,857^2-1}{470\,832^2},\ \cdots = 2;$$

etc.

(*) Ces dernières sont égales, respectivement, à

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{3},\ \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{3},\ \frac{97}{56}\cdot\frac{1}{3},\ \frac{18\,817}{10\,864}\cdot\frac{1}{3},\ \cdots$$

VIII. Analyse indéterminée.

36. Des formules

$$Q_n = AQ'_1Q'_{n-1} + Q_1Q_{n-1}, \quad Q'_n = Q'_1Q_{n-1} + Q_1Q'_{n-1}, \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

on déduit

$$Q_n + Q'_n\sqrt{A} = Q_{n-1}(Q_1 + Q'_1\sqrt{A}) + Q'_{n-1}\sqrt{A}\,(Q_1 + Q'_1\sqrt{A}),$$

ou

$$Q_n + Q'_n\sqrt{A} = (Q_{n-1} + Q'_{n-1}\sqrt{A})(Q_1 + Q'_1\sqrt{A}) \,. \quad \ldots \ldots \quad (50)$$

Par conséquent :

1° *Les binômes*

$$Q_1 + Q'_1\sqrt{A}, \quad Q_2 + Q'_2\sqrt{A}, \quad Q_3 + Q'_3\sqrt{A}, \ldots$$

forment une progression par quotient;

2°

$$Q_n + Q'_n\sqrt{A} = (Q_1 + Q'_1\sqrt{A})^n \text{ (*)}; \quad \ldots \ldots \quad (51)$$

3°

$$Q_n = \frac{1}{2}\left[(Q_1 + Q'_1\sqrt{A})^n + (Q_1 - Q'_1\sqrt{A})^n\right], \quad \ldots \ldots \quad (52)$$

$$Q'_n = \frac{1}{2\sqrt{A}}\left[(Q_1 + Q'_1\sqrt{A})^n - (Q_1 - Q'_1\sqrt{A})^n\right]; \quad \ldots \ldots \quad (53)$$

4° *L'équation*

$$y^2 - Az^2 = +1$$

est vérifiée par

$$y = Q_n, \quad z = Q'_n.$$

37. Problème. *Trouver tous les nombres entiers tels que le carré de chacun d'eux soit la somme de deux carrés consécutifs.*

L'équation

$$x^2 = y^2 + (y+1)^2$$

(*) Cette démonstration me paraît plus simple que celle qui a été donnée par M. Serret, d'après Lagrange (*Cours d'Algèbre supérieure*, 3me édit., t. I, p. 75).

étant mise sous la forme

$$2x^2 - (2y + 1)^2 = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

on a, par les formules connues :

$$x = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}+1)^{2n-1} + (\sqrt{2}-1)^{2n-1}\right], \quad y = \frac{1}{4}\left[(\sqrt{2}+1)^{2n-1} - (\sqrt{2}-1)^{n-1} - 2\right]. \quad (55)$$

Le problème, on le voit, est des plus simples; mais il fait découvrir des propriétés intéressantes.

38. Écrivons ainsi la première expression :

$$u_n = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}(3 + 2\sqrt{2})^{n-1} + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}(3 - 2\sqrt{2})^{n-1} \quad \ldots\ldots \quad (56)$$

La somme des binômes

$$3 + 2\sqrt{2}, \quad 3 - 2\sqrt{2}$$

est 6; leur produit est 1. Par conséquent, la suite

$$u_1, \quad u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

est récurrente; et l'on a

$$u_n = 6u_{n-1} - u_{n-2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

Le calcul direct donne

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 5;$$

après quoi l'on trouve

$$u_3 = 29, \quad 4_4 = 169, \quad u_5 = 985, \quad u_6 = 5\,741, \ldots \text{ (*)}.$$

39. Les nombres

$$1, \quad 5, \quad 29, \quad 169, \quad 985, \quad 5\,741, \ldots$$

jouissent d'une propriété remarquable.

(*) Moret-Blanc (*Nouvelles Annales*, 1882, p. 261).

On a

$$5 = 1^2 + 2^2, \quad 29 = 2^2 + 5^2, \quad 169 = 5^2 + 12^2, \quad 985 = 12^2 + 29^2, \quad 5\,741 = 29^2 + 70^2, \ \ldots$$

On est donc conduit à supposer

$$u_{n+1} = v_n^2 + v_{n+1}^2, \qquad \ldots \qquad (58)$$

en appelant v_n le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite récurrente

$$1, \quad 2, \quad 5, \quad 12, \quad 29, \quad 70, \ \ldots$$

dans laquelle

$$v_{n+1} = 2v_n + v_{n-1} \qquad \ldots \qquad (59)$$

Cette équation donne

$$v_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right]. \qquad \ldots \qquad (60)$$

A cause de

$$u_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{2n-1} - (1-\sqrt{2})^{2n-1}\right], \qquad \ldots \qquad (55)$$

on doit, *si la relation* (58) *est générale,* avoir, *identiquement :*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{2n-1} - (1-\sqrt{2})^{2n-1}\right] \\ &= \frac{1}{8}\left\{\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right]^2 + \left[(1+\sqrt{2})^{n-1} - (1-\sqrt{2})^{n-1}\right]^2\right\}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (61)$$

40. Vérification. Le second membre égale

$$\frac{1}{8}\left[(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n} + (1+\sqrt{2})^{2n-2} + (1-\sqrt{2})^{2n-2} - 2(-1)^n - 2(-1)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[(1+\sqrt{2})^{2n-2}(4+2\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})^{2n-2}(4-2\sqrt{2})\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[(1+\sqrt{2})^{2n-2}(\sqrt{2}+1) + (1-\sqrt{2})^{2n-2}(\sqrt{2}-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{2n-1} - (1-\sqrt{2})^{2n-1}\right].$$

41. L'identité (61) étant vérifiée, les hypothèses précédentes le sont également; et, en conséquence :

1° *Le nombre*

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{2n-1}-(1-\sqrt{2})^{2n-1}\right]$$

est la somme des carrés de deux nombres entiers;

2° *Si le carré d'un nombre entier égale la somme de deux carrés consécutifs, ce nombre est la somme de deux carrés.*

42. Remarques. I. A cause des formules (60) et (55) :

1° *Si*

$$n = 2k-1, \quad v_n = u_k;$$

2° *Si*

$$n = 2k, \quad v_{n-1} = u_k.$$

Ainsi, *les nombres* v, *de rang impair, ne diffèrent pas des nombres* u.

D'après cela, reprenons l'égalité

$$u_{n+1} = v_n^2 + v_{n+1}^2 \quad \ldots\ldots \quad (58)$$

Si n est *impair*, et égal à $2k-1$,

$$v_n^2 = (u_k)^2.$$

Mais, par hypothèse, u_k^2 est la somme de deux carrés consécutifs, t^2, $(t+1)^2$. Conséquemment :

$$u_{n+1} = t^2 + (t+1)^2 + v_{n+1}^2 \quad \ldots\ldots \quad (62)$$

Si n est *pair*, et égal à $2k$,

$$v_{n+1}^2 = u_{k+1}^2 = s^2 + (s+1)^2;$$

puis

$$u_{n+1} = s^2 + (s+1)^2 + v_n^2. \quad \ldots\ldots \quad (63)$$

Nous pouvons donc résumer ainsi les propositions précédentes :

Si le carré d'un nombre entier est la somme de deux carrés consécutifs, *ce nombre, égal à la somme de deux carrés, est égal, aussi, à la somme de trois carrés, dont deux au moins sont consécutifs* (*).

II. Les valeurs de $2y + 1$, satisfaisant à l'équation (54), forment la suite récurrente :

$$1, \quad 7, \quad 41, \quad 239, \quad 1\,393, \quad 8\,119, \quad \ldots$$

On en conclut les valeurs de y :

$$0, \quad 3, \quad 20, \quad 119, \quad 696, \quad 4\,059, \quad \ldots$$

Les valeurs correspondantes de x sont, comme on l'a vu ci-dessus (39) :

$$1, \quad 5, \quad 29, \quad 169, \quad 985, \quad 5\,741, \quad \ldots$$

En effet, conformément à l'énoncé du problème :

$$1^2 = 0^2 + 1^2, \quad 5^2 = 3^2 + 4^2, \quad 29^2 = 20^2 + 21^2, \quad 169^2 = 119^2 + 120^2,$$
$$985^2 = 696^2 + 697^2, \quad 5\,741^2 = 4\,059^2 + 4\,060^2, \quad \ldots \text{ (**)}.$$

43. Identités. D'après le paragraphe précédent :

$$u_{2k} = (u_k)^2 + (v_{2k})^2, \quad u_{2k+1} = (v_{2k})^2 + (u_{k+1})^2 \quad \ldots\ldots\ldots \tag{64}$$

D'un autre côté :

$$\left.\begin{aligned} u_{2k} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}+1)^{4k-1} + (\sqrt{2}-1)^{4k-1}\right], \\ u_{2k+1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}+1)^{4k+1} + (\sqrt{2}-1)^{4k+1}\right]; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \tag{55}$$

$$\left.\begin{aligned} (u_k)^2 &= \frac{1}{16}\left\{\left[(\sqrt{2}+1)^{2k-1} - (\sqrt{2}-1)^{2k-1} - 2\right]^2 + \left[(\sqrt{2}+1)^{2k-1} - (\sqrt{2}-1)^{2k-1} + 2\right]^2\right\}, \\ (u_{k+1})^2 &= \frac{1}{16}\left\{\left[(\sqrt{2}+1)^{2k+1} - (\sqrt{2}-1)^{2k+1} - 2\right]^2 + \left[(\sqrt{2}+1)^{2k+1} - (\sqrt{2}-1)^{2k+1} + 2\right]^2\right\}; \end{aligned}\right\} . \tag{55}$$

$$(v_{2k})^2 = \frac{1}{8}\left[(\sqrt{2}+1)^{2k} - (\sqrt{2}-1)^{2k}\right]^2. \quad \ldots\ldots\ldots \tag{60}$$

(*) Cet énoncé complète un curieux théorème de M. Gerono (*Nouvelles Annales*, 1882, p. 432).

(**) Les vérifications se font rapidement, au moyen de la *Table des quarrés et des cubes, … par C. Séguin l'aîné (Paris, an IX)*.

Par conséquent, les égalités (64) deviennent :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}+1)^{4k-1}+(\sqrt{2}-1)^{4k-1}\right]=\dfrac{1}{16}\left[(\sqrt{2}+1)^{2k-1}-(\sqrt{2}-1)^{2k-1}-2\right]^2\\ +\dfrac{1}{16}\left[(\sqrt{2}+1)^{2k-1}-(\sqrt{2}-1)^{2k-1}+2\right]^2+\dfrac{1}{8}\left[(\sqrt{2}+1)^{2k}-(\sqrt{2}-1)^{2k}\right]^2,\end{array}\right\}. \quad (65)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}+1)^{4k+1}+(\sqrt{2}-1)^{4k+1}\right]=\dfrac{1}{16}\left[(\sqrt{2}+1)^{2k+1}-(\sqrt{2}-1)^{2k+1}-2\right]^2\\ +\dfrac{1}{16}\left[(\sqrt{2}+1)^{2k+1}-(\sqrt{2}-1)^{2k+1}+2\right]^2+\dfrac{1}{8}\left[(\sqrt{2}+1)^{2k}-(\sqrt{2}-1)^{2k}\right]^2.\end{array}\right\}. \quad (66)$$

Ces identités, assez curieuses, complètent celle qui a été donnée au n° 40 (*). Elles sont comprises dans l'identité *unique* :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}+1)^{2n-1}+(\sqrt{2}-1)^{2n-1}\right]=\dfrac{1}{16}\left[(\sqrt{2}+1)^{n-1}-(\sqrt{2}-1)^{n-1}-2\right]^2\\ +\dfrac{1}{16}\left[(\sqrt{2}+1)^{n-1}-(\sqrt{2}-1)^{n-1}+2\right]^2+\dfrac{1}{8}\left[(\sqrt{2}+1)^{n}-(\sqrt{2}-1)^{n}\right]^2;\end{array}\right\}. \quad (G)$$

dont la vérification est facile (**).

44. Généralisation. Soit, au lieu de l'équation (54),

$$Ax^2 - z^2 = 1; \quad \ldots \quad (67)$$

d'où

$$x = \frac{1}{2\sqrt{A}}\left[(p\sqrt{A}+q)^{2n-1}+(p\sqrt{A}-q)^{2n-1}\right], \quad \ldots \quad (68)$$

en supposant

$$Ap^2 - q^2 = 1. \quad \ldots \quad (69)$$

Essayons si l'on peut avoir, *identiquement :*

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{2\sqrt{A}}\left[(p\sqrt{A}+q)^{2n-1}+(p\sqrt{A}-q)^{2n-1}\right]=\dfrac{1}{4A^2}\left[(p\sqrt{A}+q)^{n-1}-(p\sqrt{A}-q)^{n-1}-2\right]^2\\ +\dfrac{1}{4A^2}\left[(p\sqrt{A}+q)^{n-1}-(p\sqrt{A}-q)^{n-1}+2\right]^2+\dfrac{1}{4A^2}\left[(p\sqrt{A}+q)^{n}-(p\sqrt{A}-q)^{n}\right]^2.\end{array}\right\} \quad (70)$$

(*) On ne doit pas oublier que *chacun des termes est un nombre entier.*

(**) Dans celle-ci, les termes ne sont pas nécessairement *entiers*. Si, par exemple, $n = 1$, on a :

$$1 = \frac{4}{16} + \frac{4}{16} + \frac{4}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}.$$

Le second membre, multiplié par $2A^2$, devient

$$\begin{aligned}
&\left[(p\sqrt{A}+q)^{n-1}-(p\sqrt{A}-q)^{n-1}\right]^2+4+\left[(p\sqrt{A}+q)^n-(p\sqrt{A}-q)^n\right]^2\\
&=(p\sqrt{A}+q)^{2n-2}+(p\sqrt{A}-q)^{2n-2}+(p\sqrt{A}+q)^{2n}+(p\sqrt{A}-q)^{2n}\\
&=(p\sqrt{A}+q)^{2n-2}(Ap^2+q^2+1+2pq\sqrt{A})+(p\sqrt{A}-q)^{2n-2}(Ap^2+q^2+1-2pq\sqrt{A})\\
&=2(p\sqrt{A}+q)^{2n-2}(Ap^2+pq\sqrt{A})+2(p\sqrt{A}-q)^{2n-2}(Ap^2-pq\sqrt{A})\\
&\qquad=2p\sqrt{A}\left[(p\sqrt{A}+q)^{2n-1}+(p\sqrt{A}-q)^{2n-1}\right].
\end{aligned}$$

La relation (70) se réduit donc à

$$A=2p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Substituant dans (69), on trouve

$$2p^3=q^2+1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

ou

$$(2p)^3=(2q)^2+4.$$

D'après Fermat, les seuls nombres entiers qui vérifient cette équation sont $p=1$, $q=1$ (*).

Mais comme les nombres A, p, q, satisfaisant aux conditions (69), (71), (72), sont *admissibles, quoique irrationnels,* nous avons l'*identité* suivante, laquelle remplace l'égalité (70) :

$$\left.\begin{aligned}
&4\sqrt{q^2+1}\left[(\sqrt{q^2+1}+q)^{2n-1}+(\sqrt{q^2+1}-q)^{2n-1}\right]\\
&=2\left[(\sqrt{q^2+1}+q)^n-(\sqrt{q^2+1}-q)^n\right]^2+\left[(\sqrt{q^2+1}+q)^{n-1}-(\sqrt{q^2+1}-q)^{n-1}-2\right]^2\\
&\qquad+\left[(\sqrt{q^2+1}+q)^{n-1}-(\sqrt{q^2+1}-q)^{n-1}+2\right]^2.
\end{aligned}\right\}\quad (\text{H})$$

Dans celle-ci, *q est une quantité quelconque.*

45. Application. Soient

$$n=2,\quad q=\sqrt{15}.$$

(*) Legendre, *Théorie des nombres*, t. II, p. 12; Brassine, *Précis des œuvres mathématiques de Fermat*, p. 164; Pepin, *Journal de Mathématiques* (1875), p. 345. Je dois ces renseignements, qui m'avaient échappé, à l'obligeance de M. *Realis*.

On doit trouver

$$16\left[(4+\sqrt{15})^3+(4-\sqrt{15})^3\right]=2\left[(4+\sqrt{15})^2-(4-\sqrt{15})^2\right]^2$$
$$+\left[(4+\sqrt{15})-(4-\sqrt{15})-2\right]^2+\left[(4+\sqrt{15})-(4-\sqrt{15}+2)\right]^2,$$

ou

$$32\left[4^3+3.4.15\right]=2\left[16\sqrt{15}\right]^2+(2\sqrt{15}-2)^2+(2\sqrt{15}+2)^2,$$

ou

$$128.61=2.256.15+8.15+8,$$

ou enfin

$$61=4.15+1.$$

46. Suite. Pour rendre l'identité (H) plus symétrique, posons

$$q=\frac{c}{b},\quad \sqrt{q^2+1}=\frac{1}{b}\sqrt{b^2+c^2}=\frac{a}{b}:$$

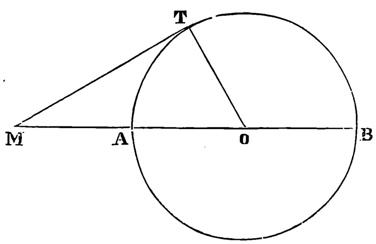
a, b, c sont trois nombres vérifiant la condition

$$a^2=b^2+c^2. \qquad \ldots \ldots \ldots \tag{73}$$

Notre identité se transforme en celle-ci :

$$\left.\begin{aligned}&4a\left[(a+c)^{2n-1}+(a-c)^{2n-1}\right]=2\left[(a+c)^n-(a-c)^n\right]^2\\&+\left[(a+c)^{n-1}-(a-c)^{n-1}-2b^{n-1}\right]^2b^2+\left[(a+c)^{n-1}-(a-c)^{n-1}+2b^{n-1}\right]^2b^2.\end{aligned}\right\} \tag{K}$$

47. Remarques. I. D'après l'égalité (73), a, b, c représentent les côtés d'un triangle rectangle. Ces côtés satisfont donc à l'identité (K).



II. *Soit un cercle* O, *ayant pour rayon* b. *Si, d'un point extérieur* M, *on mène une tangente* MT *et le diamètre* MAOB, *on aura*

$$4\overline{OM}\left[\overline{MB}^{2n-1}+\overline{MA}^{2n-1}\right]=2\left[\overline{MB}^n-\overline{MA}^n\right]^2$$
$$+\left[\overline{MB}^{n-1}-\overline{MA}^{n-1}-2\overline{MT}^{n-1}\right]^2\overline{MT}^2+\left[\overline{MB}^{n-1}-\overline{MA}^{n-1}+2\overline{MT}^{n-1}\right]^2\overline{MT}^2 \ (*)$$

(*) Sauf les célèbres théorèmes de *Matthieu Stewart*, il n'en est guère dans l'énoncé desquels certaines longueurs sont élevées à des puissances quelconques. A ce point de vue, la deuxième propriété, malgré sa grande simplicité, me semble assez curieuse.

III. Si les nombres a, b, c sont entiers, l'égalité (K) peut être formulée ainsi :

Le nombre entier

$$4a\left[(a+c)^{2n-1}+(a-c)^{2n-1}\right]$$

est la somme de quatre carrés, dont deux sont égaux (*), *et dont les deux autres sont divisibles par* b^2.

48. Théorème. *Si trois nombres,* a, b, c, *satisfont à la relation* (K), *ces nombres mesurent les côtés d'un triangle rectangle;* c'est-à-dire que

$$a^2=b^2+c^2.$$

La relation (K) peut être écrite ainsi :

$$4b^{2n}+\left[(a+c)^{n-1}-(a-c)^{n-1}\right]^2b^2+\left[(a+c)^n-(a-c)^n\right]^2-2a\left[(a+c)^{2n-1}+(a-c)^{2n-1}\right]=0;$$

puis sous cette forme un peu plus simple :

$$4b^{2n}+\left[(a+c)^{n-1}-(a-c)^{n-1}\right]^2b^2-(a^2-c^2)\left[(a+c)^{2n-2}+(a-c)^{2n-2}\right]-2(a^2-c^2)^n=0. \quad (74)$$

Supposons que a, c soient donnés, et que a surpasse c. D'après le théorème de Descartes, l'équation a *une seule racine positive;* savoir, $b^2=a^2-c^2$. Le théorème est donc démontré.

49. Remarque. Pour diviser le premier membre par $b^2+c^2-a^2$, on peut le transformer ainsi :

$$4\left[(b^2)^n-(a^2-c^2)^n\right]+\left[(a+c)^{n-1}-(a-c)^{n-1}\right]^2(b^2+c^2-a^2)+4(a^2-c^2)^n$$
$$+\left[(a+c)^{n-1}-(a-c)^{n-1}\right]^2(a^2-c^2)-\left[(a+c)^{2n-2}+(a-c)^{2n-2}\right](a^2-c^2)-2(a^2-c^2)^n.$$

(*) Par exemple, en prenant $a=5$, $b=3$, $c=4$:

$$20(9^7+1)=2.6\,560^2+2\,022^2+2\,346^2;$$

ou, plus simplement,

$$5(9^7+1)=2.3\,280^2+1\,011^2+1\,173^2.$$

Il est visible que cette réduction a lieu dans tous les cas. Autrement dit :
Le nombre entier

$$a\left[(a+c)^{2n-1}+(a-c)^{2n-1}\right]$$

est la somme de quatre carrés; etc.

L'ensemble des deux dernières lignes égale

$$2(a^2-c^2)^n-2(a^2-c^2)^{n-1}(a^2-c^2)=0.$$

Donc l'équation (74) devient

$$4\left[(b^2)^n-(a^2-c^2)^n\right]+\left[(a+c)^{n-1}-(a-c)^{n-1}\right]^2(b^2+c^2-a^2)=0; \quad . \quad . \quad (75)$$

et, suppression faite du facteur $b^2-(a^2-c^2)$, elle se réduit à

$$4\left[b^{2n-2}+b^{2n-4}(a^2-c^2)+b^{2n-6}(a^2-c^2)^2+\cdots+(a^2-c^2)^{n-1}\right]+\left[(a+c)^{n-1}-(a-c)^{n-1}\right]^2=0. \quad (76)$$

Celle-ci est impossible si, comme on le peut admettre, a surpasse c.

IX. Développements en séries.

50. Développement de $\sqrt{A}$. Reprenons encore les formules

$$Q_n=AQ'_1Q'_{n-1}+Q_1Q_{n-1},\quad Q'_n=Q'_1Q_{n-1}+Q_1Q'_{n-1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Il en résulte, par l'élimination de Q_1,

$$Q_nQ'_n-Q'_{n-1}Q_n=Q'_1(Q^2_{n-1}-AQ'_{n-1}).$$

Mais

$$Q^2_{n-1}-AQ'^2_{n-1}=+1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Donc

$$Q_{n-1}Q'_n-Q'_{n-1}Q_n=Q'_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Cette relation montre, une fois de plus, que les dénominateurs Q'_2, Q'_3, ... sont divisibles par Q'_1.

En l'écrivant ainsi :

$$\frac{Q_n}{Q'_n}-\frac{Q_{n-1}}{Q'_{n-1}}=-\frac{Q'_1}{Q'_{n-1}Q'_n},$$

on en conclut :

$$\frac{Q_2}{Q'_2} - \frac{Q_1}{Q'_1} = -\frac{Q'_1}{Q'_1 Q'_2},$$
$$\frac{Q_3}{Q'_3} - \frac{Q_2}{Q'_2} = -\frac{Q'_1}{Q'_2 Q'_3},$$
$$\frac{Q_4}{Q'_4} - \frac{Q_3}{Q'_3} = -\frac{Q'_1}{Q'_3 Q'_4},$$
$$\ldots\ldots\ldots;$$

puis, par le raisonnement connu,

$$\sqrt{A} = \frac{Q_1}{Q'_1} - Q'_1 \left[\frac{1}{Q'_1 Q'_2} + \frac{1}{Q'_2 Q'_3} + \frac{1}{Q'_3 Q'_4} + \cdots\right] \quad \ldots\ldots \quad \text{(L)}$$

51. Autre développement. Des formules

$$Q_{2n} = 2Q_n^2 - 1, \quad Q'_{2n} = 2Q_n Q'_n, \quad \ldots\ldots \quad \text{(F)}$$

on déduit :

$$Q'_n Q_{2n} - Q_n Q'_{2n} = -Q'_n, \quad \ldots\ldots \quad \text{(78)}$$

égalité qui généralise celle-ci :

$$Q'_1 Q_2 - Q_1 Q'_2 = -Q'_1 \;(^*) \quad \ldots\ldots \quad \text{(77)}$$

Un calcul semblable au précédent donne ensuite :

$$\sqrt{A} = \frac{Q_1}{Q'_1} - \left[\frac{1}{Q'_2} + \frac{1}{Q'_4} + \frac{1}{Q'_8} + \frac{1}{Q'_{16}} + \cdots\right]. \quad \ldots\ldots \quad \text{(M)}$$

Voici donc deux développements de $\sqrt{A}$, très différents, et dont le second est beaucoup plus convergent que le premier (**).

(*) Plus exactement, elles rentrent l'une dans l'autre, à condition que l'on prenne n périodes pour en former une.

(**) La convergence du premier développement l'emporte, déjà, sur celle de la série si connue :

$$\frac{a}{1} + \frac{1}{F'} - \frac{1}{F'G'} + \frac{1}{G'H'} - \cdots = \sqrt{A}.$$

32. Application. Soit $A = 7$. On a

$$\sqrt{7} = 2\,(1,\,1,\,1,\,4);$$

et, par conséquent :

$$\frac{Q_1}{Q'_1} = \frac{8}{3},\quad \frac{Q_2}{Q'_2} = \frac{127}{48},\quad \frac{Q_3}{Q'_3} = \frac{2\,024}{765},\quad \frac{Q_4}{Q'_4} = \frac{32\,257}{12\,192},\quad \frac{Q_5}{Q'_5} = \frac{514\,088}{194\,307},\quad \frac{Q_6}{Q'_6} = \frac{8\,193\,151}{3\,096\,720},\ \ldots$$

La formule (L) donne ensuite

$$\sqrt{7} = \frac{8}{3} - 3\left[\frac{1}{3.48} + \frac{1}{48.765} + \frac{1}{765.12\,192} + \frac{1}{12\,192.194\,307} + \frac{1}{194\,307.3\,096\,720} + \cdots\right]$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1.16} + \frac{1}{16.255} + \frac{1}{255.4\,064} + \frac{1}{4\,064.64\,769} + \frac{1}{64\,769.1\,032\,240} + \cdots\right].$$

Pour appliquer la formule (M), il suffit d'observer que

$$Q'_8 = 2Q_4 . Q'_4 = 2.32\,257.12\,192 = 786\,554\,688.$$

On trouve, ainsi,

$$\sqrt{7} = \frac{8}{3} - \left[\frac{1}{48} + \frac{1}{12\,192} + \frac{1}{786\,554\,688} + \cdots\right].$$

Le terme qui suivrait le troisième est bien inférieur au *quart du carré de celui-ci* (*). Si l'on réduit en décimales, on peut donc conserver les unités du *dix-huitième* ordre. Effectuant, on a :

$$\frac{8}{3} = 2{,}666\,666\,666\,666\,666\,666 +$$

$$\frac{1}{48} = 0{,}020\,833\,333\,333\,333\,333 -$$

$$\frac{1}{12\,192} = 0{,}000\,082\,020\,997\,375\,328 -$$

$$\frac{1}{786\,554\,688} = 0{,}000\,000\,001\,271\,367\,414 -$$

$$\sqrt{7} = 2{,}645\,751\,311\,064\,590\,591.$$

(*) En vertu de la relation

$$Q'_{2n} = 2Q_nQ'_n,$$

dans laquelle Q_n surpasse $2Q'_n$.

53. Remarque. La formule (M) peut être écrite ainsi :

$$\frac{Q'_1}{Q'_2} + \frac{Q'_1}{Q'_4} + \frac{Q'_1}{Q'_8} + \cdots = Q_1 - Q'_1 \sqrt{A}.$$

A cause de

$$Q_1^2 - AQ_1'^2 = +1, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (40)$$

le second membre équivaut à

$$Q_1 - \sqrt{Q_1^2 - 1}.$$

De plus, les termes du premier membre sont égaux, respectivement, à

$$\frac{Q'_1}{Q'_2}, \quad \frac{Q'_1}{Q'_2} \cdot \frac{Q'_2}{Q'_4}, \quad \frac{Q'_1}{Q'_2} \cdot \frac{Q'_2}{Q'_4} \cdot \frac{Q'_4}{Q'_8}, \ldots;$$

ou, d'après la relation

$$\frac{Q'_n}{Q'_{2n}} = \frac{1}{2Q_n}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (F)$$

égaux à

$$\frac{1}{2Q_1}, \quad \frac{1}{2Q_1 . 2Q_2}, \quad \frac{1}{2Q_1 . 2Q_2 . 2Q_4}, \ldots$$

Si donc nous posons

$$Z_n = 2Q_n, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (79)$$

nous aurons, au lieu de l'égalité (M),

$$\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_1 Z_2} + \frac{1}{Z_1 Z_2 Z_4} + \cdots = \frac{1}{2}\left(Z_1 - \sqrt{Z_1^2 - 4}\right) \quad \ldots \ldots \quad (N)$$

Cette formule remarquable est due, je pense, à M. le capitaine Moreau (*). Pour l'appliquer, on doit, après avoir pris arbitrairement $Z_1 > 2$, faire usage de la relation

$$Z_{2n} = Z_n^2 - 2 \ (^{**}), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (80)$$

transformée de

$$Q_{2n} = 2Q_n^2 - 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (F)$$

(*) *Nouvelles Annales*, 1878, pp. 139 et 156.

(**) Dans la théorie des équations réciproques, si l'on fait, suivant l'usage,

$$Z_n = x^n + x^{-n},$$

on a aussi :

$$Z_{2n} = Z_n^2 - 2.$$

54. Application. Soit $Z_1 = 3$; et, par conséquent,

$$Z_2 = 7, \quad Z_4 = 47, \quad Z_8 = 2\,207, \quad Z_{16} = 4\,870\,847, \ldots;$$

puis

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{3.7.47} + \frac{1}{3.7.47.2\,207} + \frac{1}{3.7.47.2\,207.4\,870\,847} + \cdots = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5});$$

résultat curieux obtenu par M. Lucas (*).

55. Autre remarque. On sait que

$$\sqrt{N^2 - 1} = N - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2N - 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2N - 2 + \cdots}}}}.$$

Donc

$$Q_1 - \sqrt{Q_1^2 - 1} = 1 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2Q_1 - 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2Q_1 - 2 + \cdots}}}},$$

ou

$$\frac{1}{2}\left(Z_1 - \sqrt{Z_1^2 - 4}\right) = 1 - \cfrac{1}{Z_1 - 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{Z_1 - 2 + \cdots}}};$$

ou encore, par une transformation connue,

$$\frac{1}{2}\left(Z_1 - \sqrt{Z_1^2 - 4}\right) = \cfrac{1}{Z_1 - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{Z_1 - 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{Z_1 - 2 + \cdots}}}}}.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 1878, p. 138.

Par conséquent :

La fraction continue périodique

$$x = 0,\ Z_1 - 1\ (1,\ Z_1 - 2),$$

dans laquelle Z_1 *surpasse* 2, *équivaut à la série*

$$\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_1 Z_2} + \frac{1}{Z_1 Z_2 Z_4} + \frac{1}{Z_1 Z_2 Z_4 Z_8} + \cdots\ (*).$$

X. Relation entre deux séries.

56. Nous avons trouvé :

$$Q'_{n+1} = 2Q_1 Q'_n - Q'_{n-1}, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (43)$$

$$\frac{1}{Q'_1 Q'_2} + \frac{1}{Q'_2 Q'_3} + \frac{1}{Q'_3 Q'_4} + \cdots = \frac{Q_1 - Q'_1\sqrt{A}}{Q_1'^2}, \quad \dots\dots\dots \quad (L)$$

$$\frac{1}{Q'_2} + \frac{1}{Q'_4} + \frac{1}{Q'_8} + \cdots = \frac{Q_1 - Q'_1\sqrt{A}}{Q'_1}. \quad \dots\dots\dots \quad (M)$$

De plus, à cause de

$$Q_1 = \frac{Q'_2}{2Q'_1}, \qquad A = \frac{Q_1^2 - 1}{Q_1'^2},$$

(*) Signalons, ici, une particularité assez curieuse.
Si l'on suppose

$$Z_1 = 2\cos\omega,$$

on trouve

$$Z_2 = 2\cos 2\omega, \quad Z_4 = 2\cos 4\omega, \quad Z_8 = 2\cos 8\omega, \ \dots;$$

puis, par l'application *illégitime* de la formule (N) :

$$\frac{1}{2\cos\omega} + \frac{1}{2^2 . \cos\omega\cos 2\omega} + \frac{1}{2^3\cos\omega . \cos 2\omega . \cos 4\omega} + \cdots = \cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega.$$

Ce résultat, qu'admettraient certains Disciples de Wronski, est *complètement absurde*.

la formule (43) est la même chose que

$$Q'_{n+1} = \frac{Q'_2}{Q'_1} Q'_n - Q'_{n-1}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (81)$$

et

$$Q_1 - Q'_1 \sqrt{A} = \frac{Q'_2}{2Q'_1} - \frac{\sqrt{Q'^2_2 - 4Q'^2_1}}{2Q'_1}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (82)$$

Remplaçant Q'_n par v_n, et représentant par S et $\sum$ les sommes des deux séries, nous avons :

$$v_{n+1} = \frac{v_2}{v_1} v_n - v_{n-1}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (83)$$

$$S = \frac{1}{v_1 v_2} + \frac{1}{v_2 v_3} + \frac{1}{v_3 v_4} + \cdots = \frac{1}{2v_1^3}\left[v_2 - \sqrt{v_2^2 - 4v_1^2}\right], \quad \ldots \ldots \quad (84)$$

$$\sum = \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_4} + \frac{1}{v_8} + \cdots = \frac{1}{2v_1^2}\left[v_2 - \sqrt{v_2^2 - 4v_1^2}\right], \quad \ldots \ldots \quad (85)$$

$$\sum = v_1 S. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (86)$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

57. THÉORÈME. *Soit une série*

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4} + \cdots,$$

dont les termes satisfont à la loi de récurrence :

$$v_n = v_{n-1} \frac{v_2}{v_1} - v_{n-2}.$$

Si l'on en déduit les séries convergentes :

$$S = \frac{1}{v_1 v_2} + \frac{1}{v_2 v_3} + \frac{1}{v_3 v_4} + \cdots,$$

$$\sum = \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_4} + \frac{1}{v_8} + \frac{1}{v_{16}} + \cdots,$$

on a, entre les sommes S, $\sum$, *la relation*

$$\sum = v_1 S.$$

En outre, ces sommes sont données par les formules (84), (85).

58. Remarque. En multipliant, par un facteur convenable, tous les termes d'une série, on peut la faire commencer par 1 (*). Cela étant, si l'on suppose $v_1 = 1$, on a, au lieu des formules précédentes :

$$v_n = v_2 . v_{n-1} - v_{n-2}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (87)$$

$$\frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_2 v_3} + \frac{1}{v_3 v_4} + \cdots = \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_4} + \frac{1}{v_8} + \frac{1}{v_{16}} + \cdots = \frac{1}{2}\left(v_2 - \sqrt{v_2^2 - 4}\right). \quad . \quad (\mathrm{P})$$

59. Applications. I. Soient $v_1 = 1$, $v_2 = 3$; et, par conséquent :

$$v_3 = 8, \quad v_4 = 21, \quad v_5 = 55, \quad v_6 = 144, \quad v_7 = 377, \quad v_8 = 987, \ \ldots \ (^{**}).$$

On trouve

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{8.21} + \frac{1}{21.55} + \frac{1}{55.144} + \cdots = \frac{1}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{987} + \cdots = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right);$$

comme ci-dessus (54).

II.

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 2, \quad v_3 = 3, \ \ldots, \ v_n = n.$$

On obtient

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots = 1, \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1;$$

résultats connus.

III. Prenons

$$v_1 = \frac{1 - x^2}{x}, \qquad v_2 = \frac{1 - x^4}{x^2}.$$

Il résulte, de ces valeurs initiales,

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1 + x^2}{x} = \frac{1}{x} + x;$$

(*) Ce facteur est, évidemment, l'inverse du premier terme.

(**) Ces nombres sont les termes de rang *pair*, dans la série de Lamé (14).

puis :

$$v_3 = \left(\frac{1}{x} + x\right)\left(\frac{1}{x^2} - x^2\right) - \left(\frac{1}{x} - x\right) = \frac{1}{x^3} - x^3 = \frac{1 - x^6}{x^3},$$

$$v_4 = \left(\frac{1}{x} + x\right)\left(\frac{1}{x^3} - x^3\right) - \left(\frac{1}{x^2} - x^2\right) = \frac{1}{x^4} - x^4 = \frac{1 - x^8}{x^4};$$

et, en général,

$$v_n = \frac{1 - x^{2n}}{x^n} \text{ (*)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (88)$$

D'un autre côté :

$$v_2^2 - 4v_1^2 = \frac{(1 - x^4)^2}{x^4} - 4\frac{(1 - x^2)^2}{x^2} = \frac{(1 - x^2)^4}{x^4},$$

$$v_2 - \sqrt{v_2^2 - 4v_1^2} = \frac{1 - x^4}{x^2} - \frac{(1 - x^2)^2}{x^2} = 2(1 - x^2),$$

$$S = \frac{x^3}{(1 - x^2)^2}, \qquad \Sigma = \frac{x^2}{1 - x^2}.$$

Donc, par les formules (84), (85) :

$$\frac{x^3}{(1 - x^2)(1 - x^4)} + \frac{x^5}{(1 - x^4)(1 - x^6)} + \frac{x^7}{(1 - x^6)(1 - x^8)} + \cdots = \frac{x^3}{(1 - x^2)^2}, \quad (89)$$

$$\frac{x^2}{1 - x^4} + \frac{x^4}{1 - x^8} + \frac{x^8}{1 - x^{16}} + \frac{x^{16}}{1 - x^{32}} + \cdots = \frac{x^2}{1 - x^2}. \quad \ldots\ldots \quad (90)$$

60. Remarque. A cause de

$$\frac{x^2}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x} - \frac{x}{1 - x^2},$$

(*) Ce petit calcul est celui que l'on rencontre dans la *réduction des équations réciproques*. D'ailleurs, la valeur de v_n résulte aussi de la formule générale

$$v_n = A\alpha^n + B\beta^n,$$

jointe à l'équation

$$t^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right)t + 1 = 0,$$

dont les racines sont

$$\alpha = x, \quad \beta = \frac{1}{x}.$$

ou par le changement de x^2 en x, la dernière *identité* devient

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\frac{x^8}{1-x^{16}}+\cdots=\frac{x}{1-x}\ (^*). \quad \ldots \quad (91)$$

Quant à la relation (89), si l'on supprime le facteur commun x^3, et que l'on change encore x^2 en x, elle se réduit à

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x}{(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x^2}{(1-x^3)(1-x^4)}+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}; \quad . \quad (92)$$

puis à

$$\frac{1}{1+x}+\frac{x}{(1+x)(1+x+x^2)}+\frac{x^2}{(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)}+\cdots=1 \quad . \quad (Q)$$

XI. — Sur la formule (Q).

61. Nous avons obtenu cette formule en supposant x *positif*, mais moindre que l'unité. Si x égale 1, elle se réduit à

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots=1;$$

résultat exact, déjà indiqué (59, II). Attribuons donc, à la quantité x, des valeurs supérieures à l'unité.

En général,

$$\frac{x^n}{(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})(1+x+x^2+\cdots+x^n)}$$
$$=\frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}-\frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^n}.$$

Donc, *identiquement* :

$$\frac{x}{1+x}+\frac{x^2}{(1+x)(1+x+x^2)}+\cdots+\frac{x^n}{(1+x+\cdots+x^{n-1})(1+x+\cdots+x^n)}$$
$$=1-\frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^n};$$

(*) Celle-ci est connue; mais on n'aurait pu s'attendre à la déduire de la théorie des fractions continues.

ou, si l'on appelle S_n la somme des n premiers termes de la série (Q) :

$$S_n = \frac{1}{x}\left[1 - \frac{1}{1 + x + x^2 + \cdots + x^n}\right];$$

ou, plus simplement,

$$S_n = \frac{x^n - 1}{x^{n+1} - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

De cette formule *générale,* on conclut :

1° Pour $x < 1$: *lim* $S_n = 1$; comme ci-dessus;

2° Pour $x > 1$: *lim* $S_n = \frac{1}{x}$.

Ainsi, *quand* x *surpasse* 1, la relation (Q) doit être remplacée par celle-ci :

$$\frac{1}{1+x} + \frac{x}{(1+x)(1+x+x^2)} + \frac{x^2}{(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)} + \cdots = \frac{1}{x} \quad . \quad (94)$$

62. Le terme général de la série (92) est

$$\frac{x^{k-1}}{(1-x^k)(1-x^{k+1})}.$$

Développé (*), il devient

$$x^{k-1}\left[1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \cdots\right]\left[1 + x^{k+1} + x^{2k+2} + x^{3k+3} + \cdots\right].$$

Dans ce produit, supposé effectué, chaque terme a la forme

$$x^{k-1+k\alpha+(k+1)\beta}.$$

Soit

$$k - 1 + k\alpha + (k+1)\beta = n,$$

ou

$$k\alpha + (k+1)\beta = n - k + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

De ce qui précède, nous pouvons d'abord conclure les propositions suivantes :

1° *Dans le développement de la fraction*

$$\frac{x^{k-1}}{(1-x^k)(1-x^{k+1})},$$

(*) On suppose $x < 1$.

le coefficient de x^n *égale le nombre des solutions entières* (non négatives) *de l'équation* (95);

2° *Dans le développement, suivant les puissances entières et positives de* x, *de la série*

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x}{(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^2}{(1-x^3)(1-x^4)} + \cdots,$$

le coefficient de x^n *égale le nombre total des solutions entières* (non négatives) *des* $n+1$ *équations :*

$$\alpha + 2\beta = n, \quad 2\alpha + 3\beta = n-1, \quad 3\alpha + 4\beta = n-2, \ldots, \quad (n+1)\alpha + (n+2)\beta = 0. \qquad (96)$$

63. Théorème. *Si l'on considère les solutions entières* (non négatives) *de chacune des* $n+1$ *équations* (96), *le nombre total de ces solutions est* $n+1$.

En effet, dans le développement de $\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}$ (92), le coefficient de x^n est $n+1$.

64. Remarques. I. Ce coefficient égale le nombre des équations (96).

II. Le nombre des solutions entières (non négatives) de l'équation (95) est, comme on sait, *égal à l'un des deux quotients entiers de* $n-k+1$ par $k(k+1)$. Telle est donc l'expression du coefficient de x^n, dans le développement de la fraction

$$\frac{x^{k-1}}{(1-x^k)(1-x^{k+1})} \text{ (*)}.$$

III. La dernière des équations (96) est

$$(n+1)\alpha + (n+2)\beta = 0:$$

elle admet une seule solution. Si l'on en fait abstraction, on peut rejeter les valeurs de k supérieures à $n-k+1$ (**).

(*) Il semble, d'après cela, que ce coefficient ne peut être évalué exactement.

(**) En effet, *un*, au moins, *des termes* $k\alpha$, $(k+1)\beta$, *surpassera* $n-k+1$.

L'énoncé précédent peut donc être ainsi modifié :

Le nombre total des solutions entières (non négatives) *de chacune des* $\frac{n}{2}$ *ou* $\frac{n+1}{2}$ *équations :*

$$\alpha + 2\beta = n, \quad 2\alpha + 3\beta = n - 1, \quad 3\alpha + 4\beta = n - 2, \ \dots$$

est n.

63. Applications. I. $n = 12$. Les *six* équations à résoudre sont :

$$\alpha + 2\beta = 12, \quad 2\alpha + 3\beta = 11, \quad 3\alpha + 4\beta = 10, \quad 4\alpha + 5\beta = 9, \quad 5\alpha + 6\beta = 8, \quad 6\alpha + 7\beta = 7.$$

La *première* est vérifiée par :

$$\alpha = 12,\ \beta = 0; \quad \alpha = 10,\ \beta = 1; \quad \alpha = 8,\ \beta = 2; \quad \alpha = 6,\ \beta = 3;$$
$$\alpha = 4,\ \beta = 4; \quad \alpha = 2,\ \beta = 5, \quad \alpha = 0,\ \beta = 6.$$

La *deuxième,* par :

$$\alpha = 1,\ \beta = 3; \quad \alpha = 4,\ \beta = 1.$$

La *troisième,* par :

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1.$$

La *quatrième* et la *cinquième* sont impossibles.

La *sixième* admet la solution :

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1.$$

En tout, *douze* solutions.

II. $n = 13$. Les *sept* équations à résoudre sont :

$$\alpha + 2\beta = 13, \quad 2\alpha + 3\beta = 12, \quad 3\alpha + 4\beta = 11, \quad 4\alpha + 5\beta = 10, \quad 5\alpha + 6\beta = 9,$$
$$6\alpha + 7\beta = 8, \quad 7\alpha + 8\beta = 7.$$

La *première* admet *sept* solutions :

$$\alpha = 13,\ \beta = 0; \quad \alpha = 11,\ \beta = 1; \quad \alpha = 9,\ \beta = 2; \quad \alpha = 7,\ \beta = 3;$$
$$\alpha = 5,\ \beta = 4; \quad \alpha = 3,\ \beta = 5; \quad \alpha = 1,\ \beta = 6.$$

La *deuxième* en admet *trois :*

$$\alpha = 6,\quad \beta = 0;\qquad \alpha = 3,\quad \beta = 2;\qquad \alpha = 0,\quad \beta = 4.$$

La *troisième* en admet *une :*

$$\alpha = 1,\quad \beta = 2.$$

La *quatrième* en admet *une :*

$$\alpha = 0,\quad \beta = 2.$$

La *cinquième* et la *sixième* sont impossibles.

La *septième* est vérifiée par :

$$\alpha = 1,\quad \beta = 2.$$

En tout, *treize* solutions.

66. Autre théorème (*). *Si l'on considère les solutions entières* (non négatives), *de chacune des équations*

$$x + 2y = n - 1,\quad 2x + 3y = n - 3,\quad 3x + 4y = n - 5,\ \ldots,$$

le nombre total de ces solutions égale l'excès de n + 2 *sur le nombre des diviseurs de* n + 2.

67. Série d'intégrales. L'égalité

$$\frac{1}{1+x} + \frac{x}{(1+x)(1+x+x^2)} + \frac{x^2}{(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)} + \cdots = 1 \quad . \quad \text{(Q)}$$

donne, par intégration,

$$\sum_0^\infty \int_0^1 \frac{x^n dx}{(1+x+\cdots+x^n)(1+x+\cdots+x^{n+1})} = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(R)}$$

Cette sommation paraît assez remarquable, les intégrales qui y entrent étant de plus en plus compliquées, à mesure que n augmente.

(*) Il résulte de la série (Q), combinée avec la *série de Lambert*. Ces propositions ont été généralisées par M. Ernest Cesàro, dans le beau Mémoire intitulé : *Sur diverses questions d'Arithmétique.*

68. Une identité. Si l'on essaie d'évaluer

$$\int_0^1 \frac{x^{2k-2}dx}{(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2k-2})(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2k})},$$

on est conduit à l'*identité*

$$(1+x+x^2+\cdots+x^k)^2 - x^k = (1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})(1+x+x^2+\cdots+x^{k+1}), \quad \text{(S)}$$

dont la vérification est facile (*), et qui a de nombreuses conséquences.

En voici quelques-unes :

1° *L'équation*

$$(1+x+x^2+\cdots+x^k)^2 - x^k = 0$$

se décompose en

$$1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}=0, \quad 1+x+x^2+\cdots+x^{k+1}=0.$$

2° *Le polynôme*

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{2n})^2 - x^{2n},$$

égal à

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+2x^n+x^{n+1}+\cdots+x^{2n})(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+x^{n+1}+\cdots+x^{2n}),$$

est égal, aussi, à

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1})(1+x+x^2+\cdots+x^{2n+1}).$$

3° *Aucun nombre, de la forme*

$$(1+x+x^2+\cdots+x^k)^2 - x^k,$$

ne peut être premier (excepté si $k=1$).

(*) Par exemple :

$$S^2 - x^k = (S - x^k)(S + x^{k+1});$$

égalité d'où l'on tire ce résultat exact :

$$S = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}.$$

XII. Quelques séries elliptiques (*).

69. Dans la relation

$$\frac{q}{1+q^2}+\frac{q^2}{1+q^4}+\cdots+\frac{q^n}{1+q^{2n}}+\cdots=\frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi}-1\right)\ (^{**}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

posons

$$v_n=\frac{1+q^{2n}}{q^n},$$

ou

$$v_n=q^n+q^{-n}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

Nous aurons

$$v_n=v_{n-1}v_1-v_{n-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

A cause de

$$v_2=v_1^2-2,$$

il est visible que *si* v_1 *est un nombre entier, supérieur à* 2, *tous les termes de la série récurrente*

$$v_1,\quad v_2,\quad v_3,\ \ldots,\ v_n,\ \ldots$$

sont des nombres entiers.

Soit, par exemple, $v_1=3$, valeur d'où résulte

$$q=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2.$$

La série récurrente est

$$3,\quad 7,\quad 18,\quad 47,\quad 123,\ \ldots$$

Donc, par la formule (97):

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{18}+\frac{1}{47}+\frac{1}{123}+\cdots=\frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi}-1\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

(*) Dans ce chapitre, nous complétons ce que l'on a vu ci-dessus (17, 18, ...), et aussi les *Recherches sur quelques produits indéfinis.*

(**) *Fundamenta nova...*, p. 103.

70. Remarque. On a trouvé (17) :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{34}+\cdots=\frac{k\omega}{2\pi}\sqrt{5}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \qquad (24)$$

Donc, en éliminant $\frac{\omega}{2\pi}$:

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{34}+\cdots}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{18}+\frac{1}{47}+\frac{1}{123}+\cdots}=k\sqrt{5}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \qquad (101)$$

Ainsi le module k, répondant à $q=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, est donné par le rapport de deux séries fort simples (*).

71. Généralisation. Reprenons les égalités :

$$\frac{1}{1+q}+\frac{q}{1+q^3}+\cdots+\frac{q^{n-1}}{1+q^{2n-1}}+\cdots=\frac{k\omega}{2\pi\sqrt{q}},\ .\ .\ .\ .\ . \qquad (23)$$

$$\frac{q}{1+q^2}+\frac{q^2}{1+q^4}+\cdots+\frac{q^n}{1+q^{2n}}+\cdots=\frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi}-1\right).\ .\ .\ .\ . \qquad (97)$$

Dans la première, posons, comme précédemment,

$$\frac{q^{n-1}}{1+q^{2n-1}}=\frac{1}{(1+q)v_n};\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \qquad (21)$$

et dans la seconde, afin d'éviter toute ambiguïté :

$$\frac{q^n}{1+q^{2n}}=\frac{1}{w_n}.$$

Il est visible que

$$v_1=1,\quad v_2=q+\frac{1}{q}-1,$$

$$v_n=v_{n-1}v_2-v_{n-2}.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \qquad (102)$$

(*) On ne doit pas oublier que la formule *classique* est

$$\sqrt{k}=2q^{\frac{1}{4}}\frac{1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots},$$

(*Recherches*..., p. 3).

On trouve aussi :

$$w_1 = q + \frac{1}{q} = v_2 + v_1;$$

et, en général,

$$w_n = v_n + v_{n+1} \ (^*) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (103)$$

Par conséquent, *si* $q + \frac{1}{q}$ *égale un nombre entier* a, *les nombres* $v_1, v_2, \ldots, v_n$, *et les nombres* $w_1, w_2, \ldots, w_n$, *sont entiers*. En outre, les premiers et les seconds vérifient la condition (103).

Cela posé, la formule (23) devient :

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots + \frac{1}{v_n} + \cdots = \frac{1+q}{\sqrt{q}} \frac{k\omega}{2\pi};$$

et la formule (97) :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \cdots + \frac{1}{w_n} + \cdots = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Par suite, eu égard à la relation (103) :

$$\frac{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots + \frac{1}{v_n} + \cdots}{\frac{1}{4} + \frac{1}{v_1 + v_2} + \frac{1}{v_2 + v_3} + \cdots + \frac{1}{v_n + v_{n+1}} + \cdots} = \frac{1+q}{\sqrt{q}} \cdot k;$$

ou, plus simplement,

$$\frac{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots + \frac{1}{v_n} + \cdots}{\frac{1}{4} + \frac{1}{v_1 + v_2} + \frac{1}{v_2 + v_3} + \cdots + \frac{1}{v_n + v_{n+1}} + \cdots} = k\sqrt{a+2} \ (^{**}) \quad \ldots \quad (T)$$

(*) Cette relation simple s'observe dans la formule (101).

(**) Soit

$$\frac{1+q}{\sqrt{q}} = \sqrt{q} + \frac{1}{\sqrt{q}} = t.$$

Il est clair que

$$q + \frac{1}{q} = a = t^2 - 2.$$

72. Exemples. I. $a=4$. On conclut de cette valeur, à cause de $v_1 = 1$:

$$v_2 = 3, \quad v_3 = 10, \quad v_4 = 27, \quad v_5 = 71, \quad v_6 = 186, \ldots;$$

puis

$$\frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{27} + \frac{1}{71} + \frac{1}{186} + \cdots}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{37} + \frac{1}{98} + \frac{1}{257} + \cdots} = k\sqrt{6}.$$

II. $a=5$.

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 4, \quad v_3 = 15, \quad v_4 = 56, \quad v_5 = 209, \quad v_6 = 780, \ldots$$

$$\frac{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{15} + \frac{1}{56} + \frac{1}{209} + \frac{1}{780} + \cdots}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{19} + \frac{1}{71} + \frac{1}{265} + \frac{1}{989} + \cdots} = k\sqrt{7}.$$

73. Remarques. I (*). *Soit* a *un nombre entier, égal ou supérieur à* 3 (**). *Soit* q *une racine de l'équation*

$$t^2 - at + 1 = 0.$$

La quantité

$$\frac{1 + q^{2n-1}}{(1+q)\,q^{n-1}}$$

est un nombre entier.

II. *La relation* (T) *subsiste pour toute valeur de* a, *supérieure à* 3.

En effet, dans les calculs précédents, rien n'exprime que a soit un nombre entier.

74. Une identité. En opérant comme le fait Legendre (***), on trouve :

$$\frac{1}{1-q^a} + \frac{q^b}{1-q^{a+c}} + \frac{q^{2b}}{1-q^{a+2c}} + \cdots = \frac{1}{1-q^b} + \frac{q^a}{1-q^{b+c}} + \frac{q^{2a}}{1-q^{b+2c}} + \cdots, \qquad \text{(U)}$$

identité dont un cas particulier a été donné précédemment (20, II).

(*) Analogue à celle qui constitue le *théorème* de la page 15.

(**) Afin que v_2 ne soit pas inférieur à 2.

(***) *Fonctions elliptiques*, t. III, p. 132.

Dans le développement de chacun des deux membres, *le coefficient de* q^n *est le nombre des solutions entières, non négatives, de l'équation*

$$ax + by + cxy = n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

75. Remarque. Si l'on écrit ainsi cette équation :

$$(cx + b)(cy + a) = nc + ab, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

et que l'on pose

$$nc + ab = dd',$$

d, d' étant des diviseurs *conjugués,* on aura

$$x = \frac{d-b}{c}, \quad y = \frac{d'-a}{c}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

pourvu que ces valeurs soient entières (non négatives).

76. Vérification. Soient

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = 5, \quad n = 78.$$

L'équation (105) est, dans le cas actuel,

$$(5x + 3)(5y + 2) = 396.$$

Elle est vérifiée par :

$$x = 0,\ y = 26; \quad x = 3,\ y = 4; \quad x = 6,\ y = 2; \quad x = 39,\ y = 0.$$

Par conséquent, le coefficient de q^{78} doit être 4.

En effet, le premier membre de (U) devient

$$\frac{1}{1-q^2} + \frac{q^3}{1-q^7} + \frac{q^6}{1-q^{12}} + \frac{q^9}{1-q^{17}} + \frac{q^{12}}{1-q^{22}} + \frac{q^{15}}{1-q^{27}} + \frac{q^{18}}{1-q^{32}} + \frac{q^{21}}{1-q^{37}}$$
$$+ \frac{q^{24}}{1-q^{42}} + \frac{q^{27}}{1-q^{47}} + \frac{q^{30}}{1-q^{52}} + \cdots + \frac{q^{78}}{1-q^{197}} + \cdots$$

Les seules fractions qui, développées, produisent des termes contenant q^{78}, sont :

$$\frac{1}{1-q^2}, \quad \frac{q^6}{1-q^{12}}, \quad \frac{q^{12}}{1-q^{22}}, \quad \frac{q^{78}}{1-q^{197}};$$

et il y en a quatre.

77. Suite. Jacobi a donné (*) cette identité :

$$\frac{q}{(1-q)^2}+\frac{q^3}{(1-q^3)^2}+\frac{q^5}{(1-q^5)^2}+\cdots=\frac{q}{1-q^2}+2\frac{q^2}{1-q^4}+3\frac{q^3}{1-q^6}+\cdots \quad (107)$$

En voici une autre, dont la vérification est également facile :

$$\frac{q}{(1-q)^2}+\frac{q^2}{(1-q^2)^2}+\frac{q^3}{(1-q^3)^2}+\cdots=\frac{q}{1-q}+2\frac{q^2}{1-q^2}+3\frac{q^3}{1-q^3}+\cdots\ (^{**}). \quad (108)$$

La limite commune de chacune des deux séries est

$$\frac{1}{24}+\frac{2}{3}\frac{k^2\omega^2}{\pi^2}+\frac{5}{6}\frac{k'^2\omega^2}{\pi^2}-\frac{\omega E_1(k)}{\pi^2}\ (^{***}).$$

78. Identité remarquable. La formule

$$k^2\left[\lambda(x)\right]^2=\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}-\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right]'\ (^{\text{IV}}),$$

dans laquelle

$$\lambda(x)=\sin \text{am}.\, x,$$

devient, pour $x=\omega$:

$$k^2=\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}-\frac{\Theta''(\omega)}{\Theta(\omega)}\ (^{\text{V}})\ \ldots\ldots\ldots \quad (109)$$

(*) *Fundamenta*..., p. 135. — *Recherches*..., p. 93. La valeur commune des deux membres est

$$\frac{\omega}{2\pi^2}\left[\omega-E_1(k)\right].$$

(**) Il est clair (et connu) que, dans le développement de chacun des deux membres, le coefficient de q^n est $\int n$ (*Recherches*..., p. 91).

(***) *Recherches*..., p. 92. La page 91 contient une grave faute typographique. Au lieu de la formule *absurde* :

$$\frac{dq}{q}=\frac{\pi dk}{\omega^2 kk'^2}(\omega' d\omega-\omega d\omega'),$$

on doit lire :

$$\frac{dq}{q}=\frac{\pi}{\omega^2}(\omega' d\omega-\omega d\omega').$$

(IV) Bertrand, *Calcul intégral*, p. 652.

(V) A cause de $\Theta'(\omega)=0$.

Or (*) :

$$\Theta(0) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \cdots,$$
$$\Theta''(0) = 2\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 [q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + \cdots],$$
$$\Theta(\omega) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots,$$
$$\Theta''(\omega) = -2\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 [q + 4q^4 + 9q^9 + 16q^{16} + \cdots].$$

La relation (109) devient donc

$$\frac{1}{2}\left(\frac{k\omega}{\pi}\right)^2 = \frac{q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + \cdots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots} + \frac{q + 4q^4 + 9q^9 + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots}.$$

On sait que

$$\sqrt{\frac{k\omega}{2\pi}} = q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \cdots) \text{ (**)}.$$

Conséquemment,

$$\left.\begin{aligned} &2q(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots)^4 \\ &= \frac{q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + \cdots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots} + \frac{q + 4q^4 + 9q^9 + 16q^{16} + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(V)}$$

79. Suite. On a (***)

$$1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots = \Theta(0) = \alpha^2\alpha',$$
$$1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots = \Theta(\omega) = \beta^2\alpha'.$$

De plus, par les propriétés des produits α, α', β, β' (IV) :

$$\frac{1}{\alpha^2\alpha'} = \frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} = \sum_0^\infty \varphi(n) q^n . \sum_0^\infty \psi(n) q^n,$$
$$\frac{1}{\beta^2\alpha'} = \frac{\alpha\beta'}{\beta\alpha'} = \sum_0^\infty \varphi(n)(-q)^n . \sum_0^\infty \psi(n)(-q)^n.$$

(*) *Recherches...*, p. 2.
(**) *Loc. cit.*
(***) *Loc. cit.*
(IV) *Recherches...*, pp. 1, 2, 3, 11...

La relation (V) est donc remplacée par celle-ci :

$$\left.\begin{aligned}&2q(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^4\\&=(q-4q^4+9q^9-16q^{16}+\cdots)\sum_0^\infty \varphi(n)\,q^n\,.\,\sum_0^\infty\psi(n)q^n\\&+(q+4q^4+9q^9+16q^{16}+\cdots)\sum_0^\infty\varphi(n)(-q)^n\sum_0^\infty\psi(n)(-q)^n,\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \quad (110)$$

dans laquelle il n'entre pas de fractions. Mais on peut trouver un développement beaucoup plus simple.

80. Suite. A cet effet, cherchons les expressions de $\Theta''(0)$, $\Theta''(\omega)$, *sous formes finies.*

La formule de *définition :*

$$\Theta(x)=\alpha'\prod_0^\infty\left(1-2q^{2n+1}\cos\frac{\pi x}{\omega}+q^{4n+2}\right)\ (*),$$

ou

$$\mathcal{L}.\Theta(x)=\mathcal{L}.\alpha'+\sum_0^\infty\mathcal{L}\left(1-2q^{2n+1}\cos\frac{\pi x}{\omega}+q^{4n+2}\right)$$

donne

$$\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}=2\frac{\pi}{\omega}\sum_0^\infty\frac{q^{2n+1}\sin\frac{\pi x}{\omega}}{1-2q^{2n+1}\cos\frac{\pi x}{\omega}+q^{4n+2}},$$

$$\frac{\Theta(x)\,\Theta''(x)-[\Theta'(x)]^2}{[\Theta(x)]^2}=2\frac{\pi^2}{\omega^2}\sum_0^\infty q^{2n+1}\frac{(1+q^{4n+2})\cos\frac{\pi x}{\omega}-2q^{2n+1}}{\left[1-2q^{2n+1}\cos\frac{\pi x}{\omega}+q^{4n+2}\right]^2}\quad . \; . \quad (111)$$

Donc, à cause de $\Theta'(0)=0$, $\Theta'(\omega)=0$:

$$\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}=2\frac{\pi^2}{\omega^2}\sum_0^\infty\frac{q^{2n+1}(1-q^{2n+1})^2}{(1-q^{2n+1})^4},$$

$$-\frac{\Theta''(\omega)}{\Theta(\omega)}=2\frac{\pi^2}{\omega^2}\sum_0^\infty\frac{q^{2n+1}(1+q^{2n+1})^2}{(1+q^{2n+1})^4};$$

(*) *Recherches...*, p. 2.

ou, plus simplement :

$$\frac{\Theta''(0)}{\Theta(\omega)} = +2\frac{\pi^2}{\omega^2}\sum_0^\infty \frac{q^{2n+1}}{(1-q^{2n+1})^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (112)$$

$$\frac{\Theta''(\omega)}{\Theta(\omega)} = -2\frac{\pi^2}{\omega^2}\sum_0^\infty \frac{q^{2n+1}}{(1+q^{2n+1})^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (113)$$

On a

$$\Theta(0) = \sqrt{\frac{2\omega k'}{\pi}}, \quad \Theta(\omega) = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \text{ (*)} \ldots \ldots \ldots \quad (114)$$

D'un autre côté, Jacobi a donné (**) les formules :

$$\sum_0^\infty \frac{q^{2n+1}}{(1-q^{2n+1})^2} = \frac{\omega}{2\pi^2}\left[\omega - E_1(k)\right], \quad \ldots \ldots \ldots \quad (115)$$

$$\sum_0^\infty \frac{q^{2n+1}}{(1+q^{2n+1})^2} = \frac{\omega}{2\pi^2}\left[E_1(k) - \omega k'^2\right]. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (116)$$

Donc, par les égalités (112), (113) :

$$\Theta''(0) = \left[\omega - E_1(k)\right]\sqrt{\frac{2k'}{\pi\omega}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (117)$$

$$\Theta''(\omega) = \left[\omega k'^2 - E_1(k)\right]\sqrt{\frac{2}{\pi\omega}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (118)$$

81. Suite. Reprenons l'identité

$$2q(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^4 = \frac{q-4q^4+9q^9-16q^{16}+\cdots}{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots} + \frac{q+4q^4+9q^9+16q^{16}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}. \quad (V)$$

La première fraction (78) égale

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} = \frac{\omega}{2\pi^2}\left[\omega - E_1(k)\right].$$

(*) *Recherches...*, p. 2.

(**) *Fundamenta...*, p. 111.

Or, le second membre, limite de la série

$$\frac{q}{(1-q)^2}+\frac{q^3}{(1-q^3)^2}+\frac{q^5}{(1-q^5)^2}+\cdots$$

(115), est aussi la limite de chacune des séries :

$$\frac{q}{1-q^2}+2\frac{q^2}{1-q^4}+3\frac{q^3}{1-q^6}+\cdots,$$

$$q+2q^2+4q^3+4q^4+6q^5+\cdots+\frac{n}{i}q^n\int i+\cdots\ (*).$$

Par conséquent,

$$\frac{q-4q^4+9q^9-16q^{16}+\cdots}{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}=\sum_1^\infty \frac{n}{i}q^n\int i \quad \ldots\ldots\ (119)$$

Dans le second membre, i *est le plus grand nombre impair qui divise* n.

Si l'on change q en $-q$, on a le développement de la seconde fraction, savoir :

$$\frac{q+4q^4+9q^9+16q^{16}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}=-\sum_1^\infty \frac{n}{i}(-q)^n\int i \quad \ldots\ldots\ (120)$$

En outre, par la suppression du facteur 2 :

$$q[1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots]^4=\sum_1^\infty q^i\int i; \quad \ldots\ldots\ (121)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$[q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots]^4=\sum_1^\infty q^{4i}\int i.$$

Nous retrouvons donc le beau théorème de Jacobi.

82. Remarques. I. Dans l'égalité (119), posons :

$$\frac{n}{i}\int i=\mathrm{P}_n.$$

(*) *Recherches...*, p. 92. Ci-dessus (77) nous avons parlé des deux premières.

Il est clair que si l'on chasse le dénominateur, on a ce théorème d'arithmétique :

La fonction

$$P_n - 2P_{n-1} + 2P_{n-4} - 2P_{n-9} + \cdots$$

égale $(-1)^{n-1}n$ *ou zéro, selon que* n *est ou n'est pas carré.*

Soit, par exemple, $n = 13$. Le calcul direct donne

$$P_{13} = 14, \quad P_{12} = 16, \quad P_9 = 13, \quad P_4 = 4;$$

et, conformément à l'énoncé,

$$14 - 2.16 + 2.13 - 2.4 = 0.$$

Soit encore $n = 16$. On a

$$P_{16} = 16, \quad P_{15} = 24, \quad P_{12} = 16, \quad P_7 = 8, \quad P_0 = 0.$$

Donc

$$16 - 2.24 + 2.16 - 2.8 = -16;$$

ce qui est exact.

II. *Sauf le cas où* n *est un carré impair,* P_n *est pair.*

III. Si

$$n = 2^\alpha i, \quad P_n = 2^\alpha P_i.$$

En effet,

$$P_i = \int i, \qquad \text{et} \qquad 2^\alpha = \frac{n}{i}\ (^*).$$

IV. Groupons les termes dans lesquels i est constant : la formule (119) devient

$$\frac{q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + \cdots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots} = \sum_1^\infty (q^i + 2q^{2i} + 4q^{4i} + \cdots) \int i \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

(*) *Recherches*..., p. 85.

Et la formule (120) :

$$-\frac{q + 4q^4 + 9q^9 + 16q^{16} + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots} = \sum_1^\infty (-q^i + 2q^{2i} + 4q^{4i} + \cdots) \int i.$$

Donc, par soustraction,

$$q(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots)^4 = \sum_1^\infty q^i \int i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (121)$$

83. *Une formule de Cauchy.* Dans les *Comptes rendus* (t. XVII, p. 530), l'illustre Géomètre a donné l'identité suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1+\alpha x}{1+\beta x}\cdot\frac{1+\alpha t x}{1+\beta t x}\cdot\frac{1+\alpha t^2 x}{1+\beta t^2 x}\cdots &= 1 + \frac{\alpha-\beta}{1-t}\,\frac{x}{1+\beta x}\\
&+ \frac{\alpha-\beta}{1-t}\,\frac{\alpha-\beta t}{1-t^2}\,\frac{t x^2}{(1+\beta x)(1+\beta t x)(1+\beta t^2 x)}\\
&+ \frac{\alpha-\beta}{1-t}\cdot\frac{1-\beta t}{1-t^2}\cdot\frac{1-\beta t^2}{1-t^3}\,\frac{t^3 x^3}{(1+\beta x)(1+\beta t x)(1+\beta t^2 x)} + \cdots,\end{aligned}$$

trop peu remarquée.

Si l'on suppose

$$\alpha = 0, \quad \beta = -1, \quad x = t = q,$$

elle se réduit à

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots} = 1 + \frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q^4}{[(1-q)(1-q^2)]^2} + \frac{q^9}{[(1-q)(1-q^2)(1-q^3)]^2} + \cdots \text{(*)}. \qquad (12\ )$$

Euler a trouvé, comme transformée du premier membre,

$$1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots$$

Par conséquent :

Les séries

$$1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots,$$

$$1 + \frac{q}{[1-q]^2} + \frac{q^4}{[(1-q)(1-q^2)]^2} + \frac{q^9}{[(1-q)(1-q^2)(1-q^3)]^2} + \cdots$$

ont même limite.

(*) Celle-ci est due à Jacobi (*Fundamenta*..., p. 180).

Cette limite commune est

$$\frac{1}{\alpha\alpha'} = 2^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{12}} k'^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{24}}.$$

En outre, le développement de $\frac{1}{\alpha\alpha'}$, ordonné suivant les puissances de q, est, comme on sait (*),

$$\sum_0^\infty \psi(n)\, q^n.$$

84. Remarques. I. Dans la seconde série, *les exposants de* q, *en numérateur, sont les carrés des exposants correspondants; les dénominateurs sont les carrés des dénominateurs correspondants.*

II. La seconde série est beaucoup plus convergente que la première.

85. Suite. On trouve, de la même manière,

$$\frac{1}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots} = 1 - \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} - \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \cdots \quad (124)$$

Le premier membre égale

$$\frac{1}{\beta\beta'} = \alpha = 2^{\frac{1}{6}} k^{-\frac{1}{12}} k'^{\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{24}} \; (^{**}).$$

Telle est donc la limite de la série

$$1 - \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} - \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \cdots \; (^{***}).$$

(*) *Recherches...*, p. 11.
(**) *Recherches...*, p. 1.
(***) A la page 52 des *Recherches*, j'ai indiqué cette autre sommation :

$$1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^9)} + \cdots = \beta$$
$$= 1 + \varphi_i(1)\, q + \varphi_i(2)\, q^2 + \varphi_i(3)\, q^3 + \cdots$$

Elle redonne les formules (W).

86. Remarques. I. En appelant $\varphi_i(n)$ le *nombre des décompositions de* n *en parties impaires, inégales,* on a (*) aussi

$$\alpha = 1 - \varphi_i(1)\,q + \varphi_i(2)\,q^2 - \varphi_i(3)\,q^3 + \varphi_i(4)\,q^4 - \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

II. Désignons, comme dans le Mémoire cité (**), par F (g, p) le *nombre des décompositions de* g, *en parties égales ou inégales, non supérieures à* p. Alors :

$$\frac{1}{1-q^2} = \sum_{g=0}^{\infty} \mathrm{F}(g, 1)\,q^{2g}, \quad \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)} = \sum_{g=0}^{g=\infty} \mathrm{F}(g, 2)\,q^{2g},$$

$$\frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} = \sum_{g=0}^{g=\infty} \mathrm{F}(g, 3)\,q^{2g}, \ldots;$$

puis

$$\frac{q}{1-q^2} = \sum_0^{\infty} \mathrm{F}(g, 1)\,q^{2g+1}, \quad \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} = \sum_0^{\infty} \mathrm{F}(g, 2)\,q^{2g+4}, \ldots$$

. . . .

Donc, dans le premier développement de α (124), le coefficient de q^n sera

$$-\mathrm{F}\left(\frac{n-1}{2}, 1\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n-4}{2}, 2\right) - \mathrm{F}\left(\frac{n-9}{2}, 3\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n-16}{2}, 4\right) - \cdots$$

Et comme, dans le second développement (125), ce coefficient est $(-1)^n\varphi_i(n)$, on a la relation suivante, entre les nombres $\varphi_i(n)$ et F :

$$\pm\,\varphi_i(n) = \mathrm{F}\left(\frac{n-1}{2}, 1\right) - \mathrm{F}\left(\frac{n-4}{2}, 2\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n-9}{2}, 3\right) - \cdots (***) \quad . \quad . \quad (126)$$

III. Les arguments $\frac{n-1}{2}, \frac{n-4}{2}, \frac{n-9}{2}, \cdots$ doivent être entiers. Par conséquent, cette égalité se décompose en ces deux-ci :

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i(n) &= \mathrm{F}\left(\frac{n-1}{2}, 1\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n-9}{2}, 3\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n-25}{2}, 5\right) + \cdots, \\ \varphi_i(n) &= \mathrm{F}\left(\frac{n-4}{2}, 2\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n-16}{2}, 4\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n-36}{2}, 6\right) + \cdots; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{W})$$

selon que n est *impair* ou *pair*.

(*) *Recherches...*, pp. 4 et 5.

(**) Page 47.

(*** Le signe +, si n est *impair*.

87. VÉRIFICATIONS. I. $n = 35$. On doit trouver :

$$\varphi_i(35) = F(17, 1) + F(13, 3) + F(5, 5).$$

Or :

$$\varphi_i(35) = 29, \quad F(17, 1) = 1, \quad F(13, 3) = 21, \quad F(5, 5) = 7 \text{ (*)};$$

et l'on a bien

$$29 = 1 + 21 + 7.$$

II. $n = 34$. La seconde des relations (W) se réduit à

$$\varphi_i(34) = F(15, 2) + F(9, 4);$$

savoir :

$$26 = 8 + 18.$$

III. Ces relations (W) peuvent être énoncées ainsi :

1° *Soit* n *un nombre impair. Le nombre des décompositions de* n, *en parties impaires, inégales, se compose du nombre des décompositions de* $\frac{n-1}{2}$, *en parties qui ne surpassent pas* 1, *augmenté du nombre des décompositions de* $\frac{n-9}{2}$, *en parties qui ne surpassent pas* 3, *augmenté du nombre des décompositions de* $\frac{n-25}{2}$, *en parties qui ne surpassent pas* 5, etc.;

2° *Soit* n *un nombre pair. Le nombre des décompositions de* n, *en parties impaires, inégales, se compose du nombre des décompositions de* $\frac{n-4}{2}$, *en parties qui ne surpassent pas* 2, *augmenté du nombre des décompositions de* $\frac{n-16}{2}$, *en parties qui ne surpassent pas* 4, *augmenté du nombre des décompositions de* $\frac{n-36}{2}$, *en parties qui ne surpassent pas* 6, etc. (**).

88. LETTRE A M. HERMITE. « ... j'ai vu, ce matin, à la Bibliothèque » de l'Université, le n° 1 des *Comptes rendus*, contenant une *nouvelle série*,

(*) *Recherches...*, pp. 59 et 61.

(**) Dans les *Recherches* ... (pp. 49 et suiv.), on trouve divers théorèmes analogues à celui-là.

» par M. Faa de Bruno. Que la formule proposée soit commode, soit; mais,
» à coup sûr, elle n'est pas *nouvelle*. En effet, elle résulte, immédiatement,
» de la relation si connue :

$$» \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} = 1 + 2(q + q^4 + q^9 + q^{16} + \cdots).$$

» L'auteur a eu la peine de changer q en q^2, en q^4, en q^8, en q^{16}; et c'est
» tout. Si l'on faisait le même changement dans la formule *approchée* (p. 23),
» on aurait une formule encore *plus approchée*. Serait-elle *nouvelle?* Évi-
» demment non : là où il n'y a *aucune invention*, il n'y a rien de nouveau.

» On pourrait peut-être, en partant d'une autre formule de Jacobi, arriver
» à quelque chose d'un peu plus neuf : et encore!

» Soit, pour abréger,

$$» S = q^2 + q^8 + q^{18} + \cdots$$

» On a :

$$» \sqrt{\frac{\omega}{\pi}(1 + k')} = 1 + 2S, \quad \sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}(1 + k'_1)} = 1 + 2S_1, \quad \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}(1 + k'_2)} = 1 + 2S_2, \ \ldots;$$

» donc

$$» \lim\left[\omega_n(1 + k'_n)\right] = \pi.$$

» D'ailleurs,

$$» \omega_1(1 + k'_1) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{k'})\,\omega;$$

» etc., etc. Je n'insiste point, parce que la question a été traitée par Jacobi,
» Gauss, Bertrand et *moi* (*).

» Parmi les innombrables formules que j'ai données dans le Mémoire
» intitulé : *Recherches sur quelques produits indéfinis*, en voici deux ou
» trois, applicables au problème actuel :

$$» q^{-\frac{1}{4}}\frac{\omega}{\pi}\sqrt{k} = \sum_0^\infty \left[\frac{q^a}{1 - q^{4a+1}} - \frac{q^{3a+2}}{1 - q^{4a+3}}\right],$$

$$» q^{-\frac{1}{2}}\frac{\omega k}{2\pi} = \sum_0^\infty \left[\frac{q^{2a}}{1 - q^{8a+2}} - \frac{q^{6a+4}}{1 - q^{8a+6}}\right].$$

(*) Ce mot, généralement *haïssable*, est là comme simple renseignement bibliographique.

» En les combinant, on a

$$» \frac{2\omega}{\pi} = \frac{\left\{ \sum_0^\infty \left[\frac{q^a}{1 - q^{4a+1}} - \frac{q^{3a+2}}{1 - q^{4a+3}} \right] \right\}^2}{\sum_0^\infty \left[\frac{q^{2a}}{1 - q^{8a+2}} - \frac{q^{6a+4}}{1 - q^{8a+6}} \right]}.$$

» On peut d'ailleurs écrire ainsi le second membre :

$$» \frac{[1 + \varepsilon_5 q + \varepsilon_9 q^2 + \varepsilon_{13} q^3 + \cdots]^2}{1 + \varepsilon_5 q^2 + \varepsilon_9 q^4 + \varepsilon_{13} q^6 + \cdots}.$$

» (*Recherches* ..., p. 116.)

» Liége, 20 juillet 1882. »

89. Additions. 1° Comme

$$\frac{2\omega}{\pi} = [1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots]^2,$$

il s'ensuit que

$$[1 + \varepsilon_5 q + \varepsilon_9 q^2 + \varepsilon_{13} q^3 + \varepsilon_{17} q^4 + \cdots]^2 = [1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots]^2 [1 + \varepsilon_5 q^2 + \varepsilon_9 q^4 + \cdots]. \quad (127)$$

2° D'après Cauchy,

$$[1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots]^2 = 1 + 4\left(\frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \cdots\right) (*) . \quad (128)$$

Soit

$$\frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \cdots = \sum_1^\infty A_n q^n.$$

Il est facile de voir que A_n égale *l'excès du nombre des diviseurs de* n, *ayant*

(*) Lire, dans les *Nouvelles Annales* (1854), un beau Mémoire de M. Genocchi.

la forme $4\mu+1$, *sur le nombre de ceux qui ont la forme* $4\mu-1$. Autrement dit, $A_n=\varepsilon_n$. Par suite, l'égalité (127) se réduit à

$$\left.\begin{aligned}&\left[1+\varepsilon_5 q+\varepsilon_9 q^2+\varepsilon_{13} q^3+\varepsilon_{17} q^4+\cdots\right]^2\\ &=\left[1+\varepsilon_5 q^2+\varepsilon_9 q^4+\varepsilon_{13} q^6+\cdots\right]\left[1+4\left(\varepsilon_1 q+\varepsilon_2 q^2+\varepsilon_3 q^3+\cdots\right)\right];\end{aligned}\right\} \quad (129)$$

relation qui a de l'analogie avec celle-ci :

$$\left[1+q+q^3+q^6+\cdots\right]^2=\left[1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots\right]\left[1+2q+2q^4+2q^9+\cdots\right] \text{ (*)}.$$

Au fond, l'égalité (129) ne diffère pas de la formule (399) des *Recherches*.

Liége, 20 mai 1883.

90. *P. S.* (26 janvier 1884). Si l'on combine la relation (128) avec celle-ci :

$$(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)=(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\cdots)^2 \text{ (**)}.$$

on trouve :

$$(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)=1+4\sum_1^\infty(-1)^n\varepsilon_n q^{2n}.$$

L'exposant 2n *est une somme de deux carrés*. Cette formule démontre un théorème de Gauss (***).

(*) LEGENDRE, t. III, p. 111.
(**) *Recherches*..., p. 29.
(***) Voir le Mémoire de M. Genocchi.

ADDITION (*).

Sur le développement de $\sqrt{A}$.

1. Lemme I. *Soient* x, x' *deux fractions continues inverses, supérieures à l'unité. Si*

$$\frac{E}{E'}, \quad \frac{F}{F'}$$

sont les deux dernières réduites de x, *celles de* x' *seront*

$$\frac{F'}{E'}, \quad \frac{F}{E}.$$

En outre, si chacune des fractions données est symétrique,

$$E' = F \text{ (**)}.$$

2. Lemme II. *Soient, comme dans le premier Lemme,*

$$\frac{E}{E'}, \quad \frac{F}{F'}$$

les deux dernières réduites d'une fraction continue

$$x = b, c, d, \ldots, e, f.$$

(*) Suggérée par un intéressant travail de M. de Jonquières (*Comptes rendus*, février et mars 1883).

(**) *Nouvelles Annales*, t. VIII, p. 281.

Soient

$$\frac{P}{P'}, \quad \frac{Q}{Q'}$$

les deux dernières réduites de la fraction continue symétrique

$$y = b, c, d, \ldots, e, f, f, e, \ldots, d, c, b,$$

composée d'un nombre pair de termes. On a :

$$P = Q' = EE' + FF', \quad Q = E^2 + F^2, \quad P' = E'^2 + F'^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (1)$$

1° x' étant la fraction continue inverse de x, il est clair que

$$y = b, c, \ldots, e, f, x';$$

et, par le premier Lemme :

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{Q}{P} = \frac{F \cdot \frac{F}{E} + E}{F' \cdot \frac{F}{E} + E'} = \frac{E^2 + F^2}{EE' + FF'}.$$

Si donc (comme nous l'allons démontrer) la dernière fraction est *irréductible :*

$$Q = E^2 + F^2, \quad Q' = P = EE' + FF'.$$

2° Soit $z = \frac{E}{E'}$ la fraction continue

$$f, e, \ldots, c.$$

Le même raisonnement (bien connu) donne

$$\frac{P}{P'} = b, c, \ldots, e, f, z = \frac{F \cdot \frac{F'}{E'} + E}{F' \cdot \frac{F'}{E'} + E'} = \frac{EE' + FF'}{E'^2 + F'^2}:$$

$$P' = E'^2 + F'^2.$$

3° Soit, s'il est possible,

$$E^2 + F^2 = m\alpha, \quad EE' + FF' = m\beta.$$

Posons

$$E'^2 + F'^2 = \gamma.$$

On tire, de ces égalités,

$$(E^2 + F^2)(E'^2 + F'^2) - (EE' + FF')^2 = m\alpha\gamma - m^2\beta^2,$$

ou

$$(EF' - FE')^2 = \mathfrak{M} . m,$$

ou

$$1 = \mathfrak{M} . m;$$

ce qui est absurde si, comme on l'a supposé, le nombre entier m surpasse l'unité (*).

3. Remarques. I. Par les formules (1) :

$$P' + Q = E^2 + F^2 + E'^2 + F'^2 = \textit{somme de quatre carrés},$$
$$P + P' + Q + Q' = (E + E')^2 + (F + F')^2 = \textit{somme de deux carrés}.$$

II. *Si, après avoir pris la fraction symétrique*

$$b, c, d, \ldots, e, f, f, e, \ldots, d, c, b,$$

ayant un nombre pair de termes, on écrit deux fois, trois fois, ... cette période, le numérateur de chaque dernière réduite sera la somme de deux carrés. Semblablement, le dénominateur de chaque avant-dernière réduite sera la somme de deux carrés. Enfin, chaque avant-dernier numérateur égalera chaque dernier dénominateur.

Exemple.

Première période . .	2,	3,	3,	2;
	$\frac{2}{1}$,	$\frac{7}{3}$,	$\frac{23}{10}$,	$\frac{53}{23}$;
deuxième période. . .	2,	3,	3,	2;
	$\frac{129}{56}$,	$\frac{440}{191}$,	$\frac{1\,449}{629}$,	$\frac{3\,338}{1\,449}$;
troisième période. . .	2,	3,	3,	2;
	$\frac{8\,125}{3\,527}$,	$\frac{27\,713}{12\,030}$,	$\frac{91\,264}{39\,617}$,	$\frac{210\,241}{91\,264}$.

(*) Cette importante proposition, signalée par M. Serret (*Cours d'Algèbre supérieure*), résulte des formules

$$U = QT + PT', \quad U' = Q'T + P'T'.$$

(*Nouvelles Annales*, t. VIII, p. 177.)

On trouve :

$$53 = 2^2 + 7^2, \quad 10 = 1^2 + 3^2, \quad 3\,338 = 23^2 + 53^2, \quad 629 = 10^2 + 23^2,$$
$$210\,241 = 129^2 + 440^2, \quad 39\,617 = 56^2 + 191^2; \text{ etc.}$$

4. Lemme III. *La valeur de la fraction continue périodique simple,*

$$y = (b, c, d, \ldots, e, f, f, e, \ldots, c, b),$$

est donnée par chacune des formules :

$$y = \frac{Q - P' + \sqrt{(Q - P')^2 + 4P^2}}{2P}, \qquad (2)$$

$$y = \frac{Q - P' + \sqrt{(Q + P')^2 - 4}}{2P}, \qquad (3)$$

$$y = \frac{E^2 + F^2 - E'^2 - F'^2 + \sqrt{(E^2 + F^2 - E'^2 - F'^2)^2 + 4(EE' + FF')^2}}{2(EE' + FF')}, \qquad (4)$$

$$y = \frac{E^2 + F^2 - E'^2 - F'^2 + \sqrt{(E^2 + E'^2 + F^2 + F'^2)^2 - 4}}{2(EE' + FF')}, \qquad (5)$$

$$y = \frac{E^2 + F^2 - E'^2 - F'^2 + \sqrt{\left[(E + F')^2 + (F - E')^2\right]\left[(E - F')^2 + (F + E')^2\right]}}{2(EE' + FF')} \qquad (6)$$

La première expression est la racine *positive* de l'équation

$$y = \frac{Qy + P}{Py + P'},$$

ou

$$Py^2 + (P' - Q)y - P = 0. \qquad (7)$$

D'ailleurs, $\frac{Q}{Q'}$ est de rang *pair ;* donc

$$\frac{Q}{Q'} - \frac{P}{P'} = + \frac{1}{P'Q'},$$

ou

$$P^2 = QP' - 1;$$

etc.

En outre,

$$
\begin{aligned}
(E^2 + E'^2 + F^2 + F'^2)^2 - 4 &= (E^2 + E'^2 + F^2 + F'^2)^2 - 4\,(EF' - FE')^2 \\
&= (E^2 + E'^2 + F^2 + F'^2 + 2EF' - 2FE')\,(E^2 + E'^2 + F^2 + F'^2 - 2EF' + 2FE') \\
&= \left[(E + F')^2 + (F - E')^2\right]\left[(E - F')^2 + (F + E')^2\right] \ (^*).
\end{aligned}
$$

5. Vérification. Soient, comme ci-dessus :

$$
\begin{aligned}
E &= 2, \quad E' = 1, \quad F = 7, \quad F' = 3; \\
P &= 23, \quad P' = 10, \quad Q = 53, \quad Q' = 23.
\end{aligned}
$$

La quantité soumise au radical prend ces diverses formes :

$$
\begin{gathered}
43^2 + 46^2, \quad 63^2 - 4, \quad (4 + 49 - 1 - 9)^2 + 4.(2 + 21)^2, \\
(4 + 49 + 1 + 9)^2 - 4, \quad \left[(2 + 3)^2 + (7 - 1)^2\right]\left[(2 - 3)^2 + (7 + 1)^2\right];
\end{gathered}
$$

ou, simplement :

$$
43^2 + 46^2, \quad 63^2 - 4, \quad (5^2 + 6^2)(1^2 + 8^2).
$$

Or,

$$
43^2 + 46^2 = 1\,849 + 2\,116 = 3\,965 = 65.61.
$$

6. Lemme IV. *Une réduite $\frac{Q}{Q'}$ peut, indifféremment, être considérée comme étant de rang pair ou de rang impair* (**).

Soit :

$$
\frac{Q}{Q'} = x = a, b, c, \ldots, p, q.
$$

Le quotient incomplet q surpasse l'unité, sans quoi l'on pourrait remplacer p par $p + 1$. Cela étant, on a

$$
p + \frac{1}{q} = p + \cfrac{1}{q - 1 + \cfrac{1}{1}};
$$

égalité d'où résulte le Lemme énoncé.

(*) Application de l'identité :

$$
(ab' + ba')^2 + (aa' - bb')^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2).
$$

(**) Proposition connue.

7. Théorème I. *Soient* $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ *deux fractions irréductibles satisfaisant aux conditions*

$$Q > P > 1,\quad Q' > P' > 1,\quad QP' - PQ' = \pm 1,\quad Q > Q',\quad P > P'.$$

Moyennant la restriction indiquée dans le Lemme IV, $\frac{P}{P'}$ *est l'avant-dernière réduite de* $\frac{Q}{Q'}$ (*).

Pour fixer les idées, supposons

$$QP' - PQ' = +1 \qquad (8)$$

Si l'on réduit $\frac{Q}{Q'}$ en fraction continue, et que $\frac{\alpha}{\alpha'}$ soit l'avant-dernière réduite, on aura, si $\frac{Q}{Q'}$ *est de rang pair :*

$$Q\alpha' - Q'\alpha = +1 \qquad (9)$$

D'après le Lemme IV, la seconde hypothèse est admissible. Cela posé, à cause de l'égalité (8), les valeurs de α' et de α sont, comme on sait, comprises dans les formules :

$$\alpha' = P' + Q'\theta,\quad \alpha = P + Q\theta; \qquad (10)$$

θ étant un entier quelconque.

1° On ne peut le supposer *positif;* car on aurait

$$\alpha' > Q',\quad \alpha > Q.$$

2° On ne peut, davantage, le supposer *négatif:* cette hypothèse donnerait

$$\alpha' < 0,\quad \alpha < 0.$$

3° Reste donc

$$\theta = 0;$$

puis

$$\alpha' = P',\quad \alpha = P,\quad \frac{P}{P'} = \frac{\alpha}{\alpha'}.$$

(*) Cette proposition résulte d'un problème résolu par Legendre (*Théorie des Nombres*, t. I, pp. 23, 24), au moyen de calculs et de raisonnements un peu longs.

8. Théorème II. *Soient* $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{P}$ *les deux dernières réduites de la fraction continue symétrique :*

$$y = b, c, d, e, \ldots, e, d, c, b \text{ (*)}.$$

Soient a, α *deux nombres entiers satisfaisant aux conditions :*

$$Q\alpha - 2Pa = P', \quad \alpha \overline{\gtrless} 2a.$$

Si l'on fait

$$A = a^2 + \alpha,$$

les racines carrées de tous les nombres A (**) *sont données par la formule*

$$\sqrt{A} = a\,(b, c, d, e, \ldots, e, d, c, b, 2a).$$

Soient

$$Y = (b, c, d, e, \ldots, e, d, c, b, 2a),$$
$$X = a\,(b, c, d, e, \ldots, e, d, c, b, 2a).$$

On a, par le raisonnement habituel,

$$Y = \frac{Q\left(2a + \frac{1}{Y}\right) + P}{P\left(2a + \frac{1}{Y}\right) + P'} = \frac{(2aQ + P)Y + Q}{(2aP + P')Y + P},$$

ou

$$(2aP + P')\,Y^2 - 2aQY - Q = 0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

puis

$$\frac{1}{Y} = \frac{-aQ + \sqrt{a^2Q^2 + (2aP + P')\,Q}}{Q};$$

et, par conséquent,

$$X = \sqrt{a^2 + \frac{2aP + P'}{Q}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Cette valeur se réduit à $\sqrt{A}$, *si les nombres entiers* a, α *satisfont à l'équation*

$$Q\alpha - 2Pa = P', \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

et si l'on suppose

$$A = a^2 + \alpha.$$

(*) Il n'est pas nécessaire qu'elle soit composée d'un nombre *pair* de termes.
(**) Il y en a une infinité.

D'ailleurs, pour que a^2 soit le plus grand carré contenu dans A, on doit avoir, conformément à l'énoncé,

$$\alpha \leqq 2a \qquad (14)$$

9. Remarques. I. Si les nombres P, Q sont *impairs,* comme ils sont premiers entre eux, l'équation (13) admet *une infinité de solutions entières et positives.*

II. Si Q est *pair,* P est *impair.* Alors P′ doit être *pair,* sans quoi l'équation (13) serait impossible.

III. $\sqrt{A}$ *ne peut se développer en une fraction continue*

$$a\,(b, c, d, \ldots, p, q, 2a)$$

dans laquelle, $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ *étant les deux dernières réduites de*

$$b, c, d, \ldots, p, q,$$

P′ *soit impair, et* Q, *pair.*

10. Applications. I.

$$y = 2,\quad 1,\quad 3,\quad 1,\quad 2.$$

Les réduites sont : $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{11}{4}, \frac{14}{5}, \frac{39}{14}.$

Donc

$$P = 14,\quad P' = 5,\quad Q = 39.$$

L'équation (13) devient

$$39\alpha - 28\alpha = 5.$$

Il en résulte

$$\alpha = 3 + 28\theta,\quad a = 4 + 39\theta;$$

puis

$$A = 4^2 + 3 = 19,\quad A = 43^2 + 31 = 1\,880,\quad A = 82^2 + 59 = 6\,783,\ \text{etc.};$$

et enfin :

$$\sqrt{19} = 4(2, 1, 3, 1, 2, 8),\quad \sqrt{1\,880} = 43\,(2, 1, 3, 1\ 2, 86),\quad \sqrt{6\,783} = 82(2, 1, 3, 1, 2, 164),\ \ldots$$

II.

$$y = 2,\quad 1,\quad 3,\quad 3,\quad 1,\quad 2.$$

Réduites : $\dfrac{2}{1},\quad \dfrac{3}{1},\quad \dfrac{11}{4},\quad \dfrac{36}{13},\quad \dfrac{47}{17},\quad \dfrac{130}{47}.$

$$130\alpha - 94a = 17 \quad (\textit{impossible}).$$

III.

$$y = 3,\quad 2,\quad 1,\quad 1,\quad 2,\quad 3.$$

Réduites : $\dfrac{3}{1},\quad \dfrac{7}{2},\quad \dfrac{10}{3},\quad \dfrac{17}{5},\quad \dfrac{44}{13},\quad \dfrac{149}{44}.$

$$P = 44,\quad P' = 13,\quad Q = 149,$$

$$149\alpha - 88a = 13.$$

La solution la plus simple (*) est

$$\alpha = -7,\quad a = -12.$$

Donc, en général, par l'addition de 88 et de 149 :

$$\alpha = 81 + 88\theta,\quad a = 137 + 149\theta;$$

puis

$$A = 137^2 + 81 = 18\,850,\quad A = 286^2 + 169 = 81\,965,\ \text{etc.}$$

Finalement

$$\sqrt{18\,850} = 137\,(3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 274),$$

$$\sqrt{81\,965} = 286\,(3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 572),$$

etc.

11. Corollaire. *Lorsque, dans*

$$A = a^2 + \alpha,$$

α *divise* 2a, *le développement de* $\sqrt{A}$ *est*

$$a\left(\frac{2a}{\alpha},\ 2a\right)\ (^{**}).$$

(*) Pour l'obtenir, j'emploie, non les fractions continues, mais l'*algorithme* au sujet duquel j'ai publié diverses Notes.

(**) Théorème I de M. de Jonquières (*Comptes rendus*, février 1883, p. 569).

Soit

$$X = a\,(b,\ 2a).$$

On trouve

$$X = \sqrt{a^2 + \frac{2a}{b}}.$$

Ainsi

$$\frac{2a}{b} = \alpha,$$

ou

$$b = \frac{2a}{\alpha}.$$

12. Problème I. *Dans quel cas peut-on avoir*

$$\sqrt{A} = a\,(b,\ b,\ 2a)?$$

Les réduites de la fraction symétrique

$$y = b,\ b$$

sont

$$\frac{b}{1},\quad \frac{b^2+1}{b}.$$

Conséquemment,

$$P = b,\quad P' = 1,\quad Q = b^2 + 1.$$

L'équation (13) se réduit à

$$(b^2+1)\alpha - 2ba = 1, \qquad (15)$$

ou

$$\alpha b^2 - 2ab + \alpha - 1 = 0.$$

On tire, de celle-ci :

$$b = \frac{a + \sqrt{a^2 - \alpha^2 + \alpha}}{\alpha}\ (*),$$

ou

$$b = \frac{a + \sqrt{A - \alpha^2}}{\alpha} \qquad (16)$$

(*) La seconde valeur de b est inadmissible, parce que le produit des deux égale $1 - \frac{1}{\alpha}$.

b est un nombre entier; donc $A - \alpha^2$ *doit être un carré parfait :*

$$A = \alpha^2 + \beta^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

D'après l'équation (15), b doit être *pair :* $b = 2\gamma$.

On satisfait à cette équation en prenant $\alpha = 1$, $a = \gamma$.

Les valeurs générales sont donc :

$$\alpha = 1 + 4\gamma\theta, \quad a = \gamma + (4\gamma^2 + 1)\theta. \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

En outre,

$$\beta = \gamma + (4\gamma^2 - 1)\theta. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Ces valeurs remplissent la condition

$$A = a^2 + \alpha = \alpha^2 + \beta^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

Soient, par exemple,

$$\gamma = 1, \quad \theta = 2.$$

De là résultent :

$$\alpha = 9, \quad a = 11, \quad \beta = 7, \quad A = 130 = 9^2 + 7^2;$$

puis

$$\sqrt{130} = 11\ (2,\ 2,\ 22).$$

13. Cas particulier remarquable. Dans les formules (18), (19), (20), supposons $\theta = \gamma$. Alors :

$$\alpha = 1 + 4\gamma^2, \quad a = 2\gamma(2\gamma^2 + 1), \quad \beta = 4\gamma^3;$$

$$A = 4\gamma^2(2\gamma^2 + 1)^2 + 4\gamma^2 + 1 = (4\gamma^2 + 1)^2 + (4\gamma^3)^2,$$

ou

$$A = \left[2\gamma(2\gamma^2 + 1)\right]^2 + (2\gamma)^2 + 1 = (4\gamma^2 + 1)^2 + (4\gamma^3)^2 \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

Ainsi, *chacun des nombres* A, A − 1 *est la somme de deux carrés.*

Les premières valeurs de A sont :

$$5^2 + 4^2 = 41, \quad 17^2 + 32^2 = 1\,313, \quad 37^2 + 108^2 = 13\,033, \ \ldots;$$

et l'on a

$$40 = 6^2 + 2^2, \quad 1\,312 = 36^2 + 4^2, \quad 13\,032 = 114^2 + 6^2, \ \ldots$$

14. Remarque. Soit l'équation

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

On en trouve une infinité de solutions au moyen des formules :

$$x = 4t^2 + 1, \quad y = 4t^3, \quad u = 2t(2t^2 + 1), \quad v = 2t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

15. Suite. Il est facile de former d'autres systèmes de formules donnant, chacun, une *infinité de solutions de cette équation* (22) (*). Par exemple, écrivons-la ainsi :

$$x^2 - u^2 = v^2 + 1 - y^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Prenons, arbitrairement, v et y; décomposons $v^2 + 1 - y^2$ en deux facteurs p, q, *de même parité*. Alors

$$x = \frac{1}{2}(p + q), \quad u = \frac{1}{2}(p - q).$$

16. Application.

$$y = 5, \quad v = 9, \quad pq = 57.$$

On peut prendre

$$p = 57, \quad q = 1; \qquad p = 19, \quad q = 3.$$

Par suite,

$$x = 29, \quad u = 28; \quad x = 11, \quad u = 8.$$

En effet :

$$29^2 + 5^2 = 28^2 + 9^2 + 1 = 841 + 25 = 784 + 81 + 1 = 866,$$
$$11^2 + 5^2 = 8^2 + 9^2 + 1 = 121 + 25 = 64 + 81 + 1 = 146.$$

17. Problème II. *Dans quel cas peut-on avoir*

$$\sqrt{A} = a\,(b, g, b, 2a)?$$

(*) J'ignore s'il existe des formules contenant *toutes les solutions*. Des valeurs (23), on conclut $u = y + v$.

Les réduites de la fraction b, g, b étant

$$\frac{b}{1}, \quad \frac{bg+1}{g}, \quad \frac{b^2g+2b}{bg+1},$$

il s'ensuit que

$$P = bg + 1, \quad P' = g, \quad Q = b^2g + 2b.$$

L'équation (13) devient donc

$$b(bg+2)\alpha - 2(bg+1)a = g \text{ (*)} \quad \ldots \quad (25)$$

Après quelques tâtonnements, on trouve qu'elle est vérifiée par

$$2a = -g(bg+1), \quad \alpha = -g^2.$$

En conséquence, les formules générales sont

$$2a = -g(bg+1) + b(bg+2)\theta \text{ (**)}, \quad \ldots \quad (26)$$
$$\alpha = -g^2 + (bg+1)\theta \quad \ldots \quad (27)$$

Soient, par exemple :

$$b = 5, \quad g = 1, \quad \theta = 2.$$

On a :

$$2a = -6 + 5.7.2 = 64, \quad a = 32, \quad \alpha = -1 + 6.2 = 11, \quad A = 32^2 + 11 = 1\,035;$$

puis

$$\sqrt{1\,035} = 32\,(5, 1, 5, 64).$$

18. Remarque. L'équation (25), ou

$$g\alpha b^2 - 2(ga - \alpha)b - (2a + g) = 0$$

donne

$$b = \frac{ga - \alpha + \sqrt{g^2(a^2+\alpha) + \alpha^2}}{g\alpha}.$$

b est un nombre entier; donc $g^2A + \alpha^2$ *doit être un carré* λ^2 (***).

(*) Celle-ci est impossible si, b étant *pair*, g est *impair*.
(**) Si b et g sont *impairs*, l'entier θ doit être *pair*.
(***) En particulier, lorsque $g = 1$, $A + \alpha^2 = a^2 + \alpha + \alpha^2$ *est un carré*

En effet, des formules (26), (27), on déduit :

$$A = \frac{1}{4}\left[-g(bg+1) + b(bg+2)\theta\right]^2 - g^2 + (bg+1)\theta,$$

$$g^2A = \frac{g^2}{4}\left\{\begin{array}{ll} g^2(bg+1)^2 - 2bg(bg+1)(bg+2) & \left| \; \theta + b^2(bg+2)^2\theta^2 \right. \\ -4g^2 \qquad\qquad\qquad\qquad + 4(bg+1) & \left| \right. \end{array}\right\},$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{4}\left[4g^4 - 8g^2(bg+1)\theta + 4(bg+1)^2\theta^2\right],$$

$$4(g^2A+\alpha^2) = \begin{array}{l} g^4(bg+1)^2 - 2bg^3(bg+1)(bg+2) \\ \qquad\qquad\qquad - 4g^2(bg+1) \end{array} \left| \begin{array}{l} \theta + b^2g^2(bg+2)^2 \\ \quad + 4(bg+1)^2 \end{array} \right| \theta^2$$

$$= g^4(bg+1)^2 - 2g^2(bg+1)(b^2g^2+2bg+2)\theta + (b^4g^4+4b^3g^3+8b^2g^2+8bg+4)\theta^2$$

$$= \left[g^2(bg+1) - (b^2g^2+2bg+2)\theta\right]^2,$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[-g^2(bg+1) + (b^2g^2+2bg+2)\theta\right],$$

$$ga - \alpha = \frac{1}{2}\left[-g^2(bg-1) + (b^2g^2-2)\theta\right].$$

La somme des deux dernières quantités est

$$-bg^3 + bg(bg+1)\theta,$$

ou $bg\alpha$; ce qui devait arriver.

19. Cas particulier. Soient, dans les formules (26), (27) :

$$b = 1, \quad \theta = g + 3.$$

On trouve

$$a = 2g + 3, \quad \alpha = 4g + 3, \quad A = (a+1)^2 - 4, \quad \lambda = 2g^2 + 4g + 3.$$

Par conséquent :

a *étant un nombre impair, supérieur à* 3, *le développement de*

$$\sqrt{(a+1)^2 - 4}$$

est

$$a\left(1, \frac{a-3}{2}, 1, 2a\right) \text{ (*)}.$$

(*) Théorème IV de M. de Jonquières.

20. Problème III. *Dans quels cas peut-on avoir*

$$\sqrt{A} = a\,(b, c, \ldots, e, f, f, e, \ldots, c, b, 2a)?$$

Nous avons trouvé, ci-dessus (2) :

$$P = Q' = EE' + FF', \quad P' = E'^2 + F'^2, \quad Q = E^2 + F^2.$$

L'équation

$$Q\alpha - 2Pa = P' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

est donc

$$(E^2 + F^2)\alpha - 2\,(EE' + FF')\,a = E'^2 + F'^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

A cause de

$$(EF' - FE')^2 = +1,$$

elle est vérifiée par

$$\alpha = (E'^2 + F'^2)^2, \quad a = \frac{1}{2}(EE' + FF')(E'^2 + F'^2) \ (^*).$$

Les valeurs générales des inconnues sont, par conséquent :

$$\alpha = (E'^2 + F'^2) + (EE' + FF')\,\theta, \quad a = \frac{1}{2}\left[(EE' + FF')(E'^2 + F'^2) + (E^2 + F^2)\,\theta\right] \ (^{**}). \quad (29)$$

Donc, *si l'on applique les formules* (29), *le développement de*

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + \alpha}$$

sera

$$a\,(b, c, \ldots, e, f, f, e, \ldots, c, b, 2a).$$

21. Application. Soient, comme ci-dessus (3) :

$$E = 2, \quad E' = 1, \quad F = 7, \quad F' = 3.$$

(*) $(E^2 + F^2)(E'^2 + F'^2) - (EE' + FF')^2 = (EF' - FE')^2$; etc.

(**) Si, d'après les valeurs de E, E', F, F', le nombre entre parenthèses est *impair*, le problème proposé sera *impossible*.

Les formules (29) deviennent :

$$\alpha = 25 + 23\theta, \quad a = \frac{1}{2}\left[23.10 + 53\theta\right];$$

ou, si l'on fait $\theta = 2t$:

$$\alpha = 25 + 46t, \quad a = 115 + 53t.$$

Il en résulte les systèmes suivants :

$$\alpha = 25,\ a = 115; \quad \alpha = 71,\ a = 168; \quad \alpha = 117,\ a = 221; \ \ldots;$$

puis

$$A = 115^2 + 25 = 13\,250; \quad A = 168^2 + 71 = 28\,295; \quad A = 221^2 + 117 = 48\,958; \ \ldots$$

Ainsi :

$$\sqrt{13\,250} = 115\,(2, 3, 3, 2, 230); \quad \sqrt{28\,295} = 168\,(2, 3, 3, 2, 336);$$
$$\sqrt{48\,958} = 221\,(2, 3, 3, 2, 442).$$

Liége, 18 avril 1883.

P. S. (27 janvier 1884). Au Congrès de Rouen (août 1883), j'ai donné la résolution complète de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + w^2,$$

dont un cas particulier a été considéré ci-dessus (p. 78). Cette communication va paraître dans les *Atti* de l'Académie des *Nuovi Lincei*.