This page intentionally left blank.

Sur les lignes géodésiques des surfaces de révolution; par E. Catalan, associé de l'Académie.

(A l'occasion d'une Note de M. Jamet.)

I.

Remarques sur la Note.

1. Le curieux théorème de M. Jamet résulte de l'équation

$$u^2 d\omega = k ds \text{ (*)}, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

laquelle résulte, elle-même, d'une combinaison convenable des relations

$$\frac{ds}{dt} = \text{const}, \quad u^2 \frac{d\omega}{dt} = \text{const}. \quad \ldots \quad (2)$$

La première exprime que *toute ligne géodésique est la trajectoire d'un point matériel animé d'une vitesse constante* (**).

(*) Je modifie un peu la notation adoptée par l'honorable auteur.

(**) Propriété bien connue. Dans son premier Mémoire sur les lignes géodésiques, Liouville s'énonçait ainsi : « Je prends pour » point de départ ce théorème connu (ou, si l'on veut, cette défini- » tion), que la ligne géodésique pour une surface est celle que décri- » rait, à la suite d'une impulsion quelconque, un mobile assujetti à » demeurer sur la surface et dont le mouvement ne serait altéré » par aucune force accélératrice. » (*Journal de Mathématiques*, t. IX, p. 401).

2. D'après la seconde des équations (2) : *Soit une ligne géodésique, tracée sur une surface de révolution. Si l'on projette cette ligne sur un plan perpendiculaire à l'axe, le principe des aires a lieu pour la projection;* ou, ce qui est équivalent :

Soit une surface S, *dont toutes les normales rencontrent une droite fixe,* D; *et soit* C *une ligne géodésique de* S. *Si l'on projette* C *sur un plan perpendiculaire à* D, *le principe des aires a lieu pour la projection de* C.

En effet, la condition

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

déduite des équations

$$X - x + p(Z - z) = 0, \quad Y - y + q(Z - z) = 0,$$

prouve que S *est une surface de révolution* (*).

3. Naturellement, M. Jamet a formé les équations (2) en appliquant le *principe des forces vives* et la *théorie des moments* (**). Cette méthode, employée par Liouville (***),

---

(*) Houël, *Calcul infinitésimal*, t. III, p. 168.

(**) Ou plutôt, en employant les relations fondamentales :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mathrm{N}\cos\lambda,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\mathrm{N}\cos\mu,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\mathrm{N}\cos\nu;$$

et en ayant égard à la condition (3).

(***) Je viens de le rappeler.

est ingénieuse et simple; mais elle a un défaut : elle introduit des éléments étrangers à la question. Or, il est très facile de former, directement, l'équation (1).

4. En effet, l'équation des lignes géodésiques :

$$\frac{d\,.\,\frac{dx}{ds}}{p}=\frac{d\,.\,\frac{dy}{ds}}{q} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

devient d'abord, dans le cas où

$$z=\varphi(x^2+y^2)=f(u): \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$ds(yd^2x-xd^2y)-d^2s(ydx-xdy)=0,$$

ou

$$\frac{d^2s}{ds}=\frac{d(xdy-ydx)}{xdy-ydx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

L'intégrale immédiate est

$$kds=xdy-ydx; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

ou, après transformation de coordonnées (*) :

$$kds=u^2d\omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (!)$$

5. Au moyen des équations (1), (5), jointes à la formule évidente

$$ds^2=u^2d\omega^2+(1+f'^2)du^2; \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

le savant professeur de Nantes forme, sans s'y arrêter, la relation

$$d\omega=\frac{k}{u}du\sqrt{\frac{1+f'^2}{u^2-k^2}}, \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

(*) On sait que

$$xdy-ydx=u^2d\,.\,\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}=u^2d\omega.$$

intégrale première de l'équation des lignes géodésiques tracées sur une surface de révolution.

J'ignore si cette intégrale, dont la forme est remarquable, était déjà connue (*).

Il en résulte, à cause de l'équation (1) :

$$ds = udu\sqrt{\frac{1+f'^2}{u^2-k^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

II.

Rayon de courbure d'une ligne géodésique.

6. Remplaçons l'équation (4) par

$$\frac{d\,.\,\dfrac{dx}{ds}}{-p}=\frac{d\,.\,\dfrac{dy}{ds}}{-q}=\frac{d\,.\,\dfrac{dz}{ds}}{1}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{p^2+q^2+1}}=\frac{ds}{\rho\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad (11);$$

ε et ρ désignant l'angle de contingence et le rayon de courbure (**).

(*) Après coup, je m'aperçois qu'elle a été publiée dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. VI, p. 360).

(**) Il est connu que, α, β, γ étant les angles de la tangente avec les axes rectangulaires, on a

$$\varepsilon^2 = (d.\cos\alpha)^2 + (d.\cos\beta)^2 + (d.\cos\gamma)^2$$
$$= \left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2;$$

etc.

A cause de

$$p = f' \cdot \frac{du}{dx} = f' \cdot \frac{x}{u}, \quad q = f' \cdot \frac{du}{dy} = f' \cdot \frac{y}{u}, \quad . \quad . \quad (12)$$

nous avons

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + f'^2};$$

puis

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{1 + f'^2}}{ds} d. \frac{dz}{ds};$$

ou, par la formule (10),

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{u^2 - k^2}}{udu} d. \frac{dz}{ds} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Il ne reste donc plus qu'à développer la différentielle de $\frac{dz}{ds}$.

7. Il est visible que

$$\frac{dz}{ds} = \cos \gamma = \frac{f'}{u} \sqrt{\frac{u^2 - k^2}{1 + f'^2}} = \frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}} \cdot \frac{\sqrt{u^2 - k^2}}{u}. \quad (14)$$

Pour simplifier le calcul, je pose :

$$f' = \operatorname{tg} \lambda, \quad u = \frac{k}{\cos \mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Il résulte, de ces abréviations :

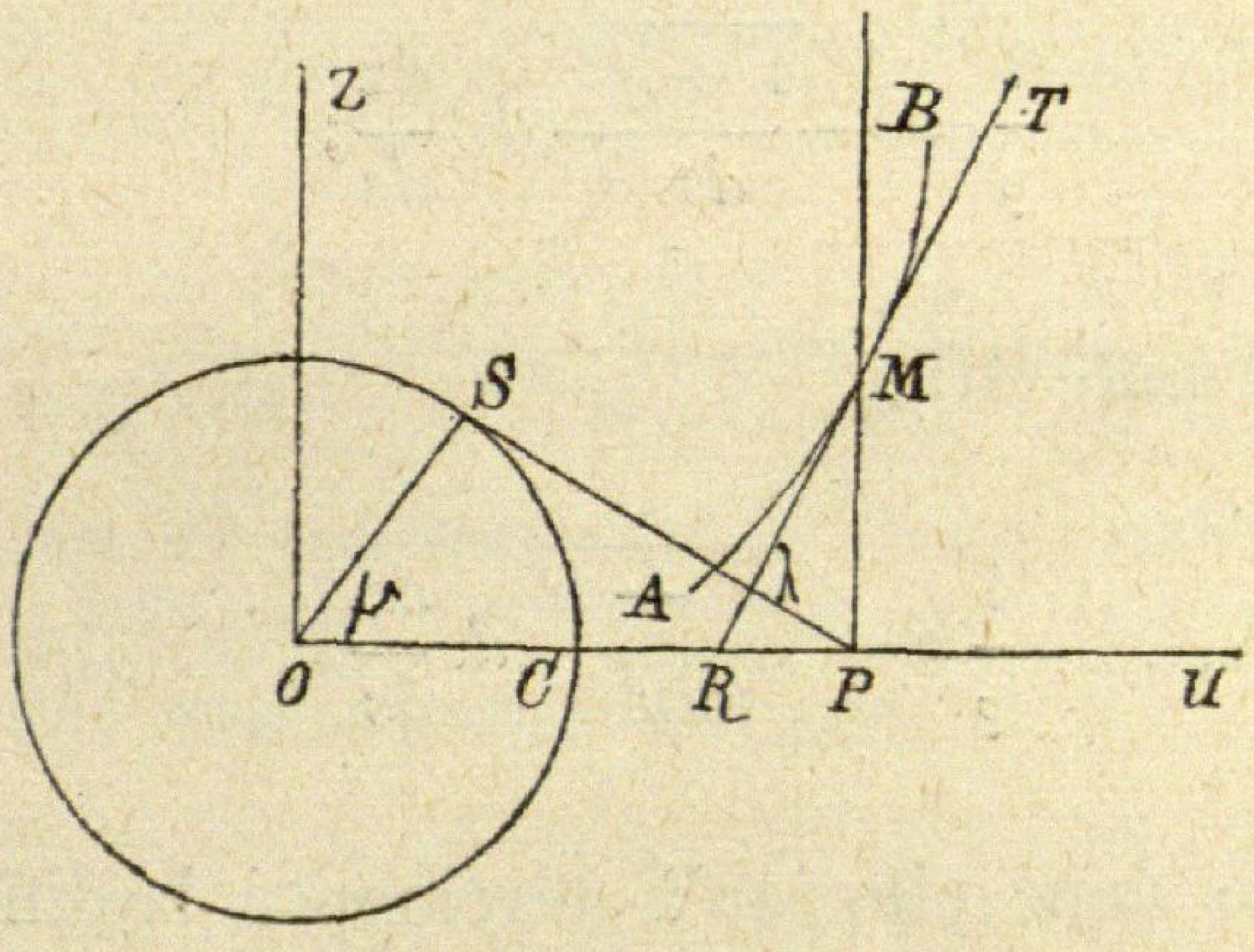
$$\frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}} = \sin \lambda, \quad \frac{\sqrt{u^2 - k^2}}{u} = \sin \mu; \quad . \quad . \quad (16)$$

puis

$$\cos \gamma = \sin \lambda \sin \mu. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

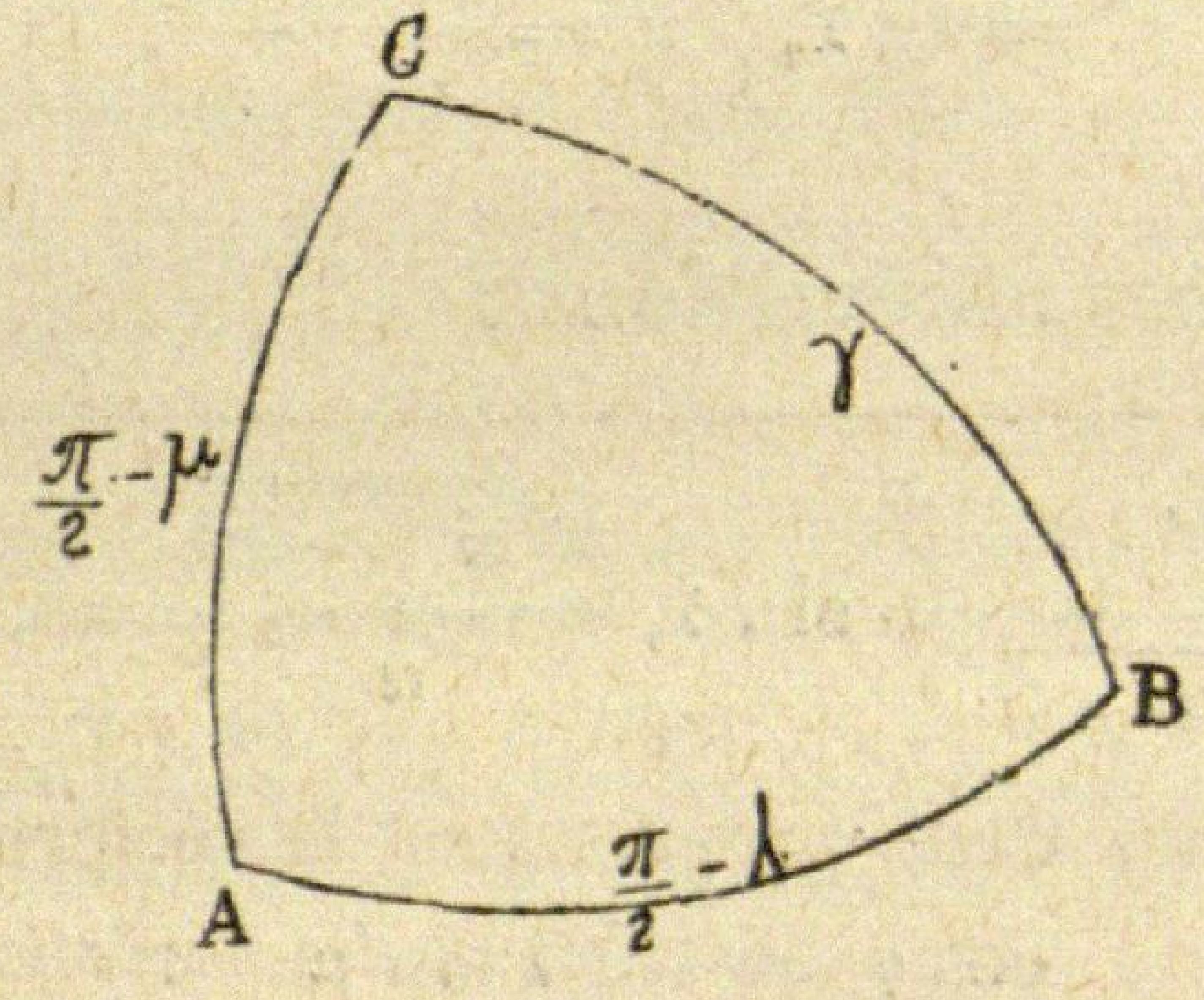
Les formules (15) et (17) peuvent être interprétées géométriquement :

1° M étant un point de la ligne géodésique considérée, soit AMB la section méridienne passant en M. Il est clair que λ est l'angle TRu formé par la tangente RMT et la droite Ou, perpendiculaire à l'axe Oz de la surface;



2° Du point O comme centre, avec k pour rayon, décrivons une circonférence OC. Si, du pied de l'ordonnée de M, nous menons, à OC, la tangente PS, nous aurons $u\text{OS} = \mu$;

3° La relation (17) exprime que γ est l'hypoténuse d'un triangle sphérique, dans lequel les côtés de l'angle droit sont les compléments de λ et de μ.



8. Par les formules (15) et (17) :

$$d\lambda = \frac{f''}{1+f'^2}\,du,\quad d\mu = \frac{k}{u}\frac{du}{\sqrt{u^2-k^2}},$$

$$\frac{d(\cos\gamma)}{du} = \sin\mu\cos\lambda\,\frac{f''}{1+f'^2} + \sin\lambda\cos\mu\,\frac{k}{u\sqrt{u^2-k^2}};$$

puis

$$\frac{d(\cos\gamma)}{du} = \frac{\sqrt{u^2-k^2}\,f''}{u(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{k^2 f'}{u^2\sqrt{(u^2-k^2)(1+f'^2)}}. \qquad (18)$$

Au moyen de cette valeur et de la formule (13), on a, finalement :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(u^2-k^2)f''}{u^2(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}} + k^2\frac{f'}{u^3\sqrt{1+f'^2}}. \quad . \quad . \qquad (19)$$

9. Les sections méridiennes, caractérisées par $\omega = const$, sont, évidemment, des lignes géodésiques. Quand il en est ainsi, $k=0$ (*); et la formule (19) devient

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{f''}{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui devait être.

(*) Si l'on cherche dans quel cas le rapport $\frac{\rho_1}{\rho}$ est constant, pour une même ligne géodésique, on trouve que *la surface doit être un ellipsoïde de révolution.* Cette propriété est la réciproque d'un théorème dû à Gudermann. (Lindelöf, *Calcul des variations*, p. 278.)

Introduisant le rayon ρ_1, de la méridienne, ainsi que les angles λ et μ (15), on peut donc écrire

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\sin^2\mu}{\rho_1}+\frac{\sin\lambda\cos^2\mu}{u}; \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (21)$$

expression assez simple.

Il en résulte

$$\frac{1}{\rho}=\frac{u^2-k^2}{u^2}\frac{1}{\rho_1}+\frac{k^2 f'}{u^3\sqrt{1+f'^2}}.$$

Note relative à un coup de foudre sur un chevalet portant des fils téléphoniques ; par Edmond Sacré.

M. Evrard, ingénieur en chef à l'administration des télégraphes, a publié dans le *Bulletin* n° 7 de la Société d'électricité de Belgique, les nombreux coups de foudre qui ont frappé les appareils télégraphiques de l'État, du mois de mai au mois d'août 1885.

Cette année encore les journaux ont relaté un coup de foudre qui a boulversé le bureau télégraphique de l'hôtel de ville de Bruxelles.

Le 18 juin dernier, à 4 heures de relevée, la foudre a frappé une maison située Chaussée de Wavre, coin de la rue d'Édimbourg. Sur le toit de cette maison se trouvaient plusieurs supports avec fils téléphoniques; un certain nombre de ces fils ont été volatilisés, ce qui a occasionné une pluie de feu dont j'ai été témoin.