This page intentionally left blank.

RAPPORTS.

Généralisation d'une propriété des surfaces du deuxième ordre; par Jamet, professeur au Lycée de Nantes.

Rapport de M. Catalan.

I.

« M. Jamet, jeune professeur bien connu des lecteurs de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, s'est proposé la généralisation d'une propriété signalée dans le journal de MM. Mansion et Neuberg (*); savoir, la solution du problème suivant :

Une surface S *est coupée par un plan* P *contenant une droite fixe* D. *En chaque point de la section* C, *on mène le plan* T, *tangent à* S. *Comment doit-on prendre cette surface* S, *pour que les plans* T *concourent en un même point* M, *et que le lieu de* M *soit une droite* Δ?

Évidemment, comme le fait observer l'auteur, S peut être une surface du deuxième ordre ou une surface de révolution. Dans le premier cas, D, Δ sont des *droites conjuguées*; dans le second, la droite Δ est l'*axe* de S : quant à la droite D, on peut la supposer transportée à l'infini, perpendicu-

---

(*) *Mathesis*, août 1883; question 270.

lairement à Δ (*). La première partie de la Note est relative à cette position particulière de D; la seconde traite du cas général.

II.

La droite Δ étant prise pour axe des ordonnées verticales, la surface S est représentée par l'équation aux dérivées partielles :

$$z - px - qy = f(z), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

dont l'intégrale est

$$\sqrt{x^2 + y^2}\, e^{\int \frac{dz}{f(z) - z}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (^{**}) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Afin de déterminer la droite D, l'auteur remplace l'intégrale (2) par le système des équations

$$\alpha x + \beta y = \mathrm{F}(z), \quad \alpha' x + \beta' y = 0,$$

dans lesquelles α, β sont des fonctions d'un paramètre λ. Il résulte, de ce système (***), que: 1° S *est l'enveloppe d'un*

(*) M. Jamet s'énonce ainsi : « La droite D... intersection du *plan de » l'infini* avec un plan perpendiculaire à l'axe. » Nous avons manifesté, dans la *Nouvelle Correspondance*, notre sentiment sur cette obscure dénomination.

(**) Cette intégrale peut être écrite sous la forme

$$u = \mathrm{F}(z)\,\psi(\omega);$$

u, ω étant des coordonnées polaires. D'après cette équation, *les sections faites dans la surface* S, *par des plans perpendiculaires à* Δ, *sont des courbes semblables : le centre de similitude est sur* Δ. De simples considérations géométriques suffisent à établir l'accord entre cette proposition et les théorèmes de M. Jamet.

(***) On peut y substituer celui-ci :

$$\lambda x + y\varpi'(\lambda) = \mathrm{F}(z), \quad x + y\varpi(\lambda) = 0.$$

cylindre variable, dont les génératrices sont parallèles au plan xy; 2° *le plan de la courbe de contact contient* Δ (*).

III.

Passant au cas général, M. Jamet trouve d'abord l'équation aux dérivées partielles :

$$(y-b)\left(x\frac{dt}{dx}+y\frac{dt}{dy}\right)=-bt-f(t), \quad . \quad . \quad (3)$$

dans laquelle

$$t=\frac{z}{y-b};$$

puis le système :

$$x-\alpha y=\beta(y-b)\mathrm{T}, \qquad -\alpha' y=\beta'(y-b)\mathrm{T},$$

$$\mathrm{T}=e^{\int\frac{b\,dt}{bt+f(t)}} \quad (^{**}).$$

(*) Voir la remarque ci-dessus. Cette partie de la Note est un peu écourtée.

(**) Le procédé *classique* donne, comme intégrale de l'équation (3),

$$\frac{y-b}{y}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=\mathrm{F}(t). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

On y doit joindre

$$\frac{z}{\varphi-b}=t. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Ainsi (d'après la signification de b), la surface S est le lieu des intersections des plans P, passant par D, avec des cônes Σ, ayant pour équation

$$\frac{z}{y}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=t\,\mathrm{F}(t). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

Pour deux valeurs différentes de t, cette équation devient

$$\frac{z}{y}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=\lambda, \quad \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Y}}\varphi\left(\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}\right)=\mu.$$

Il résulte, de ces dernières équations, que *les sections faites, dans les cônes* Σ, Σ', *par un même plan parallèle aux* x y, *sont des courbes semblables.*

IV.

Après avoir établi la *réciprocité* des droites D, Δ, l'Auteur réduit, aux *quadratures*, l'équation des lignes asymptotiques de S. Il trouve, dans le cas général,

$$d\lambda \sqrt{\frac{uv'' - vu''}{uv' - vu'}} = \pm dt \sqrt{\frac{T''}{T'}} \ (*).$$

V.

En résumé, la Note présentée à l'Académie me semble intéressante et bien faite. L'auteur, simple professeur de Mathématiques *élémentaires*, connaît la Géométrie des surfaces et le Calcul intégral. J'ai l'honneur de proposer que des remercîments lui soient adressés pour sa communication, et que celle-ci soit insérée au *Bulletin* de la séance. »

Ces conclusions, appuyées par M. Mansion, second Commissaire, sont mises aux voix et adoptées.

En effet, si l'on suppose

$$Y = ky, \quad X = kx,$$

on trouve

$$K = \frac{\lambda}{\mu},$$

formule qui détermine le *rapport de similitude.*

(*) $Uv'' - vu''$ est la dérivée de $uv' - vu'$. Cette circonstance peut-elle simplifier l'intégration du premier membre?

—