Biodiversity Heritage Library

http://www.biodiversitylibrary.org/

Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.
Bruxelles.
http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/5550

ser.3:t.5 (1883): http://www.biodiversitylibrary.org/item/111256

Article/Chapter Title: Sommaire d'un Mémoire sur la théorie des fractions continues et sur certaines séries
Author(s): Eugène Catalan
Page(s): Page 612, Page 613, Page 614, Page 615, Page 616, Page 617, Page 618

Contributed by: Missouri Botanical Garden, Peter H. Raven Library
Sponsored by: Missouri Botanical Garden

Generated 26 November 2015 3:03 AM
http://www.biodiversitylibrary.org/pdf4/045746500111256

This page intentionally left blank.

Notes sur la théorie des fractions continues et sur certaines séries; **par M. E. Catalan, associé de l'Académie.**

Voici le sommaire du nouveau Mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie.

Note I. *Théorème de Kramp.* La démonstration de ce théorème, contenue dans la Note I, est beaucoup plus simple que celle que j'ai publiée en 1849. Du reste, le théorème de Kramp m'est connu, seulement, par la mention qu'en a faite *Lebesgue,* en 1840 : il ne m'a pas été possible de consulter l'*Arithmétique universelle* (*).

Note II. *Fractions périodiques.* Rappel et généralisation de quelques propriétés connues.

Note III. *Série de Lamé.* A propos de cette célèbre série, je donne quelques propositions nouvelles. Par exemple celle-ci :

Si l'arc φ *a pour tangente* $\frac{2}{a}$, a *étant un nombre entier, la fonction*

$$tg^{-pq}\frac{\varphi}{2} + (-1)^p\, tg^{-p(q-2)}\frac{\varphi}{2} + tg^{-p(q-4)}\frac{\varphi}{2} + \cdots + (-1)^{pq} tg^{pq}\frac{\varphi}{2}$$

se réduit à un nombre entier.

Note IV. *Série des inverses.* J'appelle ainsi la *série dont les termes sont les inverses des dénominateurs des réduites d'une fraction continue illimitée. Toute série des inverses est convergente.*

(*) Depuis que ceci est écrit, j'ai trouvé le livre de Kramp.

Si, dans la série de Lamé, on prend les termes de rang *impair*, la sommation de la série des inverses, correspondante, est un problème facile; en 1878, j'en ai donné une solution.

Au contraire, la sommation de la série formée par les inverses des termes de rang *pair*, dans la série de Lamé, me semble ardue. Cette sommation dépend de celle de la *série de Lambert*, et *réciproquement*.

Note V. *Généralisation de la série de Lamé*. Bornons-nous à l'énoncé de la proposition suivante, analogue à celle qui a été citée tout à l'heure.

Soit a *un nombre entier, supérieur à* 2. *Soit* α *une racine de l'équation*

$$x^2 - ax + 1 = 0.$$

La quantité

$$\frac{1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \cdots + \alpha^{2n-2}}{\alpha^{n+1}} + a\alpha^n$$

est un nombre entier.

Note VI. *Fractions tournantes*. On peut donner ce nom à deux fractions continues, *limitées*, telles que

$$x = a, b, c, d, e; \quad y = b, c, d, e, a.$$

Elles jouissent de quelques propriétés intéressantes.

Note VII. *Développement de* $\sqrt{A}$. Après avoir rappelé les principales propositions connues, relatives à cette importante application de la théorie des fractions continues, j'en démontre quelques autres, que je crois nouvelles. En voici une :

Soient $A_1, A_2, A_4, A_8, \ldots$, *une suite de nombres entiers, indéfiniment croissants, satisfaisant à la condition*

$$A_{2n} = 2A_n^2 - 1.$$

Soient B_1, B_2, B_4, B_8,..., *une autre suite de nombres entiers, satisfaisant à la condition*

$$B_{2n} = 2A_n B_n.$$

1°

$$\frac{A_1^2 - 1}{B_1^2} = \frac{A_2^2 - 1}{B_2^2} = \frac{A_4^2 - 1}{B_4^2} = \ldots = C.$$

2° *Les fractions*

$$\frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \frac{A_4}{B_4}, \ldots$$

tendent, indéfiniment, vers $\sqrt{C}$.

Note VIII. *Analyse indéterminée.* Cette Note est principalement consacrée à la résolution, en nombres entiers, de l'équation très simple :

$$x^2 = y^2 + (y+1)^2.$$

Après avoir complété un curieux théorème de M. Gerono, je trouve diverses identités, plus ou moins remarquables, parmi lesquelles je citerai celle-ci, parce qu'elle constitue un théorème de géométrie élémentaire :

Si, d'un point extérieur à un cercle O, *on mène une tangente* MT *et le diamètre* MAOB, *on a*

$$\begin{aligned} 4\overline{OM}\left[\overline{BM}^{2n-1} + \overline{MA}^{2n-1}\right] &= 2\left[\overline{MB}^{n} - \overline{MA}^{n}\right]^2 \\ &+ \left[\overline{MB}^{n-1} - \overline{MA}^{n-1} - 2\overline{MT}^{n-1}\right]^2 \overline{MT}^2 \\ &+ \left[\overline{MB}^{n-1} - \overline{MA}^{n-1} + 2\overline{MT}^{n-1}\right]^2 \overline{MT}^2. \end{aligned}$$

Note IX. *Développements en séries.* Soit, comme dans la Note VII,

$$\sqrt{A} = a\,(f, g, h, \ldots p, q, 2a).$$

Soit $\frac{Q_n}{Q'_n}$ la réduite répondant au terme q, dans la n[ième] période. Les Géomètres qui, depuis Lagrange, se sont occupés du développement de $\sqrt{A}$, ont appliqué la formule

$$\sqrt{A} = \frac{Q_1}{Q'_1} - Q'_1 \left[\frac{1}{Q'_1 Q'_2} + \frac{1}{Q'_2 Q'_3} + \frac{1}{Q'_3 Q'_4} + \cdots \right];$$

mais je pense qu'ils n'ont point remarqué celle-ci :

$$\sqrt{A} = \frac{Q_1}{Q'_1} - \left[\frac{1}{Q'_2} + \frac{1}{Q'_4} + \frac{1}{Q'_8} + \frac{1}{Q'_{16}} + \cdots \right],$$

incomparablement plus approximative que la première. Dans le cas de $A = 7$, si l'on se borne aux trois premiers termes de la série entre parenthèses, on obtient, avec dix-huit décimales *exactes* :

$$\sqrt{7} = 2,645\,802\,331\,038\,932\,159.$$

La même Note contient la transformation d'une certaine fraction continue périodique, très générale, en série convergente.

Note X. *Relation entre deux séries.* Je me borne à énoncer les deux propositions principales :

1° *Soit une série*

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \cdots$$

dont les termes satisfont à la loi de récurrence :

$$v_n = v_{n-1} \frac{v_2}{v_1} - v_{n-2}.$$

Si l'on en déduit les séries convergentes :

$$S = \frac{1}{v_1 v_2} + \frac{1}{v_2 v_3} + \frac{1}{v_3 v_4} + \cdots,$$

$$\Sigma = \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_4} + \frac{1}{v_8} + \cdots,$$

on a, entre les sommes S, Σ, *la relation*

$$\Sigma = v_1 \mathrm{S}.$$

2° x *étant une fraction proprement dite :*

$$\frac{1}{1+x}+\frac{x}{(1+x)(1+x+x^2)}+\frac{x^2}{(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)}+\cdots=1. \quad (\mathrm{Q})$$

Note XI. *Sur la formule* (Q). La discussion de cette formule donne lieu à quelques théorèmes d'Arithmétique et d'Algèbre ; savoir :

1° *Si l'on considère les solutions entières* (non négatives) *de chacune des* n + 1 *équations :*

$$\alpha + 2\beta = n, \quad 2\alpha+3\beta = n-1, \cdots (n+1)\alpha + (n+2)\beta = 0,$$

le nombre total de ces solutions est n + 1 ;

2° *Aucun nombre de la forme*

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^k)^2 - x^k$$

n'est premier (excepté si $k = 1$);
etc., etc.

Note XII. *Séries elliptiques.* Afin de ne pas allonger indéfiniment cet exposé qui devait être *sommaire*, je me borne à quelques énoncés :

1°
$$\frac{1}{1-q^a}+\frac{q^b}{1-q^{a+c}}+\frac{q^{2b}}{1-q^{a+2c}}+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-q^b}+\frac{q^a}{1-q^{b+c}}+\frac{q^{2a}}{1-q^{b+2c}}+\cdots$$

2°
$$2q(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^4$$
$$=\frac{q-4q^4+9\,q^9-16\,q^{16}+\cdots}{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}+\frac{q+4q^4+9\,q^9+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}$$

3°
$$\frac{q-4q^4+9\,q^9-16q^{16}+\cdots}{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}=\sum_1^{\infty}\frac{n}{i}q^n\int i.$$

4° *Soit* n *un nombre impair. Le nombre des décompositions de* n, *en parties impaires, inégales, se compose du nombre des décompositions de* $\frac{n-1}{2}$, *en parties qui ne surpassent pas* 1, *augmenté du nombre des décompositions de* $\frac{n-9}{2}$, *en parties qui ne surpassent pas* 3, *augmenté du nombre des décompositions de* $\frac{n-25}{2}$, *en parties qui ne surpassent pas* 5; etc.

Etc., etc.

La même Note contient la copie d'une lettre adressée à M. Hermite, relativement à une certaine communication de M. *Faa de Bruno*, insérée aux *Comptes rendus*.

ADDITION.

Un Géomètre bien connu, M. de Jonquières, vient de présenter, à l'Académie des sciences, un travail intitulé : *Note sur un point de la théorie des fractions continues périodiques* (*). Les théorèmes, très intéressants, auxquels l'honorable auteur est parvenu, m'ont fait revenir sur mes précédentes recherches. Malheureusement, je n'ai pu rédiger encore cette *Addition*: le temps m'a fait défaut. Afin de prendre date, j'énonce le théorème suivant, qui contient, comme cas particuliers, quelques-uns des résultats obtenus par M. de Jonquières :

Soient $\frac{P}{P'}, \frac{Q}{P}$ *les deux dernières réduites de la fraction continue, symétrique :*

$$b,\ c,\ d,\ \ldots\ d,\ c,\ b.$$

Soient a, α, *deux nombres entiers, satisfaisant aux conditions :*

$$Q\alpha - 2Pa = P', \quad \alpha < 2a.$$

(*) *Comptes rendus*, 26 février 1883, 5 mars 1883.

Si l'on fait

$$A = a^2 + \alpha,$$

les racines carrées de tous les nombres A (*) *sont données par la formule*

$$\sqrt{A} = a(b, c, d, \ldots d, c, b, 2a).$$

Liège, 3 avril 1883.

Sur les surfaces du second ordre; par M. C. Le Paige, professeur à l'Université de Liège.

Nous avons récemment fait connaître quelques propriétés des surfaces du second ordre, qui permettent de construire ces surfaces quand on en connaît neuf points. Les remarques faites sur ce sujet se présentant d'une manière incidente, dans un travail dont le but essentiel était la détermination des groupes d'une H_2^3, nous n'avons pu leur donner ni l'étendue, ni la clarté désirables. Nous demanderons à l'Académie la permission de revenir sur notre méthode, qui ne paraît pas dénuée d'intérêt. En outre, nous démontrerons le théorème fondamental sur lequel nous nous appuyons, d'une manière plus purement géométrique, sans faire usage des propriétés des formes trilinéaires.

Nous commencerons par établir une proposition qui nous sera utile par la suite.

THÉORÈME. — *Si l'on joint de toutes les manières possibles, les trois côtés* a, b, c, *d'un triangle à trois points*

(*) Il y en a une infinité.