

Journal de mathématiques
pures et appliquées : ou
recueil mensuel de mémoires
sur les diverses parties des
mathématiques [...]

Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques / publié par Joseph Liouville. 1854.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisationcommerciale@bnf.fr.

NOTE

SUR LA PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE;

PAR M. E. CATALAN.

Le dernier cahier du *Journal de l'École Polytechnique* renferme, entre autres matières, la solution d'un problème que l'on peut énoncer ainsi : *Trouver tous les systèmes de cercles orthogonaux tracés sur une sphère donnée.* Cette solution, fondée sur les théories les plus élevées du calcul intégral, m'a semblé d'une complication peu en rapport avec la nature du sujet. On va voir, en effet, que le problème dont il s'agit peut être résolu à l'aide des plus simples notions de Géométrie et d'Algèbre.

1. *Les projections stéréographiques de deux cercles orthogonaux appartenant à une sphère donnée, sont des cercles orthogonaux. Réciproquement, à deux cercles orthogonaux tracés sur le plan qui sert de TABLEAU correspondent, sur la sphère, deux cercles orthogonaux.*

D'après ces deux lemmes, pour résoudre la question qui nous occupe, il suffit de *déterminer tous les systèmes de cercles orthogonaux tracés sur un plan.*

2. Considérons deux séries de cercles tels, que chacun de ceux de la première série coupe orthogonalement tous ceux qui appartiennent à la seconde. Si nous rapportons ces cercles à deux axes rectangulaires quelconques, nous pourrons les représenter par les deux équations

$$(1) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

$$(2) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2,$$

dans lesquelles a, b sont des fonctions inconnues du paramètre r , et α, β des fonctions inconnues du paramètre ρ .

La condition d'orthogonalité donne d'abord

$$(x - a)(x - \alpha) + (y - b)(y - \beta) = 0;$$

puis, par l'élimination de x et de y ,

$$(a - \alpha)^2 + (b - \beta)^2 = r^2 + \rho^2,$$

ou

$$(3) \quad (a^2 + b^2 - r^2) + (\alpha^2 + \beta^2 - \rho^2) = 2(a\alpha + b\beta).$$

3. L'équation (3), dans laquelle r et ρ sont *deux variables indépendantes*, est impossible, à moins que son second membre ne se réduise à la forme $2[f(r) + \varphi(\rho)]$: en effet, elle doit être identique par rapport aux deux variables, et son premier membre est déjà de cette forme.

Cela posé, de

$$(4) \quad a\alpha + b\beta = f(r) + \varphi(\rho),$$

on conclut, en prenant les dérivées relatives à r ,

$$a'\alpha + b'\beta = f'(r),$$

ou

$$(5) \quad \alpha + \frac{b'}{a'}\beta = \frac{f'(r)}{a'}.$$

Cette nouvelle relation exige, évidemment, que $\frac{b'}{a'}$ et $\frac{f'(r)}{a'}$ soient des constantes k et η . Ainsi,

$$b' = ka', \quad f'(r) = \eta a';$$

puis, h étant une nouvelle constante,

$$(6) \quad b = k(a - h);$$

puis encore, par l'équation (5),

$$(7) \quad \beta = -\frac{1}{k}(\alpha - \eta) [*].$$

[*] On aurait pu tirer ces formules de l'équation (4), directement et sans employer la considération de la dérivée; mais la solution eût été moins claire et peut-être moins rigoureuse.

4. Ces valeurs des ordonnées b et β , substituées dans l'équation (3), donnent, par un calcul facile,

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 + b^2 - 2\eta(a - h) - l^2, \\ \rho^2 &= a^2 + \beta^2 - 2ha + l^2, \end{aligned}$$

l^2 désignant une constante.

Par suite, les équations (1) et (2) deviendront

$$(8) \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + 2\eta(a - h) + l^2 = 0,$$

$$(9) \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2\beta y + 2ha - l^2 = 0.$$

5. Pour simplifier ces résultats, observons que, d'après les équations (6) et (7), les centres de nos deux séries de cercles sont situés sur deux droites perpendiculaires entre elles. Si donc nous prenons ces deux lignes pour axes, nous aurons

$$k = 0, \quad h = 0, \quad \eta = 0, \quad a = 0, \quad b = 0,$$

et les équations (8) et (9) deviendront

$$(10) \quad x^2 + y^2 - 2ax + l^2 = 0,$$

$$(11) \quad x^2 + y^2 - 2\beta y - l^2 = 0.$$

6. Ces nouvelles équations représentent tous les cercles cherchés. Ceux de la première série ont leurs centres sur l'axe des x , et les autres ont les leurs sur l'axe des y . Le *système orthogonal* est déterminé par la constante l^2 . Si cette constante est positive, ce qu'il est permis de supposer, les cercles représentés par l'équation (11) couperont l'axe des abscisses en deux points *fixes* A, B situés de part et d'autre de l'origine O, à une distance égale à l ; et les autres cercles rencontreront orthogonalement le même axe, en deux points *variables* C, D, déterminés par

$$OC = \beta - \sqrt{\beta^2 - l^2}, \quad OD = \beta + \sqrt{\beta^2 - l^2}.$$

7. On conclut, de ces dernières valeurs,

$$OC \cdot OD = l^2 = \overline{AO}^2.$$

Cette relation signifie que *la droite AB est partagée harmoniquement*

aux points C, D. Conséquemment, pour obtenir tous les systèmes de cercles orthogonaux tracés sur un plan, on prend deux points fixes quelconques A, B, par lesquels on fait passer une première série de cercles; on partage la droite AB, harmoniquement, aux points variables C, D; enfin, sur CD comme diamètre, on décrit une circonférence : elle coupe orthogonalement tous les premiers cercles.

8. REMARQUE. — Il n'existe pas, sur un plan, de systèmes de cercles orthogonaux autres que ceux qui résultent de la construction précédente.

Cette construction est bien connue, puisqu'elle ne diffère pas de celle qui donne la *projection stéréographique sur un horizon* [*]; mais il était intéressant d'examiner si les systèmes qu'elle fournit sont les seuls possibles.

9. Supposons à présent que les cercles AB, CD soient situés dans un plan passant par le centre I d'une sphère quelconque S; appelons V l'extrémité du rayon perpendiculaire à ce plan : V sera le *point de vue*; le plan ABCD sera le *tableau*; et les cercles orthogonaux AB, CD seront les *perspectives*, ou les projections stéréographiques de deux cercles orthogonaux *ab*, *cd* tracés sur la sphère. Cette proposition, que nous avons admise en commençant, se démontre sans difficulté. Il n'est pas aussi aisé de voir comment sont distribuées, sur la sphère, les deux séries de cercles répondant aux deux séries tracées sur le plan ABCD. Pour résoudre cette partie de la question, je m'appuierai sur la proposition suivante :

10. Si un faisceau harmonique a son centre V sur une circonférence, chacune des cordes *ab*, *cd* obtenues en joignant les extrémités des rayons conjugués, passe par le pôle de l'autre corde.

Pour démontrer que *ab* passe par le point *s*, pôle de *cd*, menons *da*, *db*; nous aurons, par une propriété connue,

$$\frac{\sin cVa}{\sin cVb} = \frac{\sin dVa}{\sin dVb} ;$$

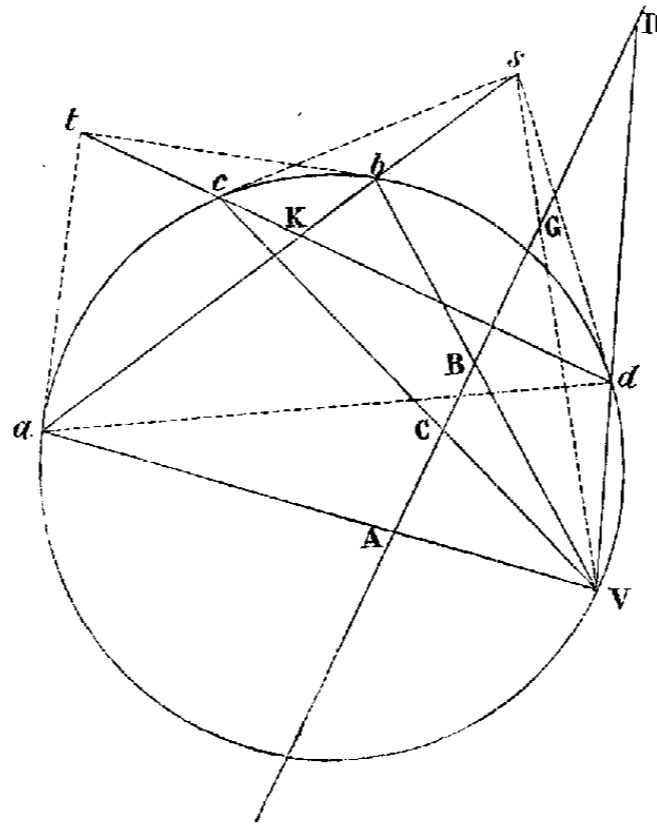
ou, en remplaçant les différents angles par ceux qui leur sont respec-

[*] Voyez ma *Cosmographie*.

tivement égaux,

$$\frac{\sin cda}{\sin cdb} = \frac{\sin sda}{\sin sdb}.$$

Fig. 1.



On conclut de là que la corde ab est partagée harmoniquement par la corde cd et par la tangente ds . On prouverait de même que ab est partagée harmoniquement par cd et par la tangente en c , etc.

11. Par le point V et par la droite $ABCD$ considérée ci-dessus, faisons passer un plan : il coupera la sphère S suivant une circonférence $acbdV$, sur laquelle seront situés les points a, b, c, d dont A, B, C, D sont les perspectives. Puisque les points A, B sont fixes, il en sera de même pour a, b ; c'est-à-dire que *tous les cercles de la première série passeront par les extrémités de la corde ab* . D'après un théorème connu, le lieu des pôles de ces cercles, relativement à la sphère S , est la droite RÉCIPROQUE de ab [*] : sur le plan de la figure, cette droite serait projetée suivant la perpendiculaire élevée au milieu de ab . Mais, d'après une propriété de la projection stéréographique démontrée par M. Chasles, chacun de ces pôles a pour perspective le centre du cercle AB correspondant. Donc, à la droite lieu des centres des cercles AB correspond, dans l'espace, une autre droite, laquelle est réciproque de la corde ab .

12. Soit G le milieu de CD , ou le centre du cercle CD : ce point est

[*] *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*, seconde édition, page 282.

la perspective du sommet du cône circonscrit à la sphère S suivant le cercle cd . Donc, les tangentes cs et ds sont deux génératrices de ce cône, lequel a pour sommet s . Nous avons vu tout à l'heure que ce point s est situé sur la corde ab ; conséquemment, le lieu des pôles des cercles appartenant à la seconde série est la droite ab ; les plans de ces cercles passent tous par la droite réciproque de ab .

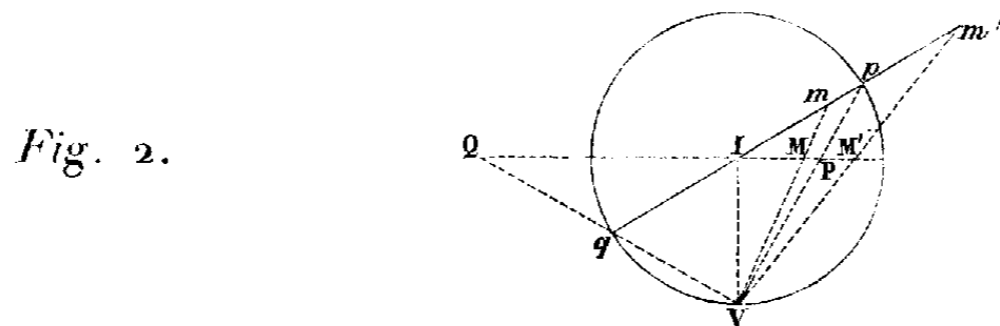
13. En résumé, pour obtenir tous les systèmes de cercles orthogonaux tracés sur une sphère, on prend deux droites réciproques l, l' ; suivant la première droite on fait passer des plans qui donnent lieu, par leurs intersections avec la sphère, à une première série de cercles; on opère de la même manière pour la seconde droite: chacun des cercles de la seconde série coupe orthogonalement tous ceux de la première. En outre, le lieu des pôles des premiers cercles, relativement à la sphère, est la seconde droite, ET VICE VERSA.

14. Les droites réciproques l, l' sont perpendiculaires entre elles, et elles ont pour projections stéréographiques les droites rectangulaires Ox, Oy , considérées plus haut (6). Par suite, les projections stéréographiques de deux droites réciproques sont deux droites perpendiculaires entre elles.

Cette propriété de la projection stéréographique n'avait pas, je crois, été remarquée: elle fait voir que l'angle de deux droites peut rester invariable en perspective, lors même que les côtés de l'angle ne sont pas dans un même plan.

15. Il y a plus: les projections M, M' des points réciproques m, m' par lesquelles passent les droites réciproques l, l' sont elles-mêmes des points réciproques, relativement à un certain cercle.

En effet, imaginons le grand cercle qVp passant par le rayon Imm' et par le point de vue V , et soit, sur le plan de ce grand cercle,



PIQ la trace du tableau. La perspective du grand cercle perpendicu-

laire au plan de la figure, et passant par qIp sera, évidemment, la circonférence décrite sur QP comme diamètre. Or, Vm , Vm' , Vq et Vp forment un faisceau harmonique; donc M et M' sont réciproques relativement au cercle QP .

16. Supposons que, les points m , m' étant fixes, les droites l , l' tournent autour du rayon Im : alors les perspectives L , L' de ces deux droites tourneront autour des points M , M' , sans cesser d'être perpendiculaires entre elles. Conséquemment, *le lieu du point de rencontre R des droites L , L' est la circonférence décrite sur MM' comme diamètre.*

17. Aux deux points M , M' qui restent fixes quand les droites l , l' éprouvent un mouvement de *rotation*, répondent deux points N , N' qui ne changent pas lorsque ces droites reçoivent un mouvement de *translation*. En effet, par le point de vue V , menons des parallèles à nos deux droites: les points N , N' où ces parallèles percent le tableau, seront les points de *fuite* des perspectives L , L' . Conséquemment, si les droites réciproques l , l' se déplacent, mais sans changer de direction, ces points N , N' seront invariables.

18. On pourrait continuer cette discussion; on verrait, par exemple, que *les cercles décrits sur les droites telles que MM' forment, avec les perspectives des grands cercles décrits sur le diamètre p , q , un système orthogonal*; mais je ne veux pas épuiser le sujet.

(Mai 1854.)