COMMUNICATIONS ET LECTURES.

L'expression de l'heure dans le système de l'axe instantané; par F. Folie, membre de l'Académie.

Dans une note précédente (*), j'ai dit que, si la nutation eulérienne est éliminée en obliquité et en longitude dans les formules rapportées à l'axe instantané, c'est pour reparaître dans l'expression de l'heure, chose autrement grave, puisque l'uniformité *absolue* de l'heure est la base la plus essentielle de l'astronomie sphérique.

Il y a un moyen fort simple de le démontrer.

On sait que, dans le cas où il n'existe pas de forces perturbatrices, cas que nous traiterons ici, l'axe instantané de rotation ζ est immuable dans l'espace.

Dans l'équateur instantané, fixe également, nous choisirons deux axes rectangulaires, l'un ξ, dirigé suivant l'intersection de cet équateur et de l'écliptique fixe, l'autre η, perpendiculaire au premier.

Ces deux axes, joints à l'axe instantané ζ, constitueront notre système d'axes fixes.

Les axes mobiles sont les trois axes principaux de la Terre, x, y, z.

Nous appellerons, avec les astronomes contemporains,

(*) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique,* 3e sér., t. XXXIII, p. 154.

déclinaison d'une étoile, sa distance à l'équateur instantané; ascension droite, la distance du cercle de déclinaison à l'équinoxe, qui est fixe; colatitude d'un lieu de la Terre, sa distance au pôle instantané, comptée sur le méridien (instantané) du lieu; sa longitude sera la distance de ce méridien instantané au méridien, instantané également, de Greenwich.

Lorsqu'il s'agira des coordonnées du lieu rapportées aux axes d'inertie, que nous supposerons fixes dans la Terre, nous les appellerons latitude et longitude géographiques, et ces coordonnées du lieu, à l'inverse des précédentes, seront absolument constantes.

Au contraire, les coordonnées d'une étoile, rapportées aux axes instantanés, seront évidemment constantes, tandis que, rapportées aux axes géographiques, elles seront soumises à la nutation eulérienne.

Les formules de transformation des coordonnées orthogonales donnent

$$(1)\ldots\quad\left\{\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= -l\cos\varphi + m\sin\varphi,\\ \sin\gamma\,\frac{d\psi}{dt} &= \quad l\sin\varphi + m\cos\varphi,\\ \frac{d\varphi}{dt} &= \quad n - \cos\gamma\,\frac{d\psi}{dt};\end{aligned}\right.$$

l, m, n représentent les composantes de la vitesse de rotation de la Terre autour des trois axes principaux x, y, z;

γ est l'inclinaison de l'équateur instantané sur l'équateur géographique, φ et ψ sont les angles compris entre les axes des x et des ξ, et l'intersection des deux équateurs; ces angles sont comptés, le premier, dans le sens du mouvement de rotation, le second, en sens inverse.

Dans le cas traité, où il n'existe pas de forces perturbatrices, on a

$$(2)\ldots\ldots\quad\left\{\begin{aligned} l &= \gamma_1 b\cos(\iota t + \beta_1),\\ m &= \gamma_1 a\sin(\iota t + \beta_1),\\ n &= \text{constante (*)};\end{aligned}\right.$$

a et b représentent

$$\sqrt{\frac{C-A}{B}}\quad\text{et}\quad\sqrt{\frac{C-B}{A}},$$

et ι, nab; A, B, C sont les moments d'inertie principaux de la Terre.

Substituant, on trouve, en admettant, pour simplifier l'étude de la question, que $a = b$, et en faisant $a\gamma_1 = b\gamma_1 = \mu_1$:

$$(3)\ldots\quad\left\{\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= -\mu_1\cos(\iota t + \beta_1 + \varphi),\\ \sin\gamma\,\frac{d\psi}{dt} &= \quad \mu_1\sin(\iota t + \beta_1 + \varphi),\\ \frac{d\varphi}{dt} &= \quad n - \mu_1\cot\gamma\sin(\iota t + \beta_1 + \varphi).\end{aligned}\right.$$

L'intégration rigoureuse de ces équations offrirait de très grandes difficultés. Pour le but que nous voulons

(*) *Revision des constantes de l'astronomie stellaire*, p. 64.

atteindre, nous pourrons, à cause de la petitesse de μ_1, supposer, dans le second membre, $\varphi = nt$; alors

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad \Delta\gamma = -\frac{\mu_1}{n+\iota}\sin(\iota t + \beta_1 + \varphi),$$

quantité très petite, de sorte que γ pourra être considéré comme constant dans l'intégration de la seconde et de la troisième équation, qui donneront ainsi

$$(5). \quad . \quad . \quad \sin\gamma\Delta\psi = -\frac{\mu_1}{n+\iota}\cos(\iota t + \beta_1 + \varphi),$$

$$(6). \quad . \quad . \quad \varphi = nt - \frac{\mu_1}{n+\iota}\cot\gamma\,\sin(\iota t + \beta_1 + \varphi).$$

Or l'observation a établi que l'angle γ, compris entre l'axe instantané et l'axe d'inertie, n'est probablement pas supérieur à 0″,1; $\cot\gamma$ est donc très considérable, et rien ne prouve que les facteurs $\frac{\mu_1}{n+\iota}\cot\gamma$ et $\frac{\mu_1}{n+\iota}\operatorname{coséc}\gamma$ soient des quantités très petites.

Bien au contraire : en admettant, ce qui est suffisamment correct, que $\mu_1 \operatorname{coséc}\gamma$ et $\mu_1 \cot\gamma$ sont égaux à l'unité, les facteurs précédents seront, en nombres abstraits, un peu inférieurs à $\frac{1}{2\pi.366.25}$, ou, en temps, à six secondes (*).

(*) Cette valeur extrêmement grande provient de ce que nous avons pris pour plan fixe, non l'écliptique, mais l'équateur instantané, dont l'inclinaison sur l'équateur géographique reste toujours très faible.

Mais la forme même de la troisième des équations (1) montre que l'angle φ, ou l'heure, est affecté de la nutation eulérienne. On s'en assurerait en développant cette équation d'après le système (corrigé) d'Oppolzer. Si nous ne le faisons pas, c'est pour les motifs invoqués dans notre critique de ce système. (Voir *Une réaction en astronomie*, dans les notices extraites de l'*Annuaire de l'Observatoire* pour 1897, ainsi que *Vierteljahrschrift*, 1896, et la note du *Bulletin* citée ci-dessus.)

Si les astronomes veulent continuer à faire usage de ce système, ils sont tenus d'en corriger les développements, qui sont fautifs, et surtout d'y définir correctement l'heure et les longitudes, qui sont affectées de la nutation eulérienne.

Si donc la nutation eulérienne disparaît en obliquité (elle n'est pas de 0″,00005) dans le système de l'axe instantané, il n'en est pas de même en longitude, et la valeur de l'angle φ, qui, évalué en temps, représente l'heure pour un lieu de l'équateur géographique situé sur le premier méridien, c'est-à-dire sur l'axe principal x, est sujette à des variations dont la période est de $1 + \frac{1}{305}$ jour pour une Terre solide, mais dont il ne serait guère possible d'évaluer actuellement la grandeur.

Ainsi, malgré l'uniformité que nous avons admise pour le mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe instantané [uniformité qui n'a pas lieu autour de cet axe dans le cas de l'existence de forces perturbatrices (*)], nous voyons que l'heure est soumise à des variations qui ont une période eulérienne, mais dont la grandeur nous est actuellement inconnue (**). Encore n'avons-nous pu la définir que pour un lieu déterminé de l'équateur géographique, l'inconstance des longitudes et latitudes terrestres, rapportées à l'axe instantané, empêchant d'écrire, pour un autre lieu, comme dans le système des axes géographiques,

$$\Phi = \varphi + l,$$

(*) Voir l'expression de la vitesse ω dans Oppolzer et Tisserand.

(**) Nous n'avons encore aucune notion certaine, ni sur la période, ni sur la grandeur de la nutation eulérienne.

Φ désignant l'heure pour un lieu de longitude géographique orientale l par rapport au premier.

La définition la plus capitale de l'astronomie, celle d'une heure rigoureusement uniforme, est donc radicalement impossible dans le système de l'axe instantané; et, si l'ascension droite et la déclinaison d'une étoile y sont constantes, il n'est plus possible de définir la première comme étant l'heure de son passage au méridien; il n'est plus même possible de déterminer exactement ce méridien, soumis lui-même à la nutation eulérienne, à moins d'admettre que l'ascension droite d'une étoile est l'heure de son passage à ce méridien, ce qui est faux dans ce système, et que les ascensions droites de toutes les étoiles observées sont, et rigoureusement connues, et rigoureusement calculées.

On m'objectera peut-être que cette dernière condition doit être réalisée également dans le système des axes géographiques.

A quoi je répondrai :

1° Que, dans ce système, l'ascension droite d'une étoile se déduit tout à fait correctement de l'heure de son passage au méridien;

2° Que ce méridien est fixe et que, par conséquent, on peut le déterminer au moyen d'une très longue série d'observations, dans laquelle les petites erreurs de position ou de calcul du lieu apparent de l'étoile se compenseront.

Une autre objection qu'on fait à ce dernier système d'axes, c'est que la nutation eulérienne y apparaît dans les expressions de l'ascension droite et de la déclinaison; mais la forme connue de sa nutation permet de l'éliminer assez fréquemment; elle permet, en tout cas, de juger de

la négligence que l'on commet si l'on n'en tient pas compte; elle permettra enfin de la déterminer. Tandis que, dans le système de l'axe instantané, à cause des erreurs dans lesquelles Oppolzer a versé à son insu (*), on a cru de bonne foi, avec lui, qu'il suffisait de rapporter les formules de réduction à cet axe pour éliminer la nutation eulérienne, sans altérer en rien la notion de l'heure : la nutation eulérienne, pense-t-on, se traduit simplement par la variation des latitudes (astronomiques); on reconnaît bien qu'il en résulte également une variation des longitudes, mais on n'a pas donné l'expression de cette variation, qui n'est pas insensible, comme l'a montré la discussion de l'équation (5). Non; cette opinion est tout à fait erronée : on vient de voir que si, dans le système de l'axe instantané, la nutation eulérienne est éliminée en obliquité, elle ne disparaît ni en longitude, ni dans les expressions des longitudes et latitudes terrestres, ni dans celle de l'heure; et que, dans ce système, l'ascension droite d'une étoile n'est plus l'heure de son passage au méridien. Dans le système des axes géographiques, au contraire, l'heure est *rigoureusement* uniforme, l'ascension droite se détermine par l'heure du passage de l'étoile au méridien, celui-ci est fixe, les longitudes et les latitudes terrestres sont constantes (**).

Bref, dans le système de Laplace, on marche sur un

(*) Voir *Une réaction en astronomie* (Notices extraites de l'*Annuaire de l'Observatoire* pour 1897) et *Vierteljahrschrift*, 1896, 4e trimestre.

(**) Je fais ici abstraction de la variation de latitude qui proviendrait d'un déplacement annuel du pôle d'inertie, dû à des circonstances climatologiques.

sol ferme; dans celui d'Oppolzer, même corrigé des erreurs flagrantes commises par son auteur, on ne pourra marcher jamais que sur un sol mobile : rien de fixe, ni heure, ni méridien, ni longitude, ni latitude; et l'ascension droite d'une étoile n'est pas même l'heure de son passage au méridien.

Je pense qu'un très grand nombre d'astronomes, préoccupés surtout de la nutation, qui se tire des deux premières des équations (1), n'ont guère porté leur attention sur la troisième, qui sert à définir l'heure au moyen de l'équation (6), et qu'ils se sont imaginé qu'il suffisait de l'uniformité du mouvement de rotation de la Terre pour assurer l'uniformité de l'heure.

Ils se convaincront aisément, par la lecture de ces pages, que cette conclusion n'est pas aussi simple à déduire et que, pour qu'elle soit vraie, il importe tout d'abord de donner de l'heure une définition rigoureuse qui justifie cette conclusion, et, pour cela, d'observer dans un méridien fixe.

Il ne suffit pas de dire : la Terre tourne uniformément sur elle-même en vingt-quatre heures; il faut encore déterminer l'heure en chaque lieu.

Oppolzer n'a traité cette question que d'une manière très superficielle dans les éditions allemandes de son ouvrage; et, s'il y a consacré un paragraphe spécial dans la traduction française de M. Pasquier, c'est en abandonnant complètement le système de l'axe instantané, pour adopter, inconsciemment sans doute, celui des axes d'inertie et du méridien fixe.

C'est, en effet, dans ce dernier système seulement qu'on peut donner une définition absolument rigoureuse

de l'heure, l'élément le plus fondamental de l'astronomie (*).

Résumons en quelques lignes les pages précédentes.

La nutation eulérienne, abstraction faite des termes tout à fait insignifiants du second ordre, a identiquement la même forme, qu'il existe ou non des forces perturbatrices.

Nous avons traité ce dernier cas, en prenant pour axes de référence un système d'axes rectangulaires fixes, auquel l'axe de l'équateur instantané sert de base, et nous avons conclu de notre analyse que, si la nutation eulérienne est nulle en obliquité dans ce système [voir l'équation (4)], il n'en est pas de même de la nutation en longitude [voir l'équation (5)] et que, chose bien plus grave, cette nutation apparaît d'une manière sensible dans l'expression (6) de l'angle φ, qui détermine l'heure pour un point de l'équateur situé sur le premier méridien. Or, dans cette expression, comme dans celle de la nutation en longitude, interviennent deux quantités, la constante μ_1 et l'argument ι, qui nous sont inconnues. Nous ne pouvons donc songer à déduire l'heure d'un autre lieu de celle du lieu pour lequel elle est φ, puisque nous devrions connaître pour cela les variations de longitude et même de latitude de ces deux lieux.

Dans le système de l'axe instantané, correctement exposé, la définition de l'heure est donc actuellement impossible, et ses variations eulériennes, de même que celles de la longitude, sont bien plus grandes qu'on ne

(*) Voir le paragraphe relatif à l'heure dans la *Revision des constantes de l'astronomie stellaire,* pp. 93-98.

serait tenté de le croire à première vue, en ne considérant que la faible inclinaison des deux équateurs l'un sur l'autre.

Je le déclare à nouveau : l'astronomie sphérique est entrée dans une fausse voie en suivant la méthode d'Oppolzer, qui ne peut qu'enrayer ses progrès ultérieurs.

Une réaction s'impose.

Il ne suffit pas que les astronomes s'entendent sur les constantes et les formules dont ils feront usage au XX^e siècle; il faut surtout que ces formules soient correctes.

Celles dont on fait actuellement usage ne le sont pas.

La démonstration en a été faite dans la *Vierteljahrschrift* (*), dans les notices extraites de l'*Annuaire de l'Observatoire* pour 1897, enfin dans les pages précédentes.

Je conçois que les astronomes qui n'ont pas fait une étude spéciale du mouvement de rotation de la Terre, se soient laissé séduire par le beau talent astronomique d'Oppolzer.

Je conçois moins bien que les astronomes géomètres, après qu'on leur a démontré l'incorrection des formules du savant viennois, gardent un silence trop prudent, en présence d'une décision, de longtemps irréparable, qu'ils vont prendre bientôt quant aux formules de réduction dont il sera fait usage en 1901, et de la lourde responsabilité qu'ils assumeront de ce chef devant le prochain siècle.

(*) Octobre-décembre 1896.